

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra automatizační techniky a řízení



Vypracoval: Bc. Petr Ščevík
Vedoucí DP: Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.
<http://books.fs.vsb.cz/cislicovaregulace/>

Seznam použitých zkratek a značení

a, a_i, b, b_i	... Konstanty
a_i	... Koeficient levé strany diferenční (diferenciální) rovnice, ... koeficienty mnohočlenu ve jmenovateli přenosu
A	... Matice systému (stavová matice systému)
b_i	... Koeficient pravé strany diferenční (diferenciální) rovnice, ... koeficienty mnohočlenu v čitateli přenosu
b	... Vektor vstupu (stavový vektor řízení)
c	... Výstupní vektor (výstupní vektor systému)
d	... Vektor převodu (výstupní vektor řízení)
e	... Regulační odchylka
e	... Základ přirozeného logaritmu
$e_v(\infty)$	... Trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou
$e_w(\infty)$	... Trvalá regulační odchylka způsobená žádanou veličinou
$g(kT)$	... Diskrétní impulsní funkce
$G(z)$	... Z-přenos, Z-obraz impulsní funkce
G_{MC}	... Přenos měřicího členu
G_o	... Přenos otevřeného regulačního obvodu
G_p	... Přenos přes, který působí poruchová veličina na regulační obvod
G_R	... Přenos regulátoru
G_S	... Přenos soustavy
G_T	... Přenos tvarovače
G_{vy}	... Přenos poruchy
G_{ve}	... Odchylkový přenos poruchy
G_{wy}	... Přenos řízení
G_{we}	... Odchylkový přenos řízení

H	... Hurwitzova matice
$h(kT)$	Diskrétní přechodová funkce, ... grafické vyjádření $h(kT)$ = diskrétní přechodová charakteristika
$H(z)$	... Z-obraz přechodové funkce
I	... Jednotková matice
k	... Relativní diskretní čas
kT	... Diskretní čas
k_p	... Zesílení regulátoru
L	... Operátor přímé L-transformace
L^{-1}	... Operátor zpětné L-transformace
M	... Mnohočlen v čitateli přenosu (kořeny = nuly)
n	... Stupeň charakteristického mnohočlenu
N	... Charakteristický mnohočlen, mnohočlen ve jmenovateli přenosu
$N(j\omega)$	... Michajlovova funkce, grafické vyjádření $N(j\omega)$ = Michajlovova charakteristika (Michajlovův hodograf)
$N_p(\omega) = \operatorname{Re}\{N(j\omega)\}$	Reálná část Michajlovovy funkce, grafické vyjádření $N_p(\omega)$... = reálná část Michajlovovy charakteristiky
$N_g(\omega) = \operatorname{Im}\{N(j\omega)\}$	Imaginární část Michajlovovy funkce, grafické vyjádření $N_g(\omega)$... = imaginární část Michajlovovy charakteristiky
q	... Řád integračního členu, stupeň astatismu
s	... Komplexní proměnná v L-transformaci
t	... Spojitý čas
t_m	... Doba dosažení maximální hodnoty y_m (maximálního překmitu)
t_o	... Doba odezvy
t_{95}	... Doba dosažení 95 % ustálené hodnoty přechodové charakteristiky
T	... Vzorkovací perioda

T_d	... Diskrétní Diracův impuls
T_D	... Derivační časová konstanta
T_w	... Časová konstanta uzavřeného regulačního obvodu
T_I	... Integrační časová konstanta
u	... Akční veličina
u_T	... Tvarovaná akční veličina
U^*	... Laplaceův obraz výstupního signálu vzorkovače
v	... Poruchová veličina
w	... Žádaná veličina, komplexní proměnná u bilineární transformace
$\mathbf{x}$	... Vektor stavových veličin
y	... Regulovaná (výstupní) veličina
$y_m = y(t_m)$	... Maximální hodnota regulované veličiny při překmitu
z	... Komplexní proměnná v Z-transformaci
Z	... Operátor přímé Z-transformace
Z^{-1}	... Operátor zpětné Z-transformace
$\delta(t)$	... Spojitý Diracův impuls
$\delta(kT)$	... Diskrétní Diracův impuls
Δ	... Přírůstek, operátor dopředné difference
∇	... Operátor nabla, operátor zpětné difference
$\eta(t)$	... Spojitý Heavisideův skok
$\eta(kT)$	... Diskrétní Heavisideův skok
ω_m	... Frekvence měřeného signálu
ω_V	... Vzorkovací frekvence
ξ	... Koeficient poměrného tlumení
$\mathcal{K}$	... Překmit
A/Č	... Analogově-číslicový převodník

Č/A	... Číslicově-analogový převodník
ČR	... Číslicový regulátor
LDS	... Lineární diskrétní systém
P	... Proporcionální složka u regulátoru, proporcionální regulátor
PD	Proporcionálně derivační analogový regulátor, ... proporcionálně diferenční číslicový regulátor, číslicový regulátor PD
PI	... Proporcionálně integrační analogový regulátor
PID	... Proporcionálně integračně derivační analogový regulátor
PS	... Proporcionálně sumační číslicový regulátor, číslicový regulátor PI
PSD	Proporcionálně sumačně diferenční číslicový regulátor, ... číslicový regulátor PID
RO	... Regulační obvod
S	... Regulovaná soustava

Seznam použité literatury

- ASTRÖM, J., HÄGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. Second Edition. Research Triangle Park – North Carolina, Instrument Society of America, 1995.
- BALÁTEĚ, J. *Automatické řízení*. 1. vyd. Praha: BEN – Technická literatura, 2003. 664 s. ISBN 80-7300-020-2.
- BALÁTEĚ, J. *Vybrané statě z automatického řízení*. 2. vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1996. 359 s. ISBN 80-214-0793-X.
- BATESON, R. N. *Control system technology*. Fifth Edition. Prentice Hall – Upper Saddle River, New Jersey, 1996. 784 p. ISBN 0-13-226275-4.
- DRÁBEK, O. *Automatizované systémy řízení*. 2. vyd. Pardubice: SPŠ Elektrotechnická a VOŠ Pardubice, 2000 [cit. 2007-11-20]. Dostupný z [www: zde](#).
- FARANA, R., SMUTNÝ, L., VÍTEČEK, A., VÍTEČKOVÁ, M. *Zpracování závěrečných prací z oblasti automatizace a informatiky*. 1. vyd. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2004. 116 s. ISBN 80-248-0557-X.
- LEIGH, J.R. *Applied Digital Control: Theory, Design and Implementation*. Second Edition. Prentice Hall International (UK), 1992. 524 p. ISBN 0-13-044249-6.
- LEVINE, W.S. *The Control Handbook*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2000. 1548 p. ISBN 0-8493-8570-9.
- MINÁŘ, K. *Analýza lineárních regulačních obvodů* [online]. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2000 [cit. 2007-12-20]. Bakalářská práce, vedoucí: Wagnerová, R. Dostupný z [www: zde](#).
- NOSKIEVIČ, P. *Simulace systémů*. 1. vyd. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 1992. 217 s. ISBN 80-7078-112-2.
- *Pages of Foundation Wikimedia* [online]: Sampling Rate. Available from World Wide Web: [zde](#).
- *Pages of Foundation Wikimedia* [online]: Nyquist–Shannon sampling theorem. Available from World Wide Web: [zde](#).
- ŠULC, B., VÍTEČKOVÁ, M. *Teorie a praxe návrhu regulačního obvodu*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. 333 s. ISBN 80-01-03007-5.
- ŠVARC, I., ŠEDA, M., VÍTEČKOVÁ, M. *Automatické řízení*. 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. 324 s. ISBN 978-80-214-3491-2.
- TŮMA, J. *Signal Processing – kapitoly o zpracování signálů*. Dokumentace k programu Signal Analyse. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2006. 125 s.
- VANDOREN, V. *Tři tváře PID*. Control Engineering Česko, 2007, roč. II, č. 2(3), s.18 – 20. ISSN 1896-5784.
- VÍTEČKOVÁ, M. *L- a Z- transformace*. Skripta FS VŠB-TUO, Ostrava, 1995, ISBN 80-02-01050-7.
- VÍTEČKOVÁ, M. *Seřízení regulátorů metodou inverze dynamiky*. 1. vyd. Ostrava: skripta FS VŠB-TU Ostrava, 1998 (dotisk 2000). 56 s. ISBN 80-7078-628-0.
- VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Základy automatické regulace*. 1. vyd. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2006. 200 s. ISBN 80-248-1068-9.
- VÍTEČKOVÁ, M. *Slovník L- a Z- transformace s řešenými příklady*. Skripta FS VŠB-TUO, Ostrava 2005, ISBN 80-248-0851-X.
- VÍTEČEK, A. *Matematické metody automatického řízení*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 1988. 156 s.
- VÍTEČEK, A. *Automatické řízení II*. Přednášky, 2005.
- WITTENMARK, B., ASTRÖM, K.J., ARZEN, K.-E. *Computer Control: An Overview*. Department of Automatic Control, Lund, Sweden. Pdf Document, 2001.

1 Úvod do číslicové regulace

V následujícím textu budou uvedeny základní vlastnosti, popisy a přehledy týkající se problematiky číslicové regulace. Některé z kapitol budou také obsahovat řešené příklady pro snadnější zvládnutí dané problematiky. Kompletní učební text bude kopírovat osnovy předmětu Automatické řízení II, vyučovaného na katedře automatizační techniky a řízení, VŠB-TU Ostrava.

První kapitola se bude věnovat seznámení se s základními pojmy teorie číslicové regulace, dále pojmy z oblasti Z-transformace a vzorkováním. Druhá kapitola bude zaměřena na matematický popis lineárních diskrétních dynamických systémů, resp. matematické modely. Třetí kapitola se bude zabývat popisem lineárního diskrétního regulačního obvodu a jeho základními přenosy. Ve čtvrté kapitole budou popsány konvenční typy lineárních diskrétních regulátorů a jejich modifikace, resp. polohový a přírůstkový algoritmus číslicových regulátorů. Pátá kapitola bude zaměřena na technické problémy při nasazení PSD regulátoru, resp. filtraci u lineárních diskrétních regulačních obvodů. Šestá kapitola se bude zabývat stabilitou lineárních regulačních obvodů a to jak diskrétních tak spojitých. Zde bude popsán princip bilineární transformace a také kritéria stability (algebraická, kmitočtová). V sedmé kapitole se budou nacházet postupy při popisování kvality regulačního pochodu a to v časové oblasti a v oblasti komplexní proměnné. Dále budou popsány sumační kritéria sloužící ke komplexnímu posouzení kvality regulačního pochodu a určování trvalých regulačních odchylek. Poslední osmá kapitola bude zaměřena na syntézu regulačních obvodů, tedy na návrh struktury regulátoru a jeho parametrů tak, aby byla dosažena požadovaná kvalita regulačního pochodu.

1.1 Význam číslicové regulace

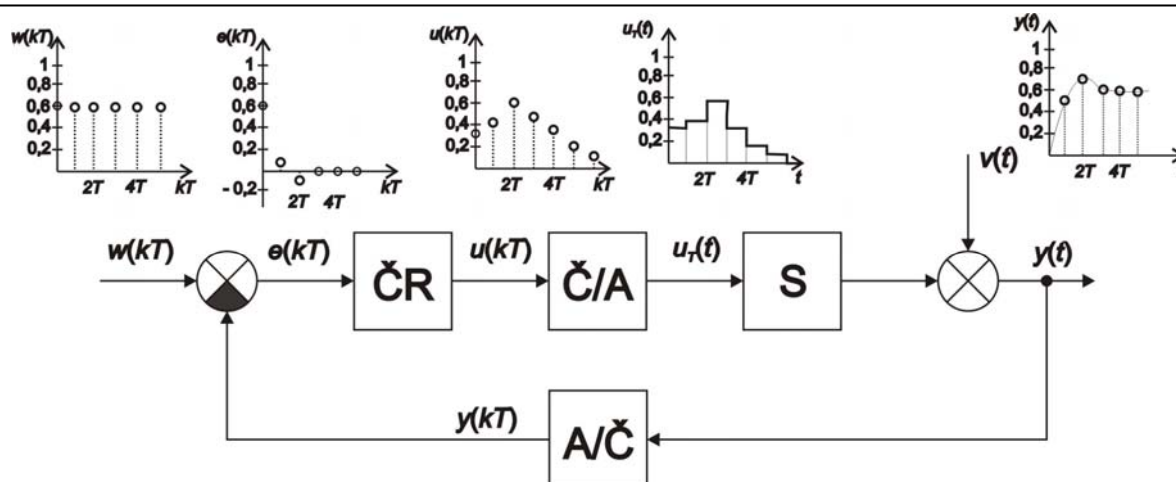
V současném rozmachu číslicové techniky dochází k stále častějšímu využívání číslicových regulátorů. Regulace vstupuje do našich životů v nejrůznějších formách. Ať už se jedná o přístroje, které využíváme v domácnosti či při výrobě v nejrůznějších závodech. V případě tohoto učebního textu se zaměříme na číslicové regulátory, které v diskrétní formě realizují stejné algoritmy jako analogové regulátory.

V našem případě budou pojmy jako je číslicový (diskrétní v úrovni i v čase) a diskrétní (spojitý v úrovni a diskrétní v čase) považovány za totožné neboť kvantizační chybu považujeme za zanedbatelnou [Vítečková, Víteček, 2006].

1.2 Schéma a popis číslicového regulačního obvodu

Číslicový regulační obvod je takový obvod, ve kterém alespoň jedna veličina má tvar posloupnosti diskrétních hodnot vytvářených v pravidelně se opakujících okamžicích označovaných jako perioda T .

Na obr. 1. 1 je znázorněno blokové schéma regulačního obvodu s číslicovým regulátorem.



Obr. 1. 1 Blokové schéma regulačního obvodu s číslicovým regulátorem

Značení bloků:

- ČR – číslicový regulátor,
- A/Č – analogově-číslcový převodník,
- S – regulovaná soustava,
- Č/A – číslicově-analogový převodník.

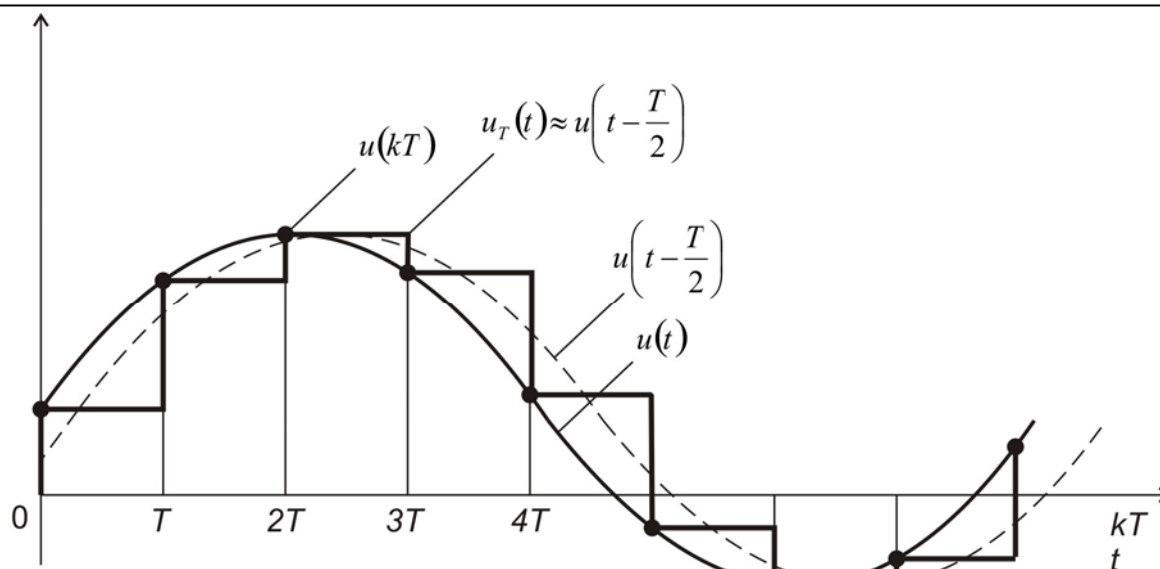
Značení veličin:

- $w(kT)$ – žádaná veličina,
- $e(kT)$ – regulační odchylka,
- $u(kT)$ – diskretní akční veličina,
- $u_T(t)$ – tvarovaná akční veličina,
- $v(t)$ – poruchová veličina,
- $y(t)$ – regulovaná (výstupní) veličina,
- T – vzorkovací perioda.

Regulovanou soustavu vždy považujeme za spojitou. O převod spojitě (analogové) veličiny se stará A/Č převodník. Tento převodník je obvykle zapojen ve zpětné vazbě.

Důležitou podmínkou je, že A/Č převodník musí být přesnější než Č/A. Také se dá říci, že A/Č převodník považujeme za jakýsi omezující člen, na jehož přesnosti závisí přesnost celého regulačního obvodu.

Z číslicového regulátoru vystupuje diskretní akční veličina $u(kT)$, která je následně Č/A převodníkem převedena na tzv. tvarovanou veličinu $u_T(t)$. Je zřejmé, že můžeme tvarovanou veličinu uvažovat jako spojitou veličinu $u(t)$ se zpožděním o velikosti $T/2$, tedy $u\left(t - \frac{T}{2}\right)$. Průběhy akčních veličin v číslicovém regulačním obvodu jsou zobrazeny na obr. 1. 2.



Obr. 1. 2 Průběhy akčních veličin v regulačním obvodu s číslicovým regulátorem

1.3 Z-transformace

Z-transformace je matematický aparát, který se využívá k popisu, analýze a syntéze diskrétních regulačních obvodů [Wittenmark, Åström, Årzen; Vítečková, 1995].

Definiční vztahy Z-transformace jsou:

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (1.1)$$

$$x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z)z^{k-1} dz \quad (1.2)$$

kde

- z – komplexní proměnná,
- kT – diskretní reálná proměnná (diskretní čas),
- $x(kT)$ – diskretní originál (Z-originál),
- $X(z)$ – diskretní obraz (Z-obraz),
- Z – operátor přímé Z-transformace,
- Z^{-1} – operátor zpětné Z-transformace,
- T – vzorkovací perioda,
- r – poloměr kružnice, uvnitř které leží všechny singulární body funkce $X(z)$.

Zpětná Z-transformace se užívá, když hledáme k diskretnímu obrazu $X(z)$ originál $x(kT)$.

Diskretní časovou funkci $x(kT)$ získáme ze spojitě časové funkce $x(t)$ zastoupením spojitěho času t diskretním časem $x(kT)$, tzn.

$$t = t_k = kT; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Pro diskretní časovou funkci se užívá ekvivalentní zápis

$$x(kT) = x[k] = x_k \quad (1.4)$$

Aby diskrétní časová funkce $x(kT)$ byla originálem, musí být:

a) nulová pro záporné k , tzn.

$$x(kT) = \begin{cases} x(kT) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

b) exponenciálního řádu, tzn. musí vyhovovat nerovnosti

$$|x(kT)| \leq M e^{\alpha_0 kT} \quad (1.6)$$

$$M > 0, \alpha_0 \in (-\infty, \infty); k = 0, 1, 2, \dots$$

Splnění první podmínky se dá zajistit stejně jako při L-transformaci vynásobením diskretní časové funkce diskretním Heavisideovým jednotkovým skokem, který je dán vztahem

$$\eta(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Stejně jako u L-transformace zapisujeme korespondenci mezi diskretním originálem a diskretním obrazem ve tvaru

$$x(kT) \triangleq X(z) \quad (1.8)$$

Ukážeme si souvislost mezi L-transformací, definovanou vztahem

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (1.9)$$

a Z-transformací.

V definičním vztahu (1. 9) spojitý čas t zastoupíme diskretním časem kT a spojitý integrál diskretní sumou, dostaneme

$$X(s) \approx T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} \quad (1.10)$$

Srovnáním vztahu (1. 10) a (1. 1) vidíme, že pro

$$z = e^{sT} \quad (1.11)$$

bude platit

$$X(s) = \lim_{T \rightarrow 0} [TX(z)]_{z=e^{sT}} \quad (1.12)$$

1.3.1 Základní vlastnosti Z-transformace

Základní vlastnosti Z-transformace jsou uvedeny v tab. 1. 1. Podrobnější jsou uvedeny např. v [Vítečková, 1995; Vítečková, 2005].

Tab. 1. 1 Základní vlastnosti Z-transformace

Linearita	$Z\{a_1 x_1(kT) \pm a_2 x_2(kT)\} = a_1 X_1(z) \pm a_2 X_2(z)$
Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)	$Z\{x[(k-m)T]\} = z^{-m} X(z), \quad m \geq 0$
Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)	$Z\{x[(k+m)T]\} = z^m \left[X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(iT) z^{-i} \right], \quad m \geq 0$
Dopředná difference 1. řádu $\Delta x(kT) = x[(k+1)T] - x(kT)$	$Z\{\Delta x(kT)\} = (z-1)X(z) - zx(0)$

Zpětná difference 1. řádu $\nabla x(kT) = x(kT) - x[(k-1)T]$	$Z\{\nabla x(kT)\} = \frac{z-1}{z} X(z)$
Dopředná difference n -tého řádu	$Z\{\Delta x^n(kT)\} = (z-1)^n X(z) - z \sum_{i=0}^{n-1} (z-1)^{n-i-1} \Delta^i x(0)$
Zpětná difference n -tého řádu	$Z\{\nabla^n x(kT)\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n X(z)$
Sumace v časové oblasti typu I – odpovídá dopředné diferenci [dopředná (pravá) obdélníková metoda]	$Z\left\{\sum_{i=0}^{k-1} x(iT)\right\} = \frac{1}{z-1} X(z)$
Sumace v časové oblasti typu II – odpovídá zpětné diferenci [zpětná (levá) obdélníková metoda]	$Z\left\{\sum_{i=0}^k x(iT)\right\} = \frac{z}{z-1} X(z)$
Koncová hodnota v časové oblasti	$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

1.3.2 Ukázka ze slovníku L a Z-transformace

Pro ukázkou je k dispozici výtah ze slovníku L a Z-transformace. Podrobněji např. v [Vítečková, 1995, Vítečková, 2005].

Tab. 1. 2 Výtah ze slovníku L a Z-transformace

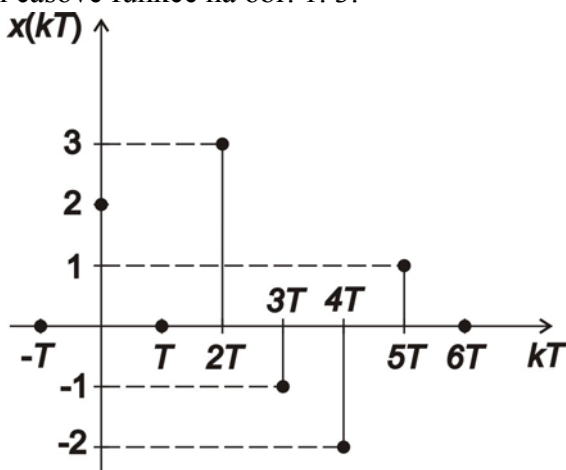
$x(t)$	$X(s)$	$x(kT)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	1
$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\eta(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
		$\binom{k-1}{n-1} (\mp a)^{k-n}; k \geq n,$ 0 pro $k < n, a \neq 0$	$\frac{1}{(z \pm a)^n}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{s \pm a}$	$e^{\mp akT}$	$\frac{z}{z-c}; c = e^{\mp aT}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kT e^{-akT}$	$\frac{cTz}{(z-c)^2}; c = e^{-aT}$
		$(\mp a)^k, a \neq 0$	$\frac{z}{z \pm a}$

$x(t)$	$X(s)$	$x(kT)$	$X(Z)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

1.3.3 Z-transformace – řešené příklady

Příklad 1.1

Určete obraz diskrétní časové funkce na obr. 1. 3.



Obr. 1. 3 Diskrétní časová funkce – příklad 1.1

Řešení:

Z obr. 1. 3 vyplývá, že diskrétní časová funkce $x(kT)$ je originál. V souladu s definičním vzorcem Z-transformace, obraz je dán součtem nekonečné řady, kde u mocniny z^{-k} je odpovídající pořadnice diskrétní časové funkce $x(kT)$.

$$\begin{aligned}
 X(z) &= Z\{x(kT)\} = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots = \\
 &= 2z^0 + 0z^{-1} + 3z^{-2} - 1z^{-3} - 2z^{-4} + 1z^{-5} = \\
 &= 2 + 3z^{-2} - z^{-3} - 2z^{-4} + z^{-5}
 \end{aligned}$$

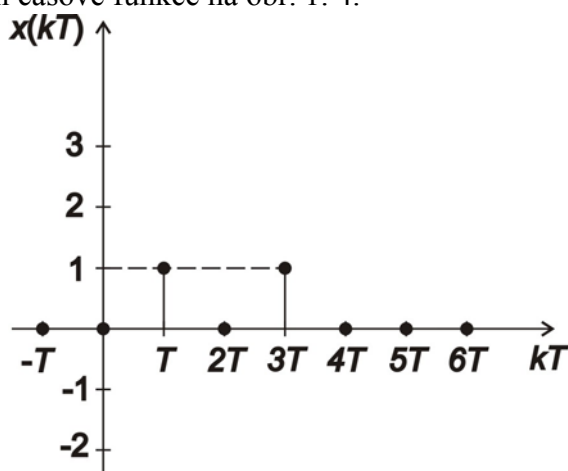
Nyní zapíšeme získaný obraz $X(z)$ v kladných mocninách komplexní proměnné z a získáme

$$X(z) = \frac{2z^5 + 3z^3 - z^2 - 2z + 1}{z^5}$$

Při srovnání průběhů $x(kT)$ a obrazu $X(z)$ v kladných mocninách komplexní proměnné z zjistíme, že diskrétní časové funkci trvající r kroků (v našem případě $r = 5$) odpovídá obraz, který má r -násobný nulový pól, tzn. $z_1 = z_2 = \dots = z_r = 0$.

Příklad 1.2

Určete obraz diskretní časové funkce na obr. 1. 4.



Obr. 1. 4 Diskretní časová funkce – příklad 1.2

Řešení:

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = 0z^0 + 1z^{-1} + 0z^{-2} + 1z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} \dots = z^{-1} + z^{-3}$$

Jak je vidět z obou předchozích příkladů, nalezení obrazu, když známe časové pořadnice v jednotlivých diskretních časových okamžicích je velmi jednoduché.

Příklad 1.3

Pomocí přímé Z-transformace určete obrazy diskretních časových funkcí:

1. $\delta(kT)$
2. $\eta(kT)$

Řešení:

1. Diskretní Diracův impuls je definován vztahy

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$Z\{\delta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) z^{-k} = 1$$

Z-obraz diskretního Diracova impulsu je roven 1.

2. Dle vztahu (1. 7) píšeme

$$Z\{\eta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Výraz vynásobíme z^{-1} .

$$z^{-1} Z\{\eta(kT)\} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

Oba předešlé vztahy odečteme a získáme

$$Z\{\eta(kT)\} - z^{-1} Z\{\eta(kT)\} = 1$$

Po úpravě je Z-obraz diskretního Heavisideova skoku:

$$Z\{\eta(kT)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$\eta(kT) \triangleq \frac{z}{z-1}$$

Příklad 1.4

Stanovte originál $x(kT)$ k funkci $X(z) = \frac{z(3z+4)}{(z+2)(z+3)(z+4)}$.

Řešení:

Funkci $X(z)$ upravíme tak, že jí vydělíme z .

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{3z+4}{(z+2)(z+3)(z+4)}$$

Nyní lze provést rozklad pravé strany na parciální zlomky a dosazovací metodou dopočítat koeficienty A , B a C parciálních zlomků.

$$\begin{aligned} \frac{3z+4}{(z+2)(z+3)(z+4)} &= \frac{A}{(z+2)} + \frac{B}{(z+3)} + \frac{C}{(z+4)} \\ 3z+4 &= A(z+3)(z+4) + B(z+2)(z+4) + C(z+2)(z+3) \end{aligned}$$

Za z dosadíme

$$z = -2: \quad -2 = 2A \Rightarrow A = -1$$

$$z = -4: \quad -8 = 2C \Rightarrow C = -4$$

$$z = -3: \quad -5 = -B \Rightarrow B = 5$$

Po dosazení a úpravě získáme obraz funkce ve tvaru

$$X(z) = -\frac{z}{(z+2)} + \frac{5z}{(z+3)} - \frac{4z}{(z+4)}$$

Pomocí slovníku L a Z -transformace z tab. 1. 2 provedeme zpětnou Z -transformaci podle vztahu

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z \pm a}\right\} = (\mp a)^k; \quad a \neq 0$$

A získáme originál k $X(z)$

$$x(kT) = -(-2)^k + 5(-3)^k - 4(-4)^k$$

Dostali jsme řešení v tzv. uzavřeném tvaru. Hodnotu $x(kT)$ můžeme dopočítat pro libovolně velké k .

Příklad 1.5

Stanovte originál $x(kT)$ k funkci $X(z) = \frac{z-3}{z^2-z+2}$.

Řešení:

Provedeme dělení mnohočlenů.

$$\begin{array}{r}
(z-3) : (z^2 - z + 2) = z^{-1} - 2z^{-2} - 4z^{-3} + 8z^{-5} + \dots \\
\underline{-(z - 1 + 2z^{-1})} \\
0 - 2 - 2z^{-1} \\
\underline{-(-2 + 2z^{-1} - 4z^{-2})} \\
0 - 4z^{-1} + 4z^{-2} \\
\underline{-(-4z^{-1} + 4z^{-2} - 8z^{-3})} \\
0 + 0 + 8z^{-3}
\end{array}$$

Nyní určíme originál k funkci $X(z)$.

$$x(0) = 0$$

$$x(T) = 1$$

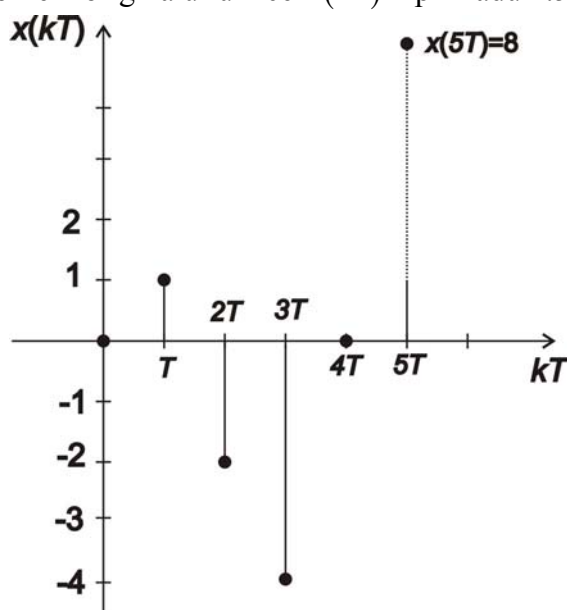
$$x(2T) = -2$$

$$x(3T) = -4$$

$$x(4T) = 0$$

$$x(5T) = 8$$

Toto řešení je v tzv. otevřeném tvaru. Máme omezený počet hodnot originálu $x(kT)$. Na obr. 1. 5 je grafické znázornění originálu funkce $x(kT)$ z příkladu 1.5.



Obr. 1. 5 Grafické znázornění originálu $x(kT)$ z příkladu 1.5

1.4 Vzorkování

Signály získané měřením v reálném prostředí jsou obecně funkce spojitého času a nabývají obvykle nekonečného počtu hodnot ze spojitého intervalu. Nazývají se analogové veličiny nebo analogové signály. Záznam těchto signálů pro jejich zpracování nebo jen prostou reprodukci v číslicových systémech (analýzátorech, číslicových počítačích) nelze uskutečnit bez jejich vzorkování a kvantování. Vzorkování je tedy operace, při které je nahrazen signál se spojitým časem posloupností vzorků [Tůma, 2006].

Pro volbu vzorkovací periody T , resp. vzorkovací frekvence ω_v neexistují přesná pravidla, ale její volba do značné míry může ovlivnit kvalitu a stabilitu diskrétního

regulačního obvodu a jeho vlastnosti [Balátě, 2003]. V následující tabulce jsou vypsány doporučené hodnoty vzorkovací periody pro různá nasazení [Vítečková, Víteček, 2006].

Tab. 1. 3 Doporučené vzorkovací periody T pro různá nasazení

Vzorkovací perioda T	Proces
$(10 - 500) \mu s$	přesné řízení a modelování, elektrické systémy, energetické systémy, přesné řídící roboty
$(0,5 - 20) \mu s$	stabilizace výkonových systémů, letové simulátory, trenažéry
$(10 - 100) ms$	zpracování obrazů, virtuální realita, umělé vidění
$(0,5 - 1) s$	monitorování a řízení objektů, chemické procesy, elektrárny
$(1 - 3) s$	regulace průtoků
$(1 - 5) s$	regulace tlaku
$(5 - 10) s$	regulace hladiny
$(10 - 20) s$	regulace teploty

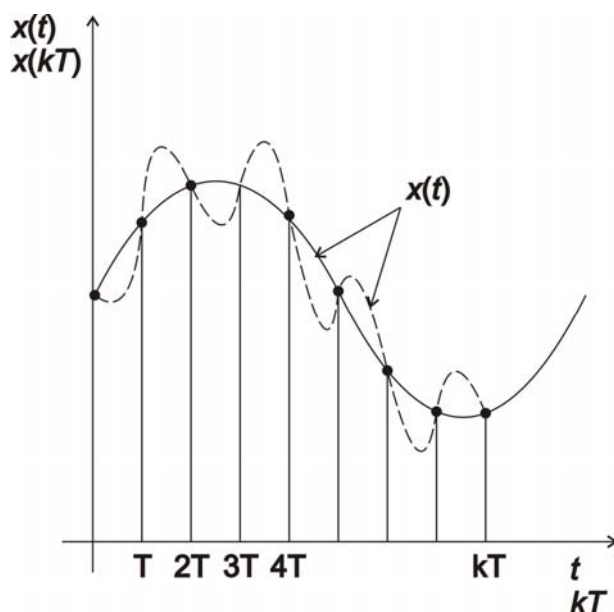
Jak je vidět na obr. 1. 6 diskretní časové funkci $x(kT)$ odpovídá nekonečně mnoho spojitých funkcí $x(t)$.

Dle Shannonova–Kotelnikova teorému je pro dokonalou reprodukci spojitého signálu při převodu z číslicového tvaru nutné, aby vzorkovací frekvence ω_v byla minimálně dvakrát větší než maximální frekvence ve spektru měřeného signálu ω_m jak je uvedeno v rovnici (1. 13).

$$\omega_v \geq 2\omega_m; \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_m} \quad (1. 13)$$

Diskretní časovou funkci $x(kT)$ ze spojitě časové funkce $x(t)$ získáme nahrazením spojitěho času t diskretním časem kT .

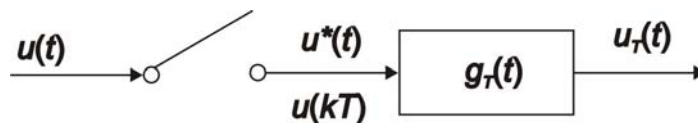
$$t = t_k = kT; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1. 14)$$



Obr. 1. 6 Diskretní časová funkce a jí odpovídající různé spojitě časové funkce

1.4.1 Vzorkovač a tvarovač

Tvarovač a vzorkovač (obr. 1. 7) převádějí spojité signál $u(t)$ na tvarovaný signál $u_T(t)$ v podobě schodovité časové funkce na obr. 1. 2.



Obr. 1. 7 Schéma δ -vzorkovače a tvarovače

Tvarovač tohoto typu se označuje jako tvarovač nultého řádu.

Tvarovaný signál $u_T(t)$ v k -tém intervalu je pomocí posunutých Heavisideových skoků dán vztahem [Víteček, 1988]

$$u_T(t) = u(kT) \{ \eta(t - kT) - \eta[t - (k+1)T] \} \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (1.15)$$

Jak je vidět na obr. 1. 2 celý tento výraz vyjadřuje obdélník s výškou $u(kT)$ a šířkou T . Tvarovaný signál $u_T(t)$ pro $t \in (-\infty, 0)$ je dán vztahem

$$u_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \{ \eta(t - kT) - \eta[t - (k+1)T] \} \quad (1.16)$$

Po provedení Laplaceovy transformace vztahu (1. 16) získáme obraz tvarovaného signálu

$$U_T(s) = L\{u_T(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \left[\frac{1}{s} e^{-kTs} - \frac{1}{s} e^{-(k+1)Ts} \right] = \underbrace{\frac{1 - e^{-Ts}}{s}}_{\text{tvarování}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTs}}_{\text{vzorkování}} \quad (1.17)$$

resp.

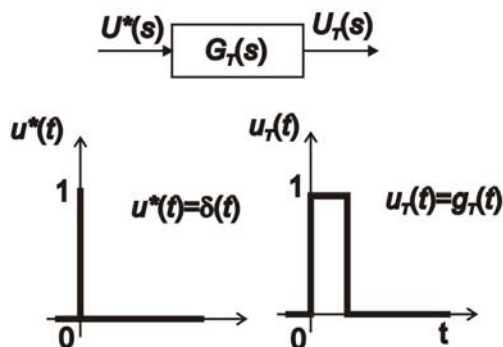
$$U_T(s) = G_T(s) \cdot U^*(s) \quad (1.18)$$

$$G_T(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (1.19)$$

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTs} \quad (1.20)$$

Z předešlých vztahů je tedy viditelné, že samotný převod spojitěho signálu $u(t)$ na tvarovaný $u_T(t)$ se dá rozdělit na vzorkování a následné tvarování. Vlastnosti tvarovače se dají popsat jeho přenosem (1. 19) a z tohoto přenosu se dá získat impulsní funkce.

$$g_T(t) = L^{-1}\{G_T(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right\} = \eta(t) - \eta(t - T) \quad (1.21)$$



Obr. 1. 8 Impulsní charakteristika tvarovače

Impulsní funkce $g_T(t)$ je tedy pravoúhlý impuls s jednotkovou výškou a šířkou T .

Ideálním vzorkováním spojitého signálu $u(t)$ získáme $u^*(t)$, který získáme zpětnou Laplaceovou transformací obrazu $U^*(s)$ daného vztahem (1. 20).

$$u^*(t) = L^{-1}\{U^*(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT) \quad (1. 22)$$

V souladu s vlastnostmi Diracových impulsů můžeme psát

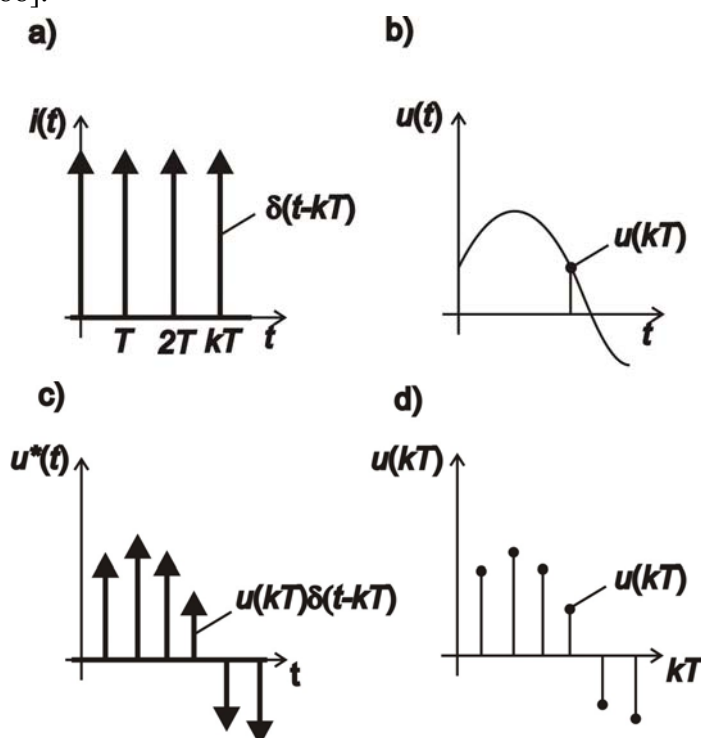
$$u^*(t) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = u(t) \cdot i(t) \quad (1. 23)$$

kde

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1. 24)$$

Ze vztahu (1. 24) je vidět, že ideálně vzorkovaný signál $u^*(t)$ lze brát jako posloupnost Diracových impulsů $i(t)$ modulovanou spojitým signálem $u(t)$. Dle toho tedy můžeme říct, že vzorkovač, který převádí spojitý signál $u(t)$ na signál vzorkovaný $u^*(t)$ je jakousi fyzikálně realizovatelnou matematickou fikcí a proto jej nazýváme δ -vzorkovačem.

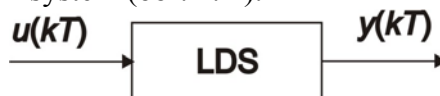
Reálný vzorkovač si většinou představujeme ve formě A/Č převodníku. Pro jednoduchost většinou δ -vzorkovač od reálného vzorkovače nerozlišujeme. Mluvíme tedy pouze o vzorkovači, na jehož výstupu je vzorkovaný signál $u^*(t)$ nebo diskretní signál $u(kT)$ [Víteček, 1988].



Obr. 1. 9 Vzorkování a časová diskretizace signálu: a) posloupnost Diracových impulsů, b) spojitý signál, c) vzorkovaný signál, d) diskretní signál

2 Matematické modely

Uvažujme lineární diskretní systém (obr. 2. 1).



Obr. 2. 1 Lineární diskretní systém

Stejně jak u spojitého systému tak i u diskretních systémů existuje několik možností způsobu vnějšího popisu chování, které vyjadřují vztah mezi výstupní veličinou $y(kT)$ a diskretní vstupní veličinou $u(kT)$. Vnitřní popis chování diskretního systému obsahuje kromě uvedených veličin i diskretní stavové veličiny.

2.1 Popis v časové oblasti – diferenční rovnice systému

Pro popis vlastností dynamického systému v časové oblasti může sloužit diferenční rovnice v normálním tvaru s počátečními podmínkami.

$$\begin{aligned} a_n y[(k+n)T] + \dots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) &= \\ = b_m u[(k+m)T] + \dots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT) & \quad (2.1) \\ y(0), y(T), \dots, y[(n-1)T]; \quad u(0), u(T), \dots, u[(m-1)T] \end{aligned}$$

Klidový ustálený stav (jestliže existuje) je popsán vztahy

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} u(kT) &= u \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT) &= y \end{aligned} \quad (2.2)$$

tj. pro $k \rightarrow \infty$ platí

$$\begin{aligned} y[(k+n)T] &= \dots = y[(k+1)T] = y(kT) = y \\ u[(k+m)T] &= \dots = u[(k+1)T] = u(kT) = u \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} y &= \frac{b_m + \dots + b_1 + b_0}{a_n + \dots + a_1 + a_0} u; & \sum_{i=0}^n a_i &\neq 0 \\ y &= k_1 u; & k_1 &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{\sum_{i=0}^n a_i} \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde k_1 je koeficient přenosu.

Diferenční rovnice (2. 1) je lineární, její koeficienty jsou konstantní, hovoříme tedy o stacionárním diskretním lineárním dynamickém systému.

Statická charakteristika, tedy závislost výstupní veličiny na vstupní veličině v ustáleném stavu je popsána vztahem (2. 3).

Pokud má diferenční rovnice (2. 1) popisovat reálný dynamický systém musí být splněny podmínky fyzikální realizovatelnosti.

$$\begin{aligned} n > m & \quad \text{Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti} \\ n = m & \quad \text{Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti} \\ n < m & \quad \text{Fyzikálně nerealizovatelný systém} \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2 Popis v oblasti komplexní proměnné – diskrétní přenos

Po Z-transformaci diferenční rovnice (2. 1) získáme přenos ve tvaru podílu Z-obrazu (1. 1) výstupního signálu $y(kT)$ k Z-obrazu vstupního signálu $u(kT)$ při nulových počátečních podmínkách.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (2. 5)$$

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$y = \left[\lim_{z \rightarrow 1} G(z) \right] u = \frac{b_m + \dots + b_1 + b_0}{a_n + \dots + a_1 + a_0} u = k_1 u \quad (2. 6)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \neq 0$$

Jmenovatel přenosu $G(z)$ je charakteristický mnohočlen diskrétního lineárního dynamického systému.

$$N(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (2. 7)$$

kde $z_1, z_2, \dots, z_n$ jsou kořeny charakteristické rovnice.

$$N(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (2. 8)$$

které nazýváme póly přenosu $G(z)$.

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2. 4).

2.3 Popis v kmitočtové oblasti

Pro popis systému je možno také užít diskrétní kmitočtový přenos

$$G(e^{jT\omega}) = G(z); \quad z = e^{jT\omega}$$

$$G(e^{jT\omega}) = \frac{b_m e^{jmT\omega} + \dots + b_1 e^{jT\omega} + b_0}{a_n e^{jnT\omega} + \dots + a_1 e^{jT\omega} + a_0} \quad (2. 9)$$

který se používá pro kmitočty

$$0 \leq \omega \leq \frac{T}{2}$$

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$y = \left[\lim_{\omega \rightarrow 0} G(e^{jT\omega}) \right] u = \frac{b_m + \dots + b_1 + b_0}{a_n + \dots + a_1 + a_0} u = k_1 u \quad (2. 10)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \neq 0$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2. 4).

2.4 Popis v časové oblasti – přechodová funkce

Přechodová funkce je odezva dynamického systému na vstupní veličinu ve tvaru Heavisideova jednotkového skoku $\eta(kT)$.

Z-obraz diskrétního jednotkového Heavisideova skoku je

$$U(z) = Z\{\eta(kT)\} = \frac{z}{z-1} \quad (2. 11)$$

Diskrétní přechodová funkce tedy bude mít tvar

$$H(z) = G(z) \frac{z}{z-1} \quad (2.12)$$

Originál je dán vztahem

$$h(kT) = Z^{-1} \left\{ G(z) \frac{z}{z-1} \right\} \quad (2.13)$$

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

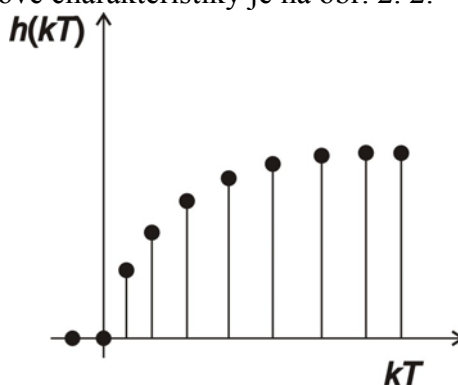
$$y = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} h(kT) \right] u = \left[\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} H(z) \right] u = \frac{b_m + \dots + b_1 + b_0}{a_n + \dots + a_1 + a_0} u = k_1 u \quad (2.14)$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou tedy

$h(0) = 0$ Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti

$h(0) \neq 0$ Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti

Příklad diskretní přechodové charakteristiky je na obr. 2. 2.



Obr. 2. 2 Diskrétní přechodová charakteristika

2.5 Popis v časové oblasti – impulsní funkce

Diskrétní impulsní funkce $g(kT)$ je odezva dynamického systému na diskretní jednotkový Diracův impuls $\delta(kT)$. Z-obraz diskretního jednotkového Diracova impulsu je

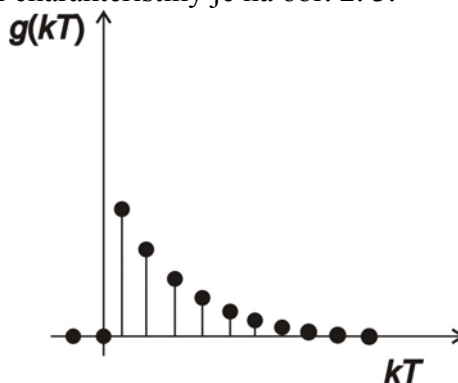
$$Z\{\delta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) z^{-k} = 1 \quad (2.15)$$

$$\delta(kT) \triangleq 1$$

Diskrétní impulsní funkce je definovaná vztahem

$$g(kT) = Z^{-1}\{G(z)\} \quad (2.16)$$

Příklad diskretní impulsní charakteristiky je na obr. 2. 3.



Obr. 2. 3 Diskrétní impulsní charakteristika

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$y = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k g(iT) \right] u = \frac{b_m + \dots + b_1 + b_0}{a_n + \dots + a_1 + a_0} u = k_1 u \quad (2.17)$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou tedy

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 && \text{Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti} \\ g(0) &\neq 0 && \text{Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti} \end{aligned}$$

2.6 Vztah mezi přechodovou a impulsní funkcí

Stejně jako u spojitých systémů, také u diskrétních systémů existuje spojitost mezi přechodovou a impulsní funkcí.

Ze vztahu pro obraz přechodové funkce (2. 18) vypočteme obraz impulsní funkce (2. 19)

$$H(z) = \frac{z}{z-1} G(z) \quad (2.18)$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} H(z) \quad (2.19)$$

Použitím vlastností Z-transformace z tab. 1. 1 dostaneme vztahy (2. 20) a (2. 21). Impulsní funkce je tedy dána zpětnou diferencí přechodové funkce (2. 20), přechodovou funkci získáme sumací impulsní funkce (2. 21).

$$g(kT) = \nabla h(kT) = h(kT) - h[(k-1)T] \quad (2.20)$$

$$h(kT) = \sum_{i=0}^k g(iT) \quad (2.21)$$

2.7 Stavový popis

Stavový model pro diskrétní lineární dynamický systém má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}u(kT) && \text{stavová rovnice} \\ y(kT) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(kT) + du(kT) && \text{výstupní rovnice} \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde

$\mathbf{A}$ – matice systému (stavová matice systému), rozměr (n x n),

$\mathbf{b}$ – vektor řízení (stavový vektor řízení), rozměr (n x 1),

$\mathbf{c}$ – výstupní vektor (výstupní vektor systému), rozměr (n x 1),

d – vektor převodu (výstupní vektor řízení), rozměr (1 x 1).

Statická charakteristika (jestliže existuje) je pospána vztahem

$$y = \left[\mathbf{c}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \right] u \quad (2.23)$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou tedy

$$\begin{aligned} d &= 0 && \text{Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti} \\ d &\neq 0 && \text{Slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti} \end{aligned}$$

Máme-li diskrétní systém pospaný vnějším popisem, resp. diferenční rovnicí (2. 24) nebo diskrétním obrazovým přenosem $G(z)$ (2. 25)

$$\begin{aligned} a_n y[(k+n)T] + \dots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) &= \\ = b_m u[(k+m)T] + \dots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (2.25)$$

je možno jej převést na vnitřní popis, resp. stavový popis a to několika metodami a to např. [Noskievič, 1992]:

- metodou postupné integrace,
- metodou snižování řádu derivace,
- rozkladem přenosu na dílčí přenosy.

Tak jako je možno vnější popis systému, resp. obrazový přenos $G(z)$ převádět na vnitřní popis, resp. stavový popis, existuje i možnost zpětné operace, tedy převodu ze stavového popisu na obrazový přenos (2.26).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (2.26)$$

2.8 Dělení diskrétních dynamických systémů

Diskrétní dynamické systémy lze rozdělit na tři typy těchto systémů a to P (proporcionální), S (sumační) a D (diferenční). Typ systémů lze určit ze statické charakteristiky, obrazového přenosu $G(z)$ a průběhu přechodové charakteristiky $h(kT)$.

Pro připomenutí může být uvedeno, že statická charakteristika je závislost výstupní veličiny y na vstupní veličině u v ustáleném stavu.

2.8.1 Proporcionální dynamický systém

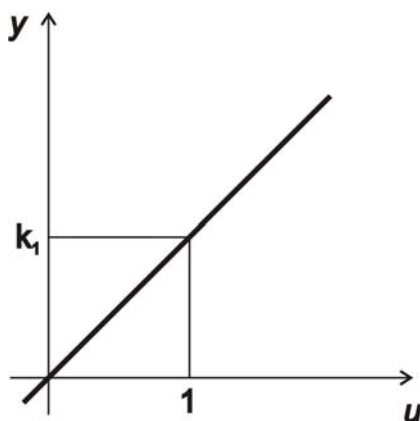
Statická charakteristika

V případě proporcionálního systému statická charakteristika **existuje** (obr. 2.4) a je definovaná

$$y = k_1 u \quad (2.27)$$

kde

$$k_1 = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{\sum_{i=0}^n a_i}; \quad \sum_{j=0}^m b_j \neq 0, \quad \sum_{i=0}^n a_i \neq 0 \quad (2.28)$$



Obr. 2.4 Statická charakteristika proporcionálního dynamického systému

Obrazový přenos

Při určování typu systému vycházíme z obrazového přenosu $G(z)$ (2. 29).

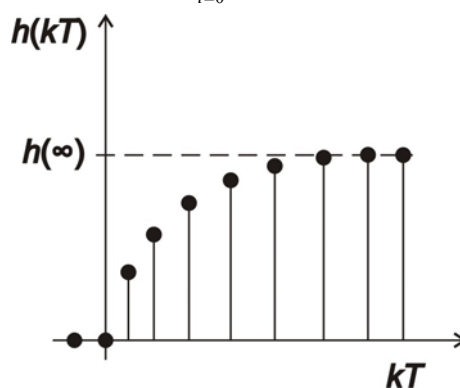
$$G(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (2. 29)$$

O proporcionální dynamický systém se jedná v případě, že nelze z čitatele ani jmenovatele vytknout výraz $(1 - z^{-1})$, popř. $(z - 1)$.

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika proporcionálního dynamického systému se ustálí na nenulové konečné hodnotě, resp.

$$h(\infty) = k_1 = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{\sum_{i=0}^n a_i} \quad (2. 30)$$



Obr. 2. 5 Přechodová charakteristika proporcionálního dynamického systému

2.8.2 Sumační dynamický systém**Statická charakteristika**

V případě sumačního dynamického systému statická charakteristika **neexistuje**, protože platí

$$k_1 = \infty \quad (2. 31)$$

$$k_1 = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{\sum_{i=0}^n a_i}; \quad \sum_{j=0}^m b_j \neq 0, \sum_{i=0}^n a_i = 0 \quad (2. 32)$$

Obrazový přenos

Při určování typu systému opět vycházíme z obrazového přenosu $G(z)$ (2. 33).

$$G(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (2. 33)$$

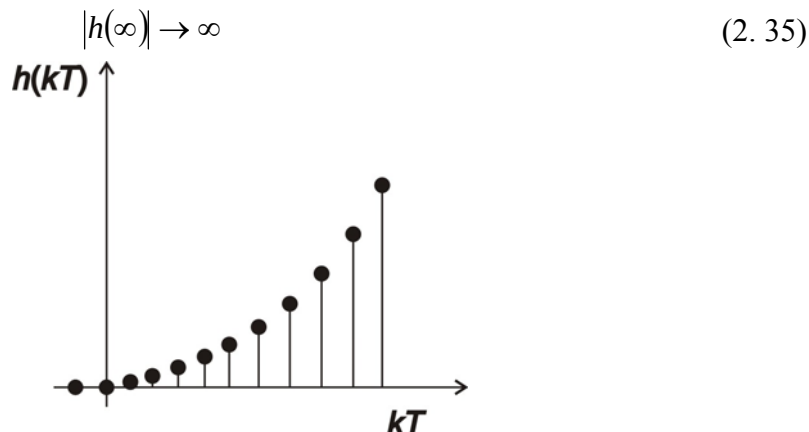
O sumační dynamický systém se jedná v případě, že lze ve jmenovateli vytknout výraz $(1 - z^{-1})$, popř. $(z - 1)$, tedy

$$G(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{(z-1)^q (a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0)} \quad (2.34)$$

kde q je řád sumace.

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika sumačního dynamického systému se neustálí, resp.



Obr. 2. 6 Přechodová charakteristika sumačního dynamického systému

2.8.3 Diferenční dynamický systém

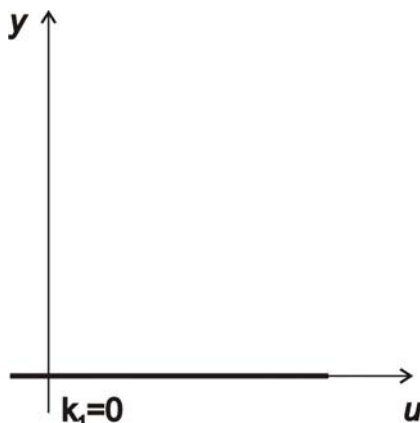
Statická charakteristika

V případě diferenčního systému statická charakteristika **existuje**, ale je triviální a je rovna

$$y = 0 \quad (2.36)$$

protože platí

$$k_1 = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{\sum_{i=0}^n a_i}; \quad \sum_{j=0}^m b_j = 0, \sum_{i=0}^n a_i \neq 0 \quad (2.37)$$



Obr. 2. 7 Statická charakteristika diferenčního dynamického systému

Obrazový přenos

Při určování typu systému opět vycházíme z obrazového přenosu $G(z)$ (2. 38).

$$G(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (2. 38)$$

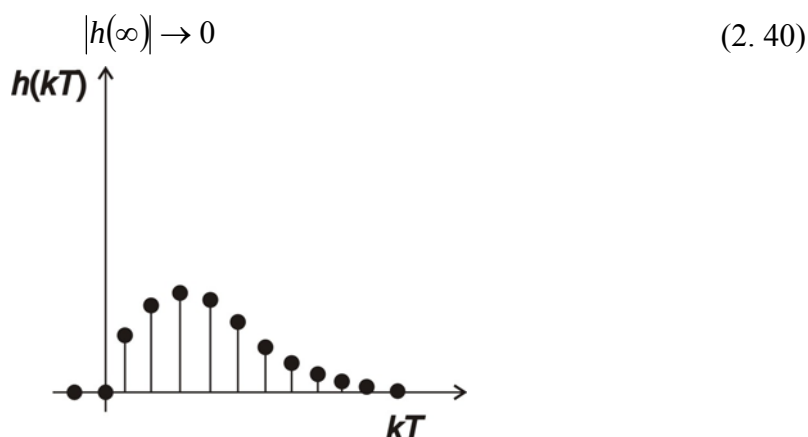
O diferenční dynamický systém se jedná v případě, že lze v čitateli vytknout výraz $(1 - z^{-1})$, popř. $(z - 1)$, tedy

$$G(z) = \frac{(z - 1)^r (b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0)}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (2. 39)$$

kde r je řád difference.

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika diferenčního dynamického systému se ustálí na hodnotě 0, tj.



Obr. 2. 8 Přechodová charakteristika diferenčního dynamického systému

2.9 Matematické modely – řešené příklady**Příklad 2.1**

Pro systém popsaný diferenční rovnicí

$$y[(k + 2)T] + 0,7y[(k + 1)T] + 0,1y(kT) = u[(k + 1)T] - u(kT)$$

s nulovými počátečními podmínkami $u(0) = 0$, $y(0) = y(T) = 0$ určete:

- obrazový přenos,
- přechodovou funkci v uzavřeném tvaru,
- impulsní funkci,
- vykreslete impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot,
- o jaký typ dynamického systému se jedná a jeho fyzikální realizovatelnost.

Řešení:

- ad a) Určíme obrazový přenos:

$$z^2 Y(z) + 0,7z Y(z) + 0,1Y(z) = zU(z) - U(z)$$

$$Y(z)(z^2 + 0,7z + 0,1) = U(z)(z - 1)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 1}{z^2 + 0,7z + 0,1}$$

$m = 1, n = 2 \Rightarrow n > m \Rightarrow$ je splněná silná podmínka fyzikální realizovatelnosti.

- ad b) Pro výpočet diskrétní přechodové funkce použijeme vztah (2. 13):

$$h(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} G(z) \right\}$$

$$h(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z^2 + 0,7z + 0,1} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z^2 + 0,7z + 0,1} \right\}$$

Obraz přechodové funkce rozdělíme na parciální zlomky. Kořeny jmenovatele jmenovatele jsou $z_1 = -0,2$ a $z_2 = -0,5$.

Nyní lze provést rozklad na parciální zlomky a dosazovací metodou dopočítat koeficienty A, B parciálních zlomků:

$$\frac{z}{z^2 + 0,7z + 0,1} = \frac{A}{z + 0,2} + \frac{B}{z + 0,5}$$

$$z = A(z + 0,5) + B(z + 0,2)$$

Za z dosadíme

$$z_1 = -0,5: \quad -0,5 = -0,3B \Rightarrow B = \frac{5}{3}$$

$$z_2 = -0,2: \quad -0,2 = 0,3A \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

V souladu s tab. 1. 2 můžeme psát

$$h(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{-\frac{2}{3}}{(z + 0,2)} + \frac{\frac{5}{3}}{(z + 0,5)} \right\} = -\frac{2}{3} \binom{k-1}{0} (-0,2)^{k-1} + \frac{5}{3} \binom{k-1}{0} (-0,5)^{k-1} =$$

$$= -\frac{2}{3} (-0,2)^{k-1} \eta[(k-1)T] + \frac{5}{3} (-0,5)^{k-1} \eta[(k-1)T] = -\frac{2}{3} (-0,2)^{k-1} + \frac{5}{3} (-0,5)^{k-1}$$

pro $k \geq 1$ a 0 pro $k < 1$.

Nyní vypočteme prvních pět hodnot přechodové charakteristiky:

$$h(0) = 0$$

$$h(T) = 1$$

$$h(2T) = -\frac{2}{3} (-0,2) + \frac{5}{3} (-0,5) = -0,7$$

$$h(3T) = -\frac{2}{3} (-0,2)^2 + \frac{5}{3} (-0,5)^2 = 0,39$$

$$h(kT) = h(4T) = -\frac{2}{3} (-0,2)^3 + \frac{5}{3} (-0,5)^3 = -0,203 \doteq -0,2$$

- ad c) Nyní vypočteme prvních pět bodů impulsní charakteristiky s použitím vztahu (2. 20):

$$g(kT) = h(kT) - h[(k-1)T]$$

$$g(0) = 0$$

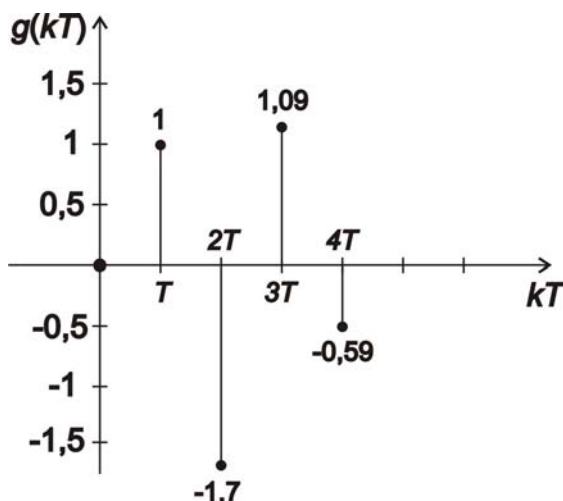
$$g(T) = 1 - 0 = 1$$

$$g(2T) = -0,7 - 1 = -1,7$$

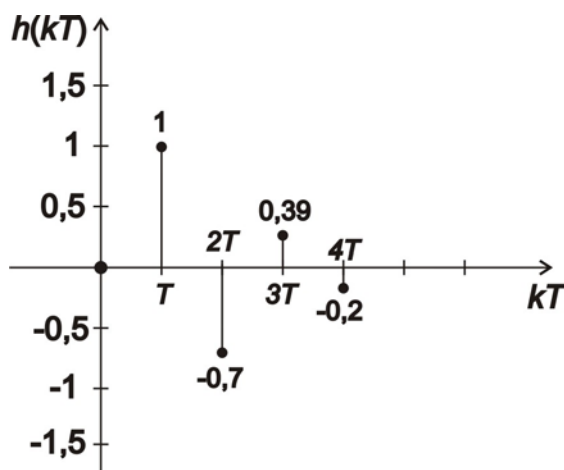
$$g(3T) = 0,39 + 0,7 = 1,09$$

$$g(4T) = -0,2 - 0,39 = -0,59$$

- ad d) Dle předešlých výpočtů vykreslíme impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot:



Obr. 2. 9 Impulsní charakteristika z příkladu 2.1



Obr. 2. 10 Přechodová charakteristika z příkladu 2.1

- ad e) Nyní určíme typ dynamického systému a jeho fyzikální realizovatelnost:

$$k_1 = h(\infty) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{\sum_{i=0}^n a_i} = \frac{1-1}{1+0,7+0,1} = 0$$

Přechodová charakteristika se ustálí v hodnotě 0, z toho vyplývá, že se jedná o diferenční dynamický systém.

Dále je možno říci, že je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti, neboť pro obě charakteristiky platí $h(0) = 0, g(0) = 0$.

Příklad 2.2

Pro systém pospaný diferenční rovnicí

$$y(kT) + 0,5y[(k-1)T] = u(kT) + 2u[(k-1)T]$$

s nulovými počátečními podmínkami určete:

- obrazový přenos,
- přechodovou funkci,
- impulsní funkci v uzavřeném tvaru,

- d) vykreslete impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot,
 e) o jaký typ dynamického systému se jedná a jeho fyzikální realizovatelnost.

Řešení:

- ad a) Určíme obrazový přenos:

$$Y(z) + 0,5z^{-1}Y(z) = U(z) + 2z^{-1}U(z) \quad /(\cdot z)$$

$$zY(z) + 0,5Y(z) = zU(z) + 2U(z)$$

$$Y(z)(z + 0,5) = U(z)(z + 2)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 2}{z + 0,5}$$

$m = 1, n = 1 \Rightarrow n = m \Rightarrow$ je splněná slabá podmínka fyzikální realizovatelnosti.

Vzhledem k požadavku bodu c) v zadání o uzavřeném tvaru impulsní funkce, vypočítáme nejprve tento bod.

- ad c) Určíme impulsní funkci v uzavřeném tvaru:

$$g(kT) = Z^{-1}\{G(z)\}$$

$$g(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z + 2}{z + 0,5}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z + 0,5} + \frac{2}{z + 0,5}\right\}$$

$$g(kT) = (-0,5)^k + 2\binom{k-1}{0}(-0,5)^{k-1} = (-0,5)^k + 2(-0,5)^{k-1} \eta[(k-1)T]$$

Nyní vypočteme prvních pět bodů impulsní charakteristiky:

$$g(0) = 1$$

$$g(T) = -0,5 + 2 = 1,5$$

$$g(2T) = 0,25 - 1 = -0,75$$

$$g(3T) = -0,125 + 0,5 = 0,375 \doteq 0,38$$

$$g(4T) = 0,0625 - 0,25 = -0,1875 \doteq -0,19$$

- ad b) S využitím vztahu (2. 21) dopočítáme hodnoty diskretní přechodové funkce:

$$h(kT) = \sum_{i=0}^k g(iT)$$

$$h(0) = 1$$

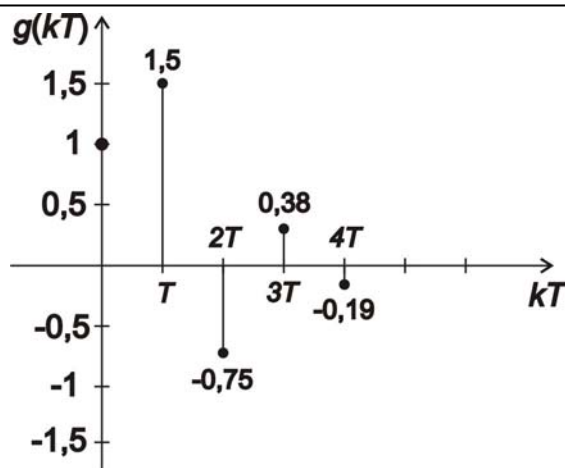
$$h(T) = 1 + 1,5 = 2,5$$

$$h(2T) = 2,5 - 0,75 = 1,75$$

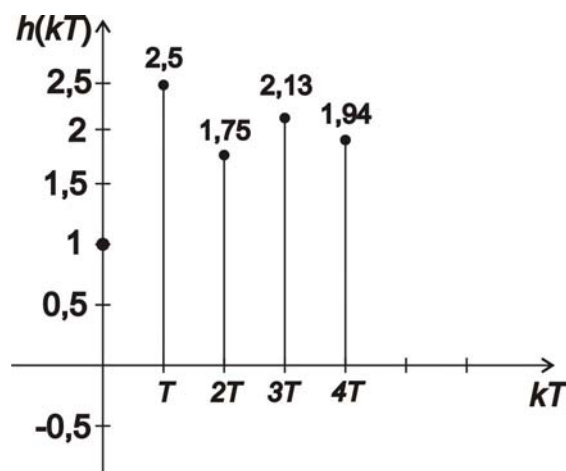
$$h(3T) = 1,75 + 0,38 = 2,13$$

$$h(4T) = 2,13 + (-0,19) = 1,94$$

- ad d) Dle předešlých výpočtů vykreslíme impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot:



Obr. 2.11 Impulsní charakteristika z příkladu 2.2



Obr. 2.12 Přechodová charakteristika z příkladu 2.2

- ad e) Nyní určíme typ dynamického systému a jeho fyzikální realizovatelnost:

$$k_1 = h(\infty) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{\sum_{i=0}^n a_i} = \frac{1 + 2}{1 + 0,5} = \frac{3}{1,5} = 2$$

Přechodová charakteristika se ustálí na hodnotě 2, z toho vyplývá, že se jedná o proporcionální dynamický systém.

Dynamický systém splňuje slabou podmínku fyzikální realizovatelnosti, neboť obě charakteristiky nezačínají v počátku souřadnicového systému a dále platí $n = m = 1$.

Příklad 2.3

Pro systém pospaný obrazovým přenosem $G(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 1}$ určete:

- impulsní funkci,
- přechodovou funkci,
- vykreslete impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot,
- určete podmínky fyzikální realizovatelnosti a o jaký typ dynamického systému se jedná.

Řešení:

Převédeme obrazový přenos na diferenční rovnici.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 + 2z + 1}$$

$$Y(z)(z^2 + 2z + 1) = zU(z)$$

$$z^2 Y(z) + 2z Y(z) + Y(z) = zU(z)$$

$$y[(k+2)T] + 2y[(k+1)T] + y(kT) = u[(k+1)T]$$

$$y[(k+2)T] = u[(k+1)T] - 2y[(k+1)T] - y(kT)$$

$$u(kT) = \delta(kT) \Rightarrow y(kT) = g(kT)$$

$$g[(k+2)T] = \delta[(k+1)T] - 2g[(k+1)T] - g(kT)$$

- ad a) Určíme hodnoty diskretní impulsní funkce:

$$k = -2 \quad g(0) = 0$$

$$k = -1 \quad g(T) = \delta(0) - 2g(0) - g(-T) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$k = 0 \quad g(2T) = \delta(T) - 2g(T) - g(0) = 0 - 2 - 0 = -2$$

$$k = 1 \quad g(3T) = \delta(2T) - 2g(2T) - g(T) = 0 + 4 - 1 = 3$$

$$k = 2 \quad g(4T) = \delta(3T) - 2g(3T) - g(2T) = 0 - 6 + 2 = -4$$

- ad b) Pro určení hodnot diskretní přechodové použijeme vztah (2. 21):

$$h(kT) = \sum_{i=0}^k g(iT)$$

$$h(0) = 0$$

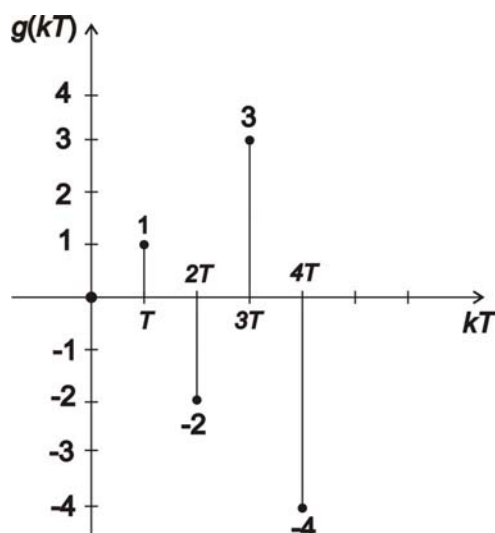
$$h(T) = 0 + 1 = 1$$

$$h(2T) = 1 - 2 = -1$$

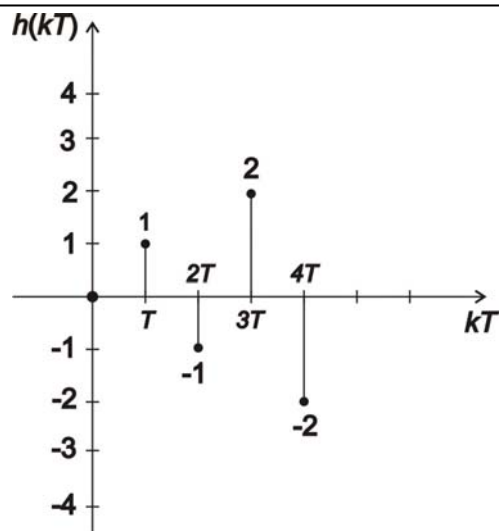
$$h(3T) = -1 + 3 = 2$$

$$h(4T) = 2 - 4 = -2$$

- ad c) Dle předešlých výpočtů vykreslíme impulsní a přechodovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot:



Obr. 2. 13 Impulsní charakteristika z příkladu 2.3



Obr. 2. 14 Přejchodová charakteristika z příkladu 2.3

Z průběhu $g(kT)$ a $h(kT)$ vidíme, že tento dynamický systém je nestabilní.

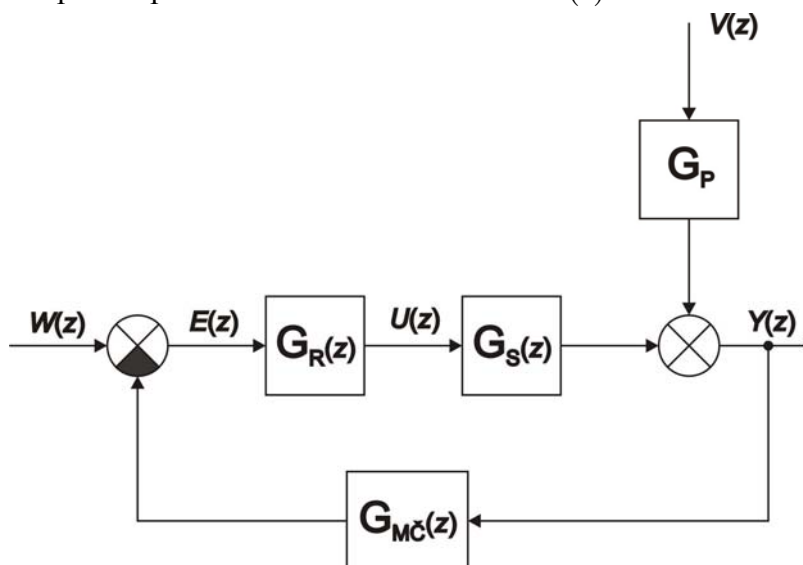
- ad e) Nyní určíme typ dynamického systému a jeho fyzikální realizovatelnost:

Protože se jedná o nestabilní systém, jeho typ určíme z přenosu $G(z)$. Ani v čitateli, ani ve jmenovateli přenosu nelze vytknout dvojčlen $(z - 1)$, proto se jedná o proporcionální dynamický systém.

Je splněna silná podmínka fyzikální realizovatelnosti, neboť obě charakteristiky začínají v počátku souřadnicového systému a dále platí $n = 2$ a $m = 1$.

3 Lineární diskrétní regulační obvod a jeho základní přenosy

Regulační pochod probíhá v regulačním obvodu. Regulační obvod se skládá z regulátoru a regulované soustavy (obr. 3. 1), kde $G_R(z)$ je přenos regulátoru, $G_S(z)$ přenos regulované soustavy, $G_{MČ}(z)$ přenos měřicího členu a $G_P(z)$ je přenos, přes který na regulační obvod působí poruchová veličina s obrazem $V(z)$.



Obr. 3. 1 Regulační obvod

Výstupem regulačního obvodu je obraz regulované veličiny $Y(z)$, vstupními veličinami jsou obraz poruchové veličiny $V(z)$ a obraz žádané veličiny $W(z)$. V samotném obvodu se vytváří regulační odchylka s obrazem $E(z)$, definovaná jako rozdíl mezi žádanou veličinou $W(z)$ a regulovanou veličinou $Y(z)$ (3. 1).

Cíl regulace se dá vyjádřit dvěma ekvivalentními způsoby, prvním z nich je, aby regulátor snižoval velikost regulační odchylky e (3. 2) a druhým ekvivalentním cílem regulace je, aby se regulovaná veličina y přibližovala žádané veličině w (3. 3) bez ohledu na působení poruchové veličiny v .

$$e = w - y \quad (3. 1)$$

$$e(kT) \rightarrow 0 \triangleq E(z) \rightarrow 0 \quad (3. 2)$$

$$y(kT) \rightarrow w(t) \triangleq Y(z) \rightarrow W(z) \quad (3. 3)$$

Měřicí člen s přenosem $G_{MČ}(z)$ musí měřit přesně a rychle, a proto ve většině případů lze předpokládat, že

$$G_{MČ}(z) \approx 1 \quad (3. 4)$$

Informaci o regulované veličině $Y(z)$ lze získat prostřednictvím měřicího členu, a proto je možné přiřadit ho k regulované soustavě.

Přenos $G_P(z)$ dovoluje umístit působení poruchové veličiny do libovolného bodu regulačního obvodu. Nejčastěji však uvažujeme působení poruchové veličiny na vstupu regulované soustavy a nebo na jejím výstupu.

Z důvodu zjednodušení budeme nadále používat místo přesného označení *obraz veličiny* pouze označení *veličina*.

3.1 Základní přenosy diskrétního regulačního obvodu

Pakliže považujeme za vstupní veličinu regulačního obvodu žádanou veličinu $W(z)$ a za výstupní veličinu regulačního obvodu považujeme regulovanou veličinu $Y(z)$ a uvažujeme-li poruchovou veličinu jako nulovou, tedy $V(z)=0$, dostáváme přenos mezi žádanou veličinou a regulovanou veličinou, který označujeme jako **přenos řízení**

$$G_{wy}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_S(z)G_R(z)}{1 + G_S(z)G_R(z)G_{M\check{C}}(z)} \quad (3.5)$$

Nyní uvažujeme jako vstupní veličinu regulačního obvodu poruchovou veličinu $V(z)$ a výstupní veličinu regulovanou veličinu $Y(z)$. Při úvaze, že žádaná veličina $W(z)$ je rovna nule, tedy $W(z)=0$, dostáváme přenos mezi poruchovou a regulovanou veličinou, který nazýváme **přenos poruchy**

$$G_{vy}(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{G_P(z)}{1 + G_S(z)G_R(z)G_{M\check{C}}(z)} \quad (3.6)$$

Při vyšetřování vlastností regulačních obvodů je nutná znalost obou přenosů, přenosu řízení i poruchy. Alternativní možností popisu vlastností regulačních obvodů je znalost odchylkových přenosů.

Bereme-li vstupní veličinu regulačního obvodu žádanou veličinu $W(z)$ a výstupní veličinu regulačního obvodu regulační odchylku $E(z)$, při poruchové veličině rovné nule, tedy $V(z)=0$, dostaneme přenos mezi žádanou veličinou a regulační odchylkou, kterou nazýváme **odchylkový přenos řízení**

$$G_{we}(z) = \frac{E(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + G_S(z)G_R(z)G_{M\check{C}}(z)} \quad (3.7)$$

Uvažujeme-li jako vstupní veličinu regulačního obvodu poruchovou veličinu $V(z)$ a výstupní veličinu regulační odchylku $E(z)$, za předpokladu, že žádaná veličina je rovna nule, tedy $W(z)=0$, získáme přenos mezi poruchovou veličinou a regulační odchylkou, který nazýváme **odchylkový přenos poruchy**

$$G_{ve}(z) = \frac{E(z)}{V(z)} = \frac{-G_P(z)G_{M\check{C}}(z)}{1 + G_S(z)G_R(z)G_{M\check{C}}(z)} \quad (3.8)$$

Regulátor působí na soustavu tak, aby byly splněny cíle regulace (3. 2) a (3. 3). Pokud známe základní přenosy řízení, lze vypočítat regulovanou veličinu (3. 9) a regulační odchylku (3. 10)

$$Y(z) = G_{wy}(z)W(z) + G_{vy}(z)V(z) \quad (3.9)$$

$$E(z) = G_{we}(z)W(z) + G_{ve}(z)V(z) \quad (3.10)$$

Pro základní přenosy regulačního obvodu musí platit vztahy (3. 11)

$$\begin{aligned} G_{wy}(z) &\rightarrow 1, \\ G_{vy}(z) &\rightarrow 0, \\ G_{we}(z) &\rightarrow 0, \\ G_{ve}(z) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Přenos otevřeného regulačního obvodu (3. 12) je definován jako součin všech členů ve smyčce.

$$G_o(z) = G_S(z)G_R(z)G_{M\check{C}}(z) \quad (3.12)$$

Ve jmenovateli všech základní přenosů se nachází výraz, který rozhoduje o stabilitě regulačního obvodu, označujeme jej jako **charakteristický mnohočlen** (3. 13). Pokud tento mnohočlen položíme roven 0, získáme po úpravě **charakteristickou rovnici** (3. 14) [Švarc, 1992].

$$1 + G_o(z) = 1 + G_s(z)G_R(z)G_{M\check{C}}(z) \quad (3. 13)$$

$$1 + G_o(z) = 0 \Rightarrow N(z) = 0 \quad (3. 14)$$

4 Konvenční typy lineárních diskrétních regulátorů a jejich modifikace

Základní funkcí regulátoru v regulačním obvodu je vytvářet akční veličinu u na základě regulační odchylky $e = w - y$. Akční veličina má za úkol svým působením na regulovanou soustavu v každém časovém okamžiku zajišťovat to, aby byla regulační odchylka co nejmenší bez ohledu na poruchovou veličinu v .

Pro spojitý regulátor P, I, PI, PD, PID budou uvedeny jejich číslíkové verze, které se označují P (proporcionální), S (sumační), PS (proporcionálně sumační), PD (proporcionálně diferenční), PSD (proporcionálně sumačně diferenční).

4.1 Algoritmy číslíkových regulátorů

Od číslíkového regulátoru požadujeme stejnou funkci jako od regulátoru spojitého, a proto vycházíme z rovnice spojitého PID regulátoru (4. 1).

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (4. 1)$$

Číslíkovou verzi tohoto regulátoru získáme, když integrál nahradíme sumací (4. 2) a derivaci nahradíme zpětnou diferencí (4. 3).

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \rightarrow T \sum_{i=0}^k e(iT) \quad (4. 2)$$

$$\frac{de(t)}{dt} \rightarrow \frac{\nabla e(kT)}{T} \quad (4. 3)$$

Číslíkový (diskrétní) regulátor je tedy dán obecným vztahem (4. 4).

$$u(kT) = k_p \left[e(kT) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(iT) + \frac{T_D}{T} \nabla e(kT) \right] \quad (4. 4)$$

kde $\nabla e(kT)$ je zpětná difference definovaná vztahem (4. 5).

$$\nabla e(kT) = e(kT) - e[(k-1)T] \quad (4. 5)$$

Tomuto algoritmu číslíkového regulátoru se říká **polohový algoritmus**. Hodnota integrálu se získává **sumací** a hodnota derivace se získává pomocí **diference**. Proto se tyto regulátory nazývají **proporcionálně-sumačně-diferenční**, a označují zkratkou **PSD**. Setkáme se taky s označením **číslíkové PID regulátory**. Polohový algoritmus se příliš často nepoužívá hlavně kvůli sumaci, která znamená komplikaci při výpočtu akční veličiny $u(kT)$ [Švarc, 2002].

Z-přenos polohového algoritmu PSD regulátoru tedy je

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \quad (4. 6)$$

Ostatní přenosy regulátorů a algoritmy jsou uvedeny v tab. 4. 1.

Tab. 4. 1 Diskrétní regulátory

Regulátor	Diferenční rovnice – absolutní (polohové) vyjádření	Z-přenos
P	$u(kT) = k_p e(kT)$	$G_R(z) = k_p$
S (číslicový I)	$u(kT) = \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(iT)$	$G_R(z) = \frac{T}{T_I} \cdot \frac{z}{z-1}$
PS (číslicový PI)	$u(kT) = k_p \left[e(kT) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(iT) \right]$	$G_R(z) = k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \cdot \frac{z}{z-1} \right)$
PD	$u(kT) = k_p \left[e(kT) + \frac{T_D}{T} \nabla e(kT) \right]$	$G_R(z) = k_p \left(1 + \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right)$
PSD (číslicový PID)	$u(kT) = k_p \left[e(kT) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(iT) + \frac{T_D}{T} \nabla e(kT) \right]$	$G_R(z) = k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right)$

Nyní přejdeme k **přírůstkovému tvaru algoritmu** PSD regulátoru. Podle tohoto algoritmu se určuje nikoliv hodnota akční veličiny $u(kT)$ v daném okamžiku, ale pouze její změna, čili přírůstek oproti hodnotě $u[(k-1)T]$ akční veličiny v předchozím kroku. Přírůstkové algoritmy můžeme použít pouze tehdy, když je obsažena sumační činnost (S, PS, PSD), protože jenom u této činnosti vystupuje regulační odchylka $e(kT)$, viz (4. 9).

Diferenční rovnice PSD pro diskretní čas $[(k-1)T]$ je vyjádřena vztahem (4. 7).

$$u[(k-1)T] = k_p \left[e[(k-1)T] + \frac{T}{T_I} \sum_{i=1}^{k-1} e(iT) + \frac{T_D}{T} \nabla e[(k-1)T] \right] \quad (4. 7)$$

Diferenční rovnice PSD pro diskretní čas kT je vyjádřena vztahem (4. 8).

$$u(kT) = k_p \left[e(kT) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(iT) + \frac{T_D}{T} \nabla e(kT) \right] \quad (4. 8)$$

Po odečtení těchto dvou vztahů získáme **přírůstkový tvar algoritmu PSD regulátoru**.

$$\nabla u(kT) = k_p \left[\nabla e(kT) + \frac{T}{T_I} e(kT) + \frac{T_D}{T} \nabla^2 e(kT) \right] \quad (4. 9)$$

kde

$$\nabla^2 e(kT) = \nabla e(kT) - \nabla e[(k-1)T] = e(kT) - 2e[(k-1)T] + e[(k-2)T] \quad (4. 10)$$

Po dosazení získáme konečný tvar **PSD regulátoru** (4. 11) a po úpravě (4. 12).

$$\begin{aligned} u(kT) - u[(k-1)T] &= \\ &= k_p \left\{ e(kT) - e[(k-1)T] + \frac{T}{T_I} e(kT) + \frac{T_D}{T} \{ e(kT) - 2e[(k-1)T] + e[(k-2)T] \} \right\} \end{aligned} \quad (4. 11)$$

$$u(kT) = u[(k-1)T] + q_0 e(kT) + q_1 e[(k-1)T] + q_2 e[(k-2)T] \quad (4. 12)$$

Po úpravě vztahů (4. 12) a (4. 14) určíme přenos PSD regulátoru při použití Z-transformace.

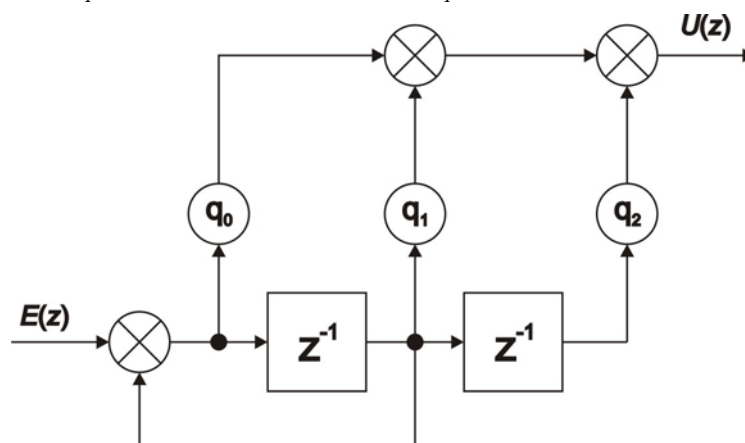
$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (4. 13)$$

kde

$$\begin{aligned}
 q_0 &= k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right) \\
 q_1 &= -k_p \left(1 + 2 \frac{T_D}{T} \right) \\
 q_2 &= k_p \frac{T_D}{T}
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Někdy se pro sumační činnost používá lichoběžníková sumace.

$$\frac{T}{2T_I} \sum_{i=1}^k \{e(iT) + e[(i+1)T]\} \triangleq \frac{T}{2T_I} \cdot \frac{z+1}{z-1}
 \tag{4.15}$$



Obr. 4.1 Blokové schéma číslicového PID regulátoru pro přírůstkový algoritmus

Příklad 4.1

Převeďte spojitý regulátor s přenosem $G_R(s) = 1,4 \left(1 + \frac{1}{0,8s} + 0,4s \right)$ na číslicový PSD regulátor s přírůstkovým algoritmem při vzorkovací periodě $T = 0,1$ s. Odvoďte jeho diferenční rovnici a Z-přenos.

Řešení:

Z přenosu určíme následující konstanty:

$$k_p = 1,4; \quad T_I = 0,8 \text{ s}; \quad T_D = 0,4 \text{ s}.$$

Nyní můžeme určit q_1, q_2, q_3 .

$$q_0 = k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right) = 1,4 \left(1 + \frac{0,1}{0,8} + \frac{0,4}{0,1} \right) = 7,175$$

$$q_1 = -k_p \left(1 + 2 \frac{T_D}{T} \right) = -1,4 \left(1 + 2 \frac{0,4}{0,1} \right) = -12,6$$

$$q_2 = k_p \frac{T_D}{T} = 1,4 \frac{0,4}{0,1} = 5,6$$

Diferenční rovnice dle (4. 12) tedy bude

$$u(kT) = u[(k-1)T] + 7,175e(kT) - 12,6e[(k-1)T] + 5,6e[(k-2)T].$$

Z-přenos je dle (4. 13)

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{7,175 - 12,6z^{-1} + 5,6z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

příp.

$$\frac{\Delta U(z)}{E(z)} = 7,175 - 12,6z^{-1} + 5,6z^{-2}$$

5 Filtrace u lineárních diskrétních regulačních obvodů

U diskrétního PSD regulátoru probíhá výpočet akčního zásahu přesně dle příslušné diferenční rovnice. Toto má za následek, že nedochází k přirozenému útlumu velkých a prudkých změn hodnot regulační odchylky a tím i akční veličiny, jako je tomu u spojitých regulačních obvodů.

U spojitých PID regulátorů vlivem setrvačnosti dochází k přirozené filtraci šumu a jeho vysokofrekvenčních složek. Setrvačnost je také jakýmsi zpožďovacím faktorem při skokových změnách žádané hodnoty, a proto je nebezpečí vzniku prudkých změn akční veličiny menší u spojitých systémů než u diskrétních.

U číslicových regulátorů dochází k velkým změnám akční veličiny prakticky vždy, když se více změní regulační odchylka. Díky šumu, který doprovází signál nesoucí informaci o regulované veličině, dochází k tomu, že přenášený signál je zatížen náhodnou chybou [Švarc, Šeda, Vítečková, 2007].

Abychom zabránili negativním vlivům prudkých změn regulační odchylky, využíváme **filtrů**, které fyzicky zařadíme před číslicový PSD regulátor a nebo upravíme algoritmus samotného číslicového PSD regulátoru.

5.1 Filtrace vzorkované veličiny

Diferenční rovnice filtru 1. řádu je

$$e_f(kT) = (1 - a)e_f[(k - 1)T] + ae(kT) \quad (5.1)$$

kde

$$a = \frac{1}{1 + \frac{T_f}{T}} \quad (5.2)$$

je koeficient filtrace.

Pokud je $a = 1$ vstupní veličina není filtrovaná a pokud $a = 0$ je vstupní signál odpojen.

Jak již bylo zmíněno, je možné zabránit negativním vlivům prudkých změn regulační odchylky také úpravou algoritmu číslicového PSD regulátoru daného vztahem

$$\begin{aligned} u(kT) - u[(k - 1)T] = \\ = k_p \left\{ e(kT) - e[(k - 1)T] + \frac{T}{T_i} e(kT) + \frac{T_D}{T} \{ e(kT) - 2e[(k - 1)T] + e[(k - 2)T] \} \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Není vhodné, aby v tomto vztahu byla zastoupena pouze regulační odchylka $e(kT)$. Ve většině případů je žádaná veličina konstantní a při její občasné změně není nutné, aby byla znovu derivovaná a tato změna vnesla do řízení nevhodný účinek [Švarc, Šeda, Vítečková, 2007]. Tím pádem je po úpravě možno získat alternativu vztahu (5.3).

Pro $w(kT) = w = konst$ platí

$$\begin{aligned} e(kT) &= w - y(kT) \\ e[(k - 1)T] &= w - y[(k - 1)T] \\ e[(k - 2)T] &= w - y[(k - 2)T] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} e(kT) - e[(k - 1)T] &= -y(kT) + y[(k - 1)T] \\ e(kT) - 2e[(k - 1)T] + e[(k - 2)T] &= -y(kT) + 2y[(k - 1)T] - y[(k - 2)T] \end{aligned} \quad (5.5)$$

a nyní můžeme získat alternativu vztahu PSD regulátoru daného vztahem

$$\begin{aligned} u(kT) - u[(k-1)T] &= \\ &= k_p \left\{ -y(kT) + y[(k-1)T] + \frac{T}{T_i} [w(kT) - y(kT)] + \frac{T_D}{T} [-y(kT) - 2y[(k-1)T] + y[(k-1)T]] \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Potlačení vzniku velkých změn akční veličiny v důsledku diskrétní realizace spojitě derivace na šumem zatížené regulační odchylce $e(kT)$ se provádí přímo v algoritmu náhrady derivace. Místo ideální spojitě derivace $T_D \frac{de(t)}{dt}$ se provádí náhrada členem

$T_D \frac{s}{T_i s + 1}$, tedy derivačním členem se setrvačností prvního řádu, který funguje jako filtr.

Toto řešení je výhodnější než použití filtru před regulátorem, protože filtrace se týká pouze derivační složky a nevnáší setrvačnost do proporcionální a sumační složky [Švarc, Šeda, Vítěčková, 2007].

6 Stabilita lineárních diskretních regulačních obvodů

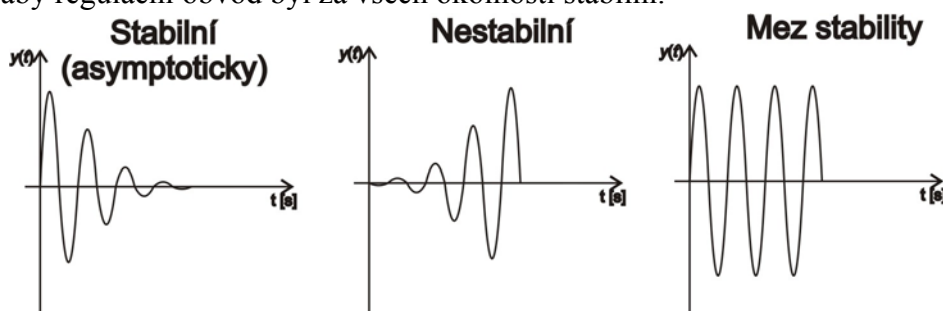
Pro diskretní systémy platí stejná definice stability jako pro systémy spojité.

Systém je stabilní, když se po odeznění vstupního signálu vrátí zpět do rovnovážného stavu.

BIBO (BOUNDED INPUT BOUNDED OUTPUT) stabilita – systém je stabilní, když na omezený vstupní signál dostaneme omezený výstupní signál.

Stabilita je základní charakteristickou vlastností systémů, tzn. nezávisí na vstupech ani na výstupech.

Z hlediska stability rozlišujeme regulační obvod (asymptoticky) **stabilní**, **na mezi stability** a **nestabilní** (obr. 6. 1). Obrázek zobrazuje stavy spojitého systému. Vždy se vyžaduje, aby regulační obvod byl za všech okolností stabilní.



Obr. 6. 1 Průběh regulované veličiny – stabilní, nestabilní a na mezi stability

6.1 Stabilita spojitých a diskretních systémů

Mezi stabilitou spojitých a diskretních systémů existuje spojitost. Pro názornost je vhodné připomenout nutnou a postačující podmínku stability spojitých systémů (v následující kapitole) a následně navázat s nutnou a postačující podmínkou stability systémů diskretních.

6.1.1 Stabilita spojitých systémů

Při vyšetřování stability se vychází z tzv. charakteristického mnohočlenu, který vystupuje ve jmenovateli všech základní přenosů regulačního obvodu.

Pro spojitý regulační obvod je **nutná a postačující podmínka** stability (NPP) formulována takto:

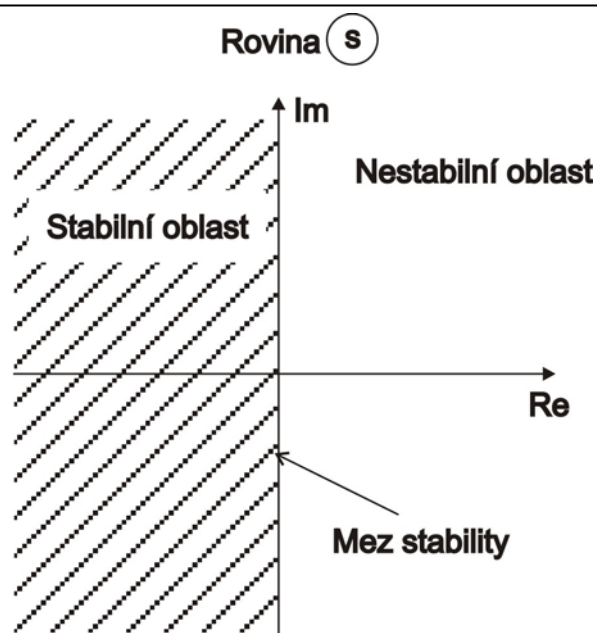
Regulační obvod je (asymptoticky) stabilní právě tehdy, když všechny kořeny s_i charakteristické rovnice mají záporné reálné části, tedy leží-li v levé komplexní polorovině.

$$1 + G_o(s) = 0 \Rightarrow$$

$$N(s) = a_n s^n + a_1 s + a_0 = 0 \quad (6.1)$$

$$\operatorname{Re} s_i \leq 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

Stabilní oblast komplexní roviny s je vyznačena na obr. 6. 2.



Obr. 6. 2 Oblast stability spojitých regulačních obvodů

Kontrola stability regulačního obvodu spočívá v určení rozložení kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině kořenů (tab. 6. 1). Pokud lze kořeny vyčíslit, použijeme nutnou a postačující podmínku stability. Jinak je nutno použít pravidla, která umožní rozhodnout o stabilitě bez přímého výpočtu kořenů, tyto pravidla se nazývají kritéria stability [Balátě, 2003; Švarc, Šeda, Vítečková, 2007]. Tato kritéria budou, pospána v kapitolách 6. 3 a 6. 4.

6.1.2 Stabilita diskrétních systémů

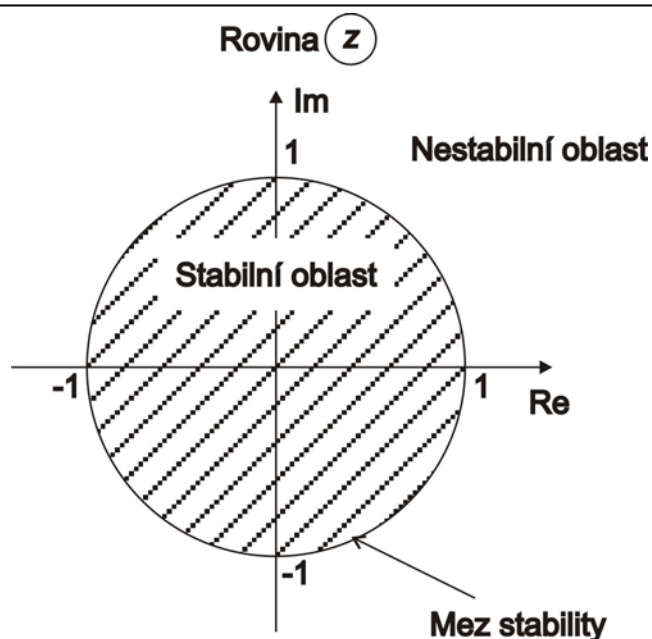
Při vyšetřování stability diskrétních systémů se vychází opět z charakteristického mnohočlenu, resp. charakteristické rovnice (3. 14), která vystupuje ve jmenovateli všech základních přenosů regulačního obvodu.

Pro diskrétní regulační obvody je **nutná a postačující podmínka** stability formulována takto:

Diskrétní regulační obvod je (asymptoticky) stabilní právě tehdy, když velikost všech kořenů charakteristického mnohočlenu bude menší než 1.

$$|z_i| < 1; i = 1, \dots, n \quad (6. 3)$$

Z nutné a postačující podmínky plyne, že stabilní oblast u diskrétních regulačních obvodů bude uvnitř jednotkové kružnice v oblasti komplexní proměnné z .



Obr. 6. 3 Oblast stability diskretních regulačních obvodů

V tab. 6. 1 jsou vypsány stavy rozložení kořenů charakteristické rovnice, které mohou nastat při posuzování stability u spojitých a diskretních systémů.

Tab. 6. 1 Rozložení kořenů charakteristického mnohočlenu v komplexní rovině u spojitých a diskretních systémů

	Rozložení kořenů charakteristického mnohočlenu v komplexní rovině		V časové oblasti
	V rovině s u spojitých systémů	V rovině z u diskretních systémů	
1.	v levé polorovině	uvnitř jednotkové kružnice	stabilní (asymptoticky)
2.	v pravé polorovině	vně jednotkové kružnice	nestabilní
3.	na záporné reálné ose	v intervalu (0,1)	stabilní nekmitavý (aperiodický)
4.	na kladné reálné ose	na kladné reálné ose vně jednotkové kružnice	nestabilní nekmitavý (aperiodický)
5.	komplexně sdružené v levé polorovině	komplexně sdružené uvnitř jednotkové kružnice mimo interval (0;1)	kmitavý tlumený
6.	na imaginární ose	na jednotkové kružnici	na mezi stability
7.	komplexně sdružené v pravé polorovině	komplexně sdružené vně jednotkové kružnice mimo interval (1;+∞)	kmitavý netlumený
8.	-	v počátku je n pólů $z^{-n} = 0$	ustálení za n kroků

6.2 Bilineární transformace

U spojitéch systémů bylo možno pro určování stability využít tzv. algebraická kritéria stability a kmitočtová kritéria stability. Hlavní výhodou těchto kritérií je, že dovolují určit stabilitu přímo z koeficientů charakteristické rovnice, aniž by bylo třeba určovat kořeny této rovnice.

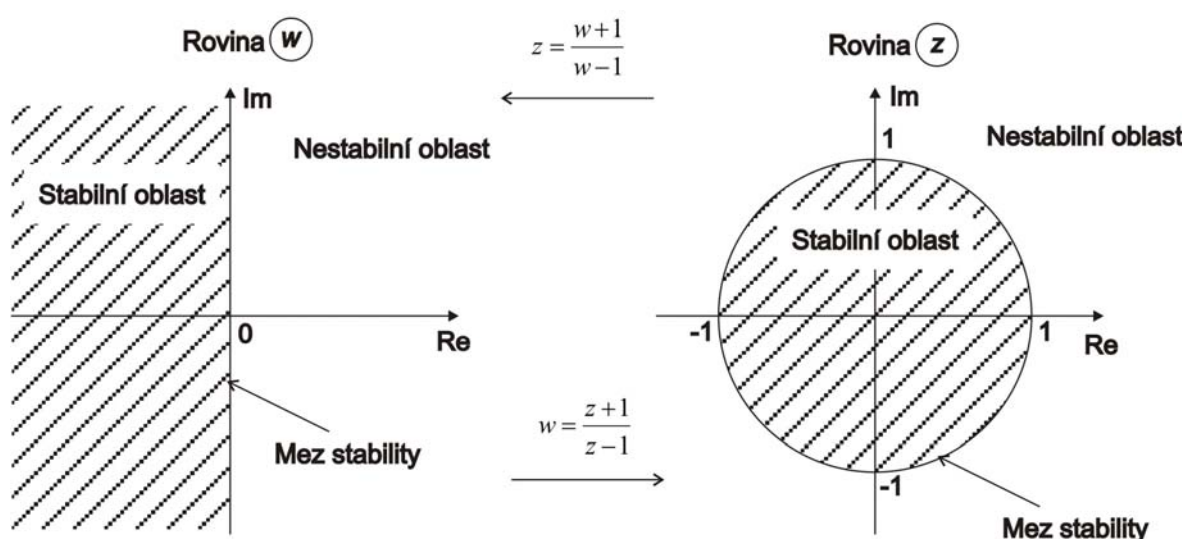
Pro určení stability diskrétních systémů se zavádí tzv. **bilineární transformace**.

Bilineární transformace je definována vztahem

$$z = \frac{w+1}{w-1} \text{ nebo } w = \frac{z+1}{z-1} \quad (6.4)$$

Tato transformace zobrazí jednotkovou kružnici z komplexní roviny z na imaginární osu v komplexní rovině w . Vnitřek jednotkové kružnice z komplexní roviny z se převádí na levou polorovinu v komplexní rovině w .

Bilineární transformace



Obr. 6.4 Bilineární transformace

Pomocí bilineární transformace nahradíme v charakteristické rovnici proměnnou z za proměnnou w .

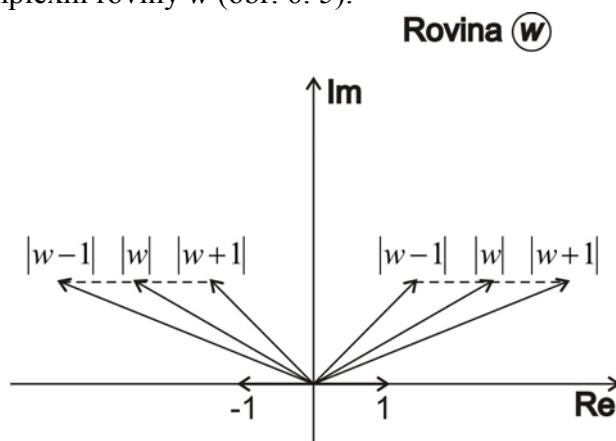
$$N(w) = N(z) \Big|_{z = \frac{w+1}{w-1}} \quad (6.5)$$

Po této úpravě dostaneme tzv. **transformovanou charakteristickou rovnici** $N(w) = 0$, pro kterou platí nutná a postačující podmínka spojitéch regulačních obvodů, tj. $\operatorname{Re} w_i < 0$ pro $i = 1, \dots, n$. Nyní můžeme pro charakteristický mnohočlen použít kritéria stability jako pro spojité systémy.

Správnost převodu jednotkové kružnice z komplexní roviny z na levou polorovinu v komplexní rovině w je možno prokázat jednoduchým důkazem:

- pokud vyjdeme z pravidla, že $z = \frac{w+1}{w-1}$,
- dále platí podmínka stability diskrétních systémů, tzn. $|z| < 1$,
- dle předešlých bodů tedy platí, že $|w+1| < |w-1|$,

- nyní tedy můžeme dokázat na obr. 6. 5, že podmínka $|w+1| < |w-1|$ platí pro levou polorovinu komplexní roviny w (obr. 6. 5).



Obr. 6. 5 Důkaz platnosti bilineární transformace

6.3 Algebraická kritéria stability

Kritéria stability umožňují rozhodnout o stabilitě systému bez výpočtů kořenů charakteristické rovnice. Nevýhodou těchto kritérií je, že nejdou aplikovat na systémy s dopravním zpožděním.

6.3.1 Routhovo-Schurovo kritérium stability

Toto kritérium, jak již bylo zmíněno, vychází z charakteristické rovnice, resp. charakteristického mnohočlenu, který je možno získat ze jmenovatele každého základního přenosu. Uvažujme charakteristický mnohočlen po bilineární transformaci ve tvaru

$$N(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_1 w + a_0 \quad (6. 6)$$

U všech kritérií je nutno zkontrolovat **Stodolovu nutnou podmínku stability**, která zní: „**Všechny koeficienty charakteristické rovnice musí existovat a musí mít stejné znaménko**“, tj. $a_i > 0$; $i = 0, 1, \dots, n$. Je-li charakteristický mnohočlen stupně $n \leq 2$, nutná Stodolova podmínka přechází v nutnou a postačující podmínku stability.

Postup při kontrole stability:

- koeficienty charakteristického mnohočlenu $N(w)$, resp. charakteristické rovnice napíšeme vedle sebe od nejvyšší mocniny,
- každý sudý koeficient podtrhneme,
- každý sudý koeficient násobíme podílem prvních dvou koeficientů a výsledek napíšeme o řádek níže posunutý o jednu pozici vlevo,
- novou řadu koeficientů odečteme od předcházející řady, díky této úpravě vypadne jeden koeficient,
- pokud jsou všechny koeficienty v nové řadě kladné, opakujeme stejný postup,
- pokud během výpočtu narazíme na nulový nebo záporný koeficient, můžeme říct, že diskrétní regulační obvod je nestabilní,
- pokud dojdeme při výpočtu až ke stavu, kdy zůstanou pouze tři kladné koeficienty, můžeme říci, že charakteristická rovnice má všechny kořeny ve stabilní oblasti, tj. diskrétní regulační obvod je stabilní.

Příklad 6.1

Vyšetřete stabilitu diskrétního regulačního obvodu, je-li dán jeho charakteristický mnohočlen po bilineární transformaci, ve tvaru $N(w) = w^4 + 4w^3 + 3w^2 + 5w + 1$.

Řešení:

Vypíšeme koeficienty charakteristického mnohočlenu od nejvyšší mocniny a podtrhneme každý sudý koeficient: $\underline{1} \ \underline{4} \ 3 \ \underline{5} \ 1$.

Určíme podíl prvních dvou koeficientů: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{4}$.

Nyní můžeme provést samotnou kontrolu stability.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc|c}
 1 & & 3 & & 1 \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 & 4 & & 5 & \\
 & & & & \\
 -\left(1 & & & & \frac{5}{4}\right) \\
 \hline
 & 4 & & 5 & 1 \\
 & & \swarrow & & \\
 & & \frac{7}{4} & & \\
 -\left(4 & & & & \frac{16}{7}\right) \\
 \hline
 & & \frac{7}{4} & & \frac{19}{7} & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Došli jsme až ke stavu, kdy zůstanou pouze tři koeficienty, protože jsme během výpočtu nenarazili na žádný záporný koeficient a koeficienty redukovaného mnohočlenu jsou kladné, můžeme říci, že regulační obvod je stabilní.

6.3.2 Hurwitzovo kritérium stability

Hurwitzovo kritérium stability opět vychází z charakteristického mnohočlenu, resp. charakteristické rovnice (6. 6). Uvažujeme charakteristický mnohočlen po bilineární transformaci. Opět je nutno kontrolovat **Stodolovu podmínku stability**.

Z koeficientů charakteristického mnohočlenu sestavíme tzv. Hurwitzovu matici (6. 7).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\
 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0
 \end{bmatrix} \quad (6. 7)$$

Hurwitzova matice $\mathbf{H}$ bude stejného řádu, jako je stupeň charakteristického mnohočlenu. Z Hurwitzovy matice sestavíme Hurwitzův determinant a z tohoto budeme určovat subdeterminanty, které jsou rovny hlavním rohovým minorům matice $\mathbf{H}$.

Hlavní rohové subdeterminanty tedy budou:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= a_{n-1}; \\
 H_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \\
 \text{až } H_n &= a_0 H_{n-1}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Regulační obvod je (asymptoticky) stabilní právě tehdy, když všechny hlavní rohové subdeterminanty jsou kladné.

Pokud je některý ze subdeterminantů nulový nebo záporný, regulační obvod je nestabilní. Jestliže je koeficient charakteristické rovnice $a_0 = 0$ a všechny rohové subdeterminanty jsou kladné, regulační obvod je na **nekmitavé mezi stability**, tzn. charakteristická rovnice má nulový kořen. Pokud $H_{n-1} = 0$, regulační obvod je na **kmitavé mezi stability**, tzn. charakteristická rovnice má dvojici ryze imaginárních kořenů.

6.4 Kmitočtová kritéria stability

Pro kontrolu stability diskretních regulačních obvodů použijeme jen jedno kmitočtové kritérium stability – Michajlovovo kritérium stability. Toto kritérium stability umožňuje rozhodnout o stabilitě na základě průběhu Michajlovova hodografu.

6.4.1 Michajlovovo kritérium stability

Vycházíme opět z transformovaného charakteristického mnohočlenu (6. 9), resp. transformované charakteristické rovnice.

$$N(w) = a_n w^n + \dots + a_1 w + a_0 \tag{6.9}$$

Při využití tohoto kritéria vyhodnocujeme stabilitu dle průběhu koncového bodu Michajlovovy funkce $N(j\omega)$ v komplexní rovině při měnící se frekvenci ω v rozsahu 0 až ∞ .

Michajlovovu funkci $N(j\omega)$ získáme dosazením

$$w = j\omega \tag{6.10}$$

do transformovaného charakteristického mnohočlenu $N(w)$.

Z charakteristické funkce $N(j\omega)$ vyjádříme reálnou a imaginární část Michajlovovy funkce.

$$\operatorname{Re}\{N(j\omega)\} = N_p(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \Rightarrow \text{kořeny } \omega_{p1}, \omega_{p2}, \dots \tag{6.11}$$

$$\operatorname{Im}\{N(j\omega)\} = N_q(\omega) = \omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots) \Rightarrow \text{kořeny } \omega_{q1}, \omega_{q2}, \dots \tag{6.12}$$

a dosazením měnící se frekvence vykreslíme Michajlovovův hodograf.

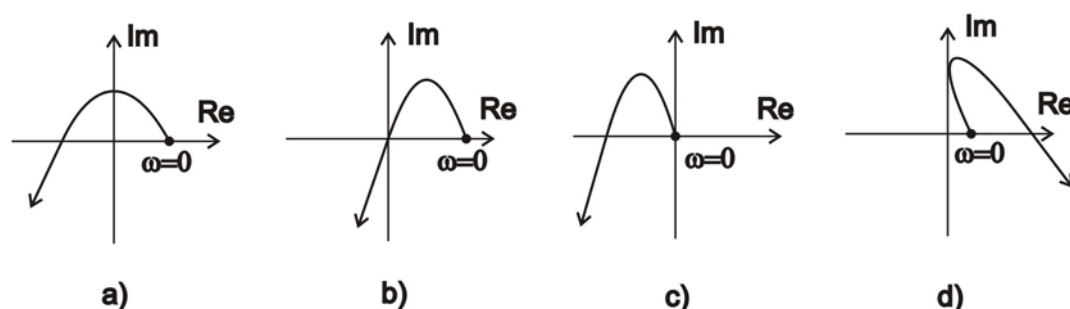
Jestliže tedy leží všechny kořeny charakteristické rovnice v levé polorovině komplexní roviny, potom platí pro frekvenci ω měnící se v rozsahu od 0 do ∞

$$\Delta \arg N(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \omega \leq \infty \tag{6.13}$$

Michajlovovo kritérium stability tedy zní:

Regulační obvod je stabilní právě tehdy, když Michajlovovův hodograf bude začínat na kladné reálné poloose komplexní roviny a proti směru hodinových ručiček projde postupně tolika kvadranty, kolikátého stupně je charakteristický mnohočlen uzavřeného regulačního obvodu.

Na obr. 6. 6 jsou zobrazeny Michajlovovy hodografy pro regulační obvody stabilní, nestabilní a na mezi stability.



Obr. 6. 6 Michajlovův hodograf pro $n = 3$ – a) stabilní systém, b) na kmitavé mezi stability, c) na nekmitavé mezi stability, d) nestabilní systém

V případě Michajlovova kritéria můžeme také využít jeho **analytickou formulaci**. Určíme Michajlovovu funkci a její reálnou (6. 11) a imaginární část (6. 12) a vypočítáme kořeny reálné a imaginární části. Poté můžeme říci, že regulační obvod je stabilní pokud platí podmínka

$$0 = \omega_{Q1} < \omega_{P1} < \omega_{Q2} < \omega_{P2} \quad (6. 14)$$

tj. kořeny imaginární a reálné části se vzájemně střídají. Tato podmínka platí pro systémy bez dopravního zpoždění.

6.5 Řešené příklady

Příklad 6.2

Vyšetřete stabilitu regulačního obvodu, který je dán diskretním přenosem řízení

$$G_{wy}(z) = \frac{a_0}{a_2 z^2 + 2z + 2a_0}.$$

Řešení:

Určíme charakteristický mnohočlen, resp. při položení rovno nule charakteristickou rovnicí.

$$N(z) = a_2 z^2 + 2z + 2a_0$$

Provedeme bilineární transformaci, tzn. za z dosadíme $z = \frac{w+1}{w-1}$ a získáme transformovaný charakteristický mnohočlen.

$$N(w) = N(z) \Big|_{z=\frac{w+1}{w-1}}$$

$$N(w) = a_2 \frac{w^2 + 2w + 1}{(w-1)^2} + 2 \frac{w+1}{w-1} + 2a_0$$

$$N(w) = \frac{a_2(w^2 + 2w + 1) + 2(w^2 - 1) + 2a_0(w-1)^2}{(w-1)^2}$$

Výraz položíme roven 0 a získáme charakteristickou rovnici.

$$\frac{a_2(w^2 + 2w + 1) + 2(w^2 - 1) + 2a_0(w-1)^2}{(w-1)^2} = 0$$

$$N(w) = a_2(w^2 + 2w + 1) + 2(w^2 - 1) + 2a_0(w-1)^2 = 0$$

Provedeme úpravu a získáme tvar

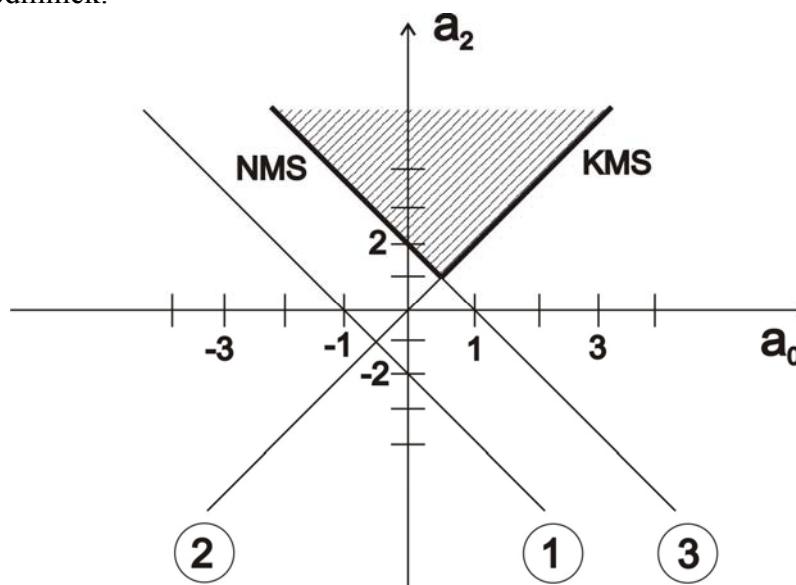
$$w^2(a_2 + 2 + 2a_0) + w(2a_2 - 4a_0) + (a_2 - 2 + 2a_0) = 0$$

Dále postupujeme stejně jako při kontrole stability dynamických systémů. Protože modifikovaný charakteristický mnohočlen je 2. stupně je Stodolova podmínka nutnou a postačující podmínkou stability.

Aby systém byl stabilní, musí tedy platit:

1. podmínka: $a_2 + 2 + 2a_0 > 0 \Rightarrow a_2 > -2 - 2a_0$
2. podmínka: $2a_2 - 4a_0 > 0 \Rightarrow a_2 > 2a_0$
3. podmínka: $a_2 - 2 + 2a_0 > 0 \Rightarrow a_2 > 2 - 2a_0$

Na obr. 6. 7 je zobrazena stabilní oblast šrafovaná a ohraničená tučnými čarami dle vypočtených podmínek.



Obr. 6. 7 Zobrazení podmínek stability pro příklad 6.2

KMS označuje kmitavou mez stability, NMS označuje nekmitavou mez stability.

Příklad 6.3

Vyšetřete stabilitu regulačního obvodu pomocí Hurwitzova kritéria stability, který je dán diskrétním přenosem řízení $G_{wy}(z) = \frac{z^2 - 0,25z + 0,25}{z^3 - 0,63z^2 + 1,02z - 0,368}$ [Balátě, 2003].

Řešení:

Určíme charakteristický mnohočlen, resp. při položení rovno nule charakteristickou rovnici:

$$N(z) = z^3 - 0,63z^2 + 1,02z - 0,368$$

$$z^3 - 0,63z^2 + 1,02z - 0,368 = 0$$

Provedeme bilineární transformaci, tzn. za z dosadíme $z = \frac{w+1}{w-1}$ a získáme transformovanou charakteristickou rovnici.

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 0,63\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 1,02\left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 0,368 = 0$$

Po úpravě získáme transformovanou charakteristickou rovnici ve tvaru

$$1,022w^3 + 2,454w^2 + 1,506w + 3,018 = 0$$

Provedeme kontrolu Stodolovy podmínky stability, která zní: **Všechny koeficienty charakteristické rovnice musí existovat a musí mít stejné znaménko.** Tuto kontrolu provádíme pro **transformovanou charakteristickou rovnici.**

Nyní využijeme Hurwitzova kritéria kontroly stability.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2,454 & 3,018 \\ 1,022 & 1,506 \end{vmatrix} = 3,696 - 3,084 = 0,612 > 0$$

Hurwitzův determinant je kladný, tzn. diskrétní regulační obvod je stabilní.

Příklad 6.4

Vyšetřete stabilitu regulačního obvodu pomocí Michajlovova kritéria stability, jehož charakteristický mnohočlen je $N(z) = z^3 - 0,63z^2 + 1,02z - 0,368$.

Řešení:

Provedeme bilineární transformaci, tzn. za z dosadíme $z = \frac{w+1}{w-1}$ a získáme transformovanou charakteristickou rovnici.

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 0,63\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 1,02\left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 0,368 = 0$$

Po úpravě získáme transformovanou charakteristickou rovnici ve tvaru

$$1,022w^3 + 2,454w^2 + 1,506w + 3,018 = 0$$

V charakteristickém mnohočlenu provedeme substituci $w = j\omega$ a získáme Michajlovovu funkci. Provedeme rozklad na reálnou a imaginární část charakteristické rovnice.

$$N(j\omega) = 1,022(j\omega)^3 + 2,454(j\omega)^2 + 1,506j\omega + 3,018$$

Provedeme rozklad na reálnou a imaginární část charakteristické rovnice.

$$N_P(\omega) = 3,018 - 2,454\omega^2$$

$$N_Q(\omega) = \omega(1,506 - 1,022\omega^2)$$

Nyní určíme kořeny reálné a imaginární části.

$$N_P(\omega) = 3,018 - 2,454\omega^2 = 0$$

$$\omega_P = 1,11$$

$$N_Q(\omega) = \omega(1,506 - 1,022\omega^2) = 0$$

$$\omega_{Q1} = 0$$

$$\omega_{Q2} = 1,47$$

Analyticky určíme stabilitu dle rovnice $0 = \omega_{Q1} < \omega_{P1} < \omega_{Q2} < \omega_{P2}$.

$$0 = 0 < 1,11 < 1,47$$

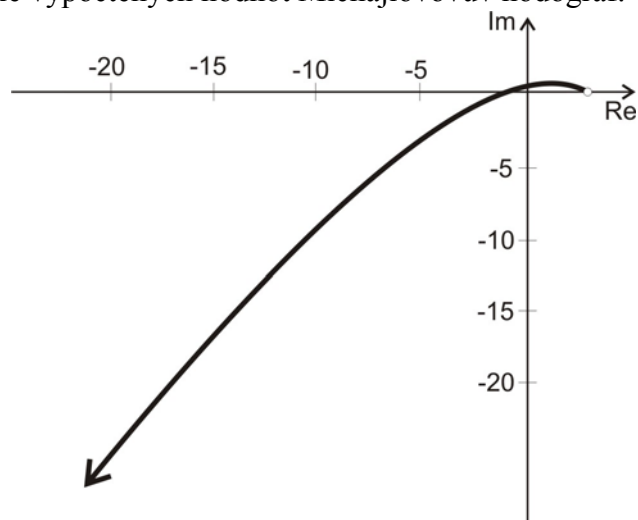
Podmínka stability je splněna a tudíž diskrétní regulační obvod **je stabilní.**

Nyní můžeme vypočítat hodnoty reálné a imaginární části pro měnící se frekvenci ω .

Tab. 6. 2 Vypočtené hodnoty reálných a imaginárních částí Michajlovovy funkce z příkladu 6.4

ω	Re	Im
0	3,018	0
$\pi/6$	2,345222	0,641834
$\pi/3$	0,326888	0,403435
$\pi/2$	-3,037	-1,595433
$7\pi/12$	-5,22353	-3,530114
$2\pi/3$	-7,74645	-6,235001
$3\pi/4$	-10,6058	-9,820121
$5\pi/6$	-13,8015	-14,3955
π	-21,202	-26,957

Nyní vykreslíme dle vypočtených hodnot Michajlovův hodograf.

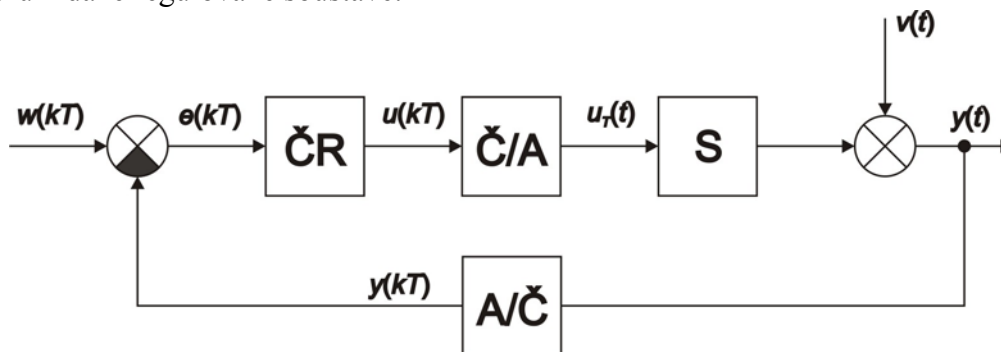


Obr. 6. 8 Michajlovův hodograf pro příklad 6.4

Dle definice stability podle Michajlovova hodografu, můžeme říci, že diskrétní regulační obvod je stabilní.

7 Kvalita regulačního pochodu diskrétních regulačních obvodů

Obsahem této kapitoly je seznámení se s pojmy týkajícími se kvality regulace diskrétních regulačních obvodů (obr. 7. 1), která má přímou souvislost s návrhem regulátorů k dané regulované soustavě.



Obr. 7. 1 Diskrétní regulační obvod

Dosažení a udržení určité kvality regulace je po zajištění stability tím nejdůležitějším úkolem návrhu regulačního obvodu. Cíl regulace (7. 1), (7. 2) je možno zajistit s určitou kvalitou za předpokladu, že regulační obvod je stabilní.

$$e(kT) \rightarrow 0 \triangleq E(z) \rightarrow 0 \quad (7. 1)$$

$$y(kT) \rightarrow w(kT) \triangleq Y(z) \rightarrow W(z) \quad (7. 2)$$

Kvalita regulace se posuzuje ve třech oblastech:

- oblast komplexní proměnné – rozložení pólů,
- časová oblast – časové charakteristiky (přechodové, impulsní atd.),
- kmitočtová oblast – kmitočtové charakteristiky (amplitudofázové, logaritmické atd.).

Kvalita regulace se nejčastěji posuzuje v časové oblasti, tedy dle průběhu přechodové charakteristiky v závislosti na čase a také v oblasti komplexní proměnné, kdy nás zajímá rozložení pólů charakteristického mnohočlenu.

Kvalitu regulace dále vyjadřuje existence či neexistence trvalé regulační odchylky.

7.1 Časová oblast

Kvalitu regulačního pochodu v časové oblasti posuzujeme na základě průběhu regulované veličiny $y(t)$ v závislosti na čase vyvolaného skokovou změnou (polohy) žádané veličiny $w(kT)$ (obr. 7. 5) nebo poruchové veličiny $v(t)$.

Obecně můžeme považovat vstupní skokové změny za jednotkové, tedy ve tvaru diskrétního Heavisideova jednotkového skoku $\eta(kT)$.

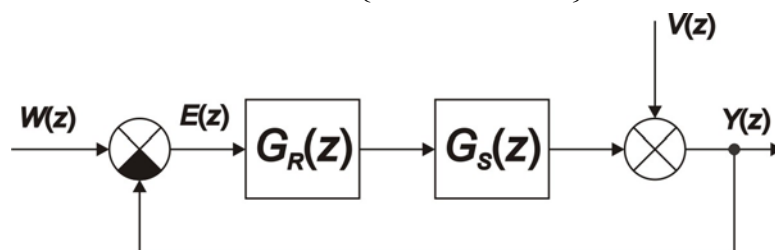
Při současném působení žádané veličiny $w(kT)$ a poruchové veličiny $v(t)$ se průběhy výstupních veličin liší v označení a jsou rozlišeny pomocí indexů a platí

$$y(t) = y_w(t) + y_v(t), \text{ resp. } y(kT) = y_w(kT) + y_v(kT) \quad (7. 3)$$

kde $y_w(t)$, resp. $y_w(kT)$ je odezva na žádanou veličinu $w(kT)$ při $v(t) = 0$ a $y_v(t)$, resp. $y_v(kT)$ je odezva na poruchovou veličinu $v(t)$ při $w(kT) = 0$.

Při vykreslování časových průběhů budeme předpokládat vždy spojité průběhy, při analytických výpočtech regulačních odchylek a dalších kvalitativních parametrů budeme vycházet z obr. 7. 2, tj. budeme předpokládat diskretizovaný přenos regulované soustavy ve tvaru

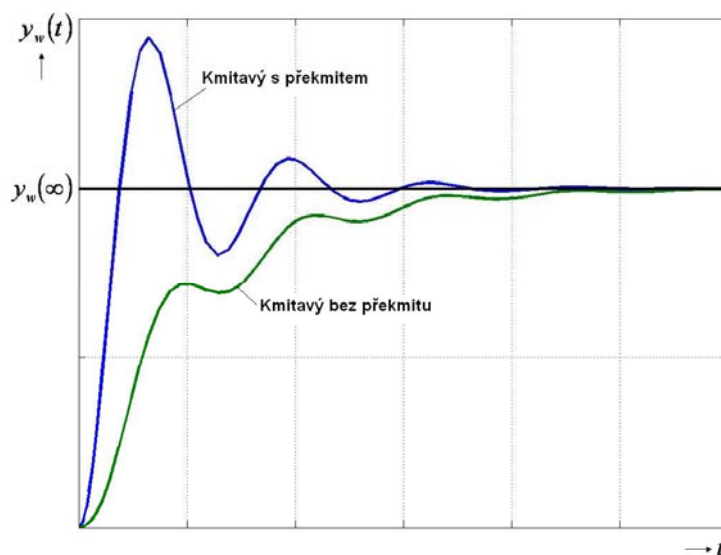
$$G_s(s) \rightarrow G_s(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_s(s)}{s} \right\} \right\} \Big|_{t=kT} \quad (7.4)$$



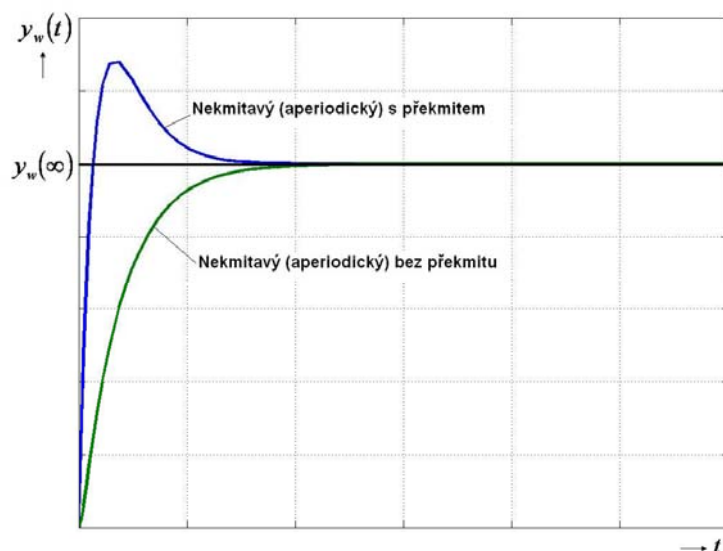
Obr. 7. 2 Jednorozměrový diskrétní lineární regulační obvod

Průběh regulované veličiny můžeme rozdělit:

- Kmitavý (obr. 7. 3):
 - s překmitem,
 - bez překmitu.
- Nekmitavý (aperiodický) (obr. 7. 4):
 - s překmitem,
 - bez překmitu.

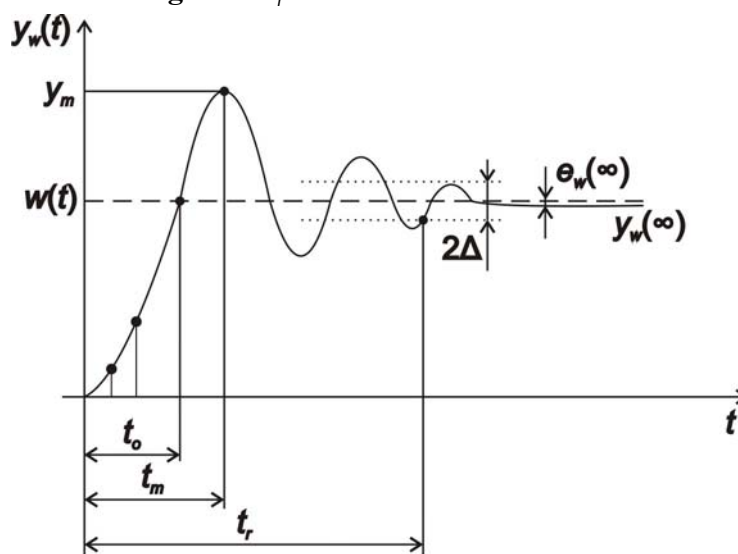


Obr. 7. 3 Typy průběhů regulované veličiny – kmitavé



Obr. 7. 4 Typy průběhů regulované veličiny – nekmitavé (aperiodické)

Nyní se můžeme zaměřit na vyhodnocení samotného průběhu regulované veličiny obr. 7. 5 a její popis. Na tomto průběhu nás zajímají hlavně parametry, jimiž jsou **relativní překmit** κ a samotná **doba regulace** t_r .



Obr. 7. 5 Průběh regulované veličiny

Značení veličin dle obr. 7. 5:

- t_o – doba odezvy (první dosažení žádané veličiny),
- t_m – doba dosažení maximální hodnoty regulované veličiny y_m ,
- t_r – doba regulace,
- y_m – maximální hodnota regulované veličiny,
- $w(t)$ – žádaná veličina,
- $y_w(\infty)$ – ustálená hodnota regulované veličiny,
- $e_w(\infty)$ – trvalá regulační odchylka ($|e_w(\infty)| = |w(\infty) - y_w(\infty)|$),
- 2Δ – pásmo regulace ($\Delta = 0,02 \div 0,05$, neměla by překročit 5 % $y_w(\infty)$).

Relativní překmit κ průběhu regulované veličiny určíme dle vztahu

$$\kappa = \frac{y_m(t_m) - y_w(\infty)}{y_w(\infty)} \cdot 100 \quad [\%] \quad (7.5)$$

Doba regulace t_r – je čas, kdy se regulovaná veličina $y_w(t)$ dostane do regulačního pásma 2Δ a už jej neopustí.

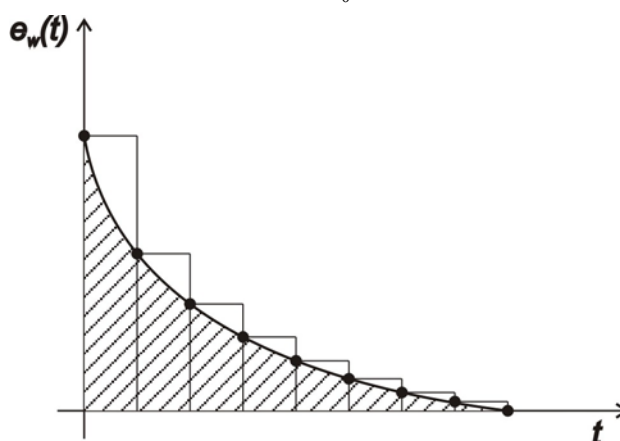
7.1.1 Sumační kritéria

Pro komplexní zhodnocení kvality regulačního pochodu jsou vhodná **sumační kritéria**. Sumační kritéria hodnocení kvality regulace se nejčastěji definují s lineární nebo kvadratickou závislostí na regulační odchylce. Tato kritéria jsou označována jako kritéria lineární nebo kvadratické regulační plochy. Posouzení kvality regulačního pochodu se vyhodnocuje na základě regulační plochy (dále v obrazech vyšrafovaná). Čím je tato regulační plocha menší, tím je kvalita regulace vyšší. Popsány budou čtyři sumační kritéria.

1. Lineární regulační plocha – IE

Jedná se o základní kritérium. Pro toto kritérium je nutné, aby se jednalo o nekmitavý průběh. Jinak dojdeme k závěru, že regulační plocha je minimální, jestliže se plochy pod kladnými a zápornými půlvlnami odečtou, k čemuž dochází při kmitavém průběhu na mezi stability.

$$S_{IE} = T \sum_{i=0}^{\infty} e_w(iT) \approx I_{IE} = \int_0^{\infty} e_w(t) dt \quad (7.6)$$



Obr. 7. 6 Lineární regulační plocha – IE

Kritérium je velmi snadno analyticky řešitelné dle vztahů

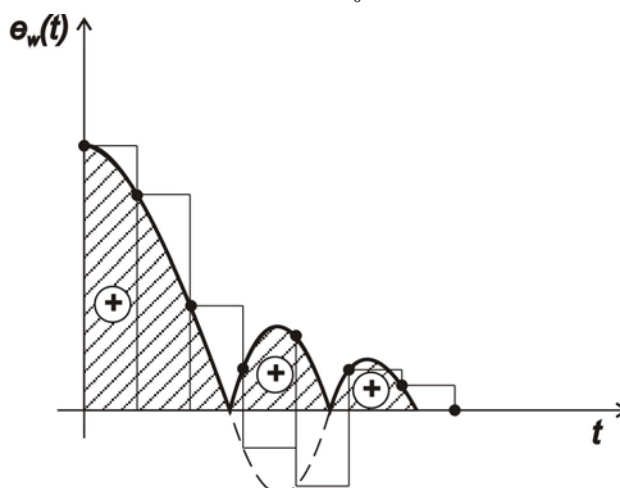
$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_w(kT) z^{-k} \quad (7.7)$$

$$S_{IE} = T \lim_{z \rightarrow 1} E(z) = T \sum_{k=0}^{\infty} e_w(kT) \quad (7.8)$$

2. Absolutní regulační plocha – IAE

Nedostatky kritéria IE odstraňuje kritérium IAE výpočtem integrálu z absolutní hodnoty regulační odchylky. Toto kritérium je tedy vhodné i pro kmitavé procesy. Hodnotu regulační plochy nejsme schopni určit analyticky. Důvodem je, že v bodech ve kterých $e_w(t)$ mění své znaménko, neexistuje derivace.

$$S_{IAE} = T \sum_{i=0}^{\infty} |e_w(iT)| \approx I_{IAE} = \int_0^{\infty} |e_w(t)| dt \quad (7.9)$$

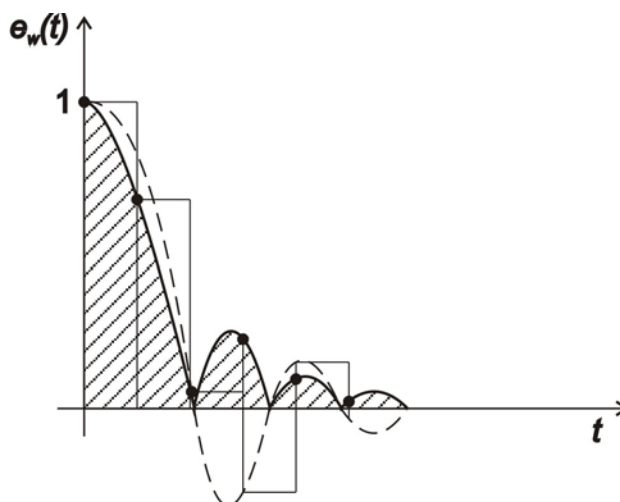


Obr. 7. 7 Absolutní regulační plocha – IAE

3. Kvadratická regulační plocha – ISE

Kritérium ISE je vhodné jak pro kmitavé tak i nekmitavé regulační pochody. Regulační plochu je možno určit analyticky, ale výsledný průběh regulované veličiny je kmitavý.

$$S_{ISE} = T \sum_{i=0}^{\infty} e_w^2(iT) \approx I_{ISE} = \int_0^{\infty} e_w^2(t) dt \quad (7.10)$$



Obr. 7. 8 Kvadratická regulační plocha – ISE

4. ITAE

Předešlá kritéria nebrala v úvahu dobu regulace. U kritéria ITAE dochází díky zahrnutí času jak minimalizaci regulační plochy, tak minimalizaci doby regulace t_r . Regulační plochu nejsme schopni určit analyticky, ale pouze simulačně.

$$S_{ITAE} = T \sum_{i=0}^{\infty} iT |e_w(iT)| \approx I_{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e_w(t)| dt \quad (7.11)$$

7.1.2 Trvalé regulační odchylky

Jedním z parametrů vyjadřujících kvalitu regulace je existence či neexistence trvalých regulačních odchylek. Trvalá regulační odchylka může nabývat hodnot tab. 7. 1.

Tab. 7. 1 Hodnoty trvalých regulačních odchylek

$e(\infty) = 0$	Žádoucí
$e(\infty) = konst$	Zvláštní pozornost při nastavování regulátoru
$e(\infty) = \infty$	Nutná změna typu regulátoru

Odezva regulačního obvodu na skokovou změnu žádané veličiny $w(kT)$ a poruchové veličiny $v(t)$ působící na výstupu regulované soustavy s nulovými trvalými regulačními odchylkami je zobrazen na obr. 7. 9. Tento průběh odpovídá stavu, kdy otevřený regulační obvod obsahuje alespoň jeden sumační člen.

Počet sumačních členů v otevřeném regulačním obvodu označujeme jako **stupeň astatismu** q . Sumační člen může být obsažen jak v soustavě tak v regulátoru.

Stupeň astatismu můžeme také definovat jako nejvyšší mocninu $(z-1)$, kterou můžeme vytknout ze jmenovatele přenosu otevřeného regulačního obvodu $G_o(z)$, tedy

$$G_o(z) = \frac{M(z)}{(z-1)^q N(z)} \quad (7.12)$$

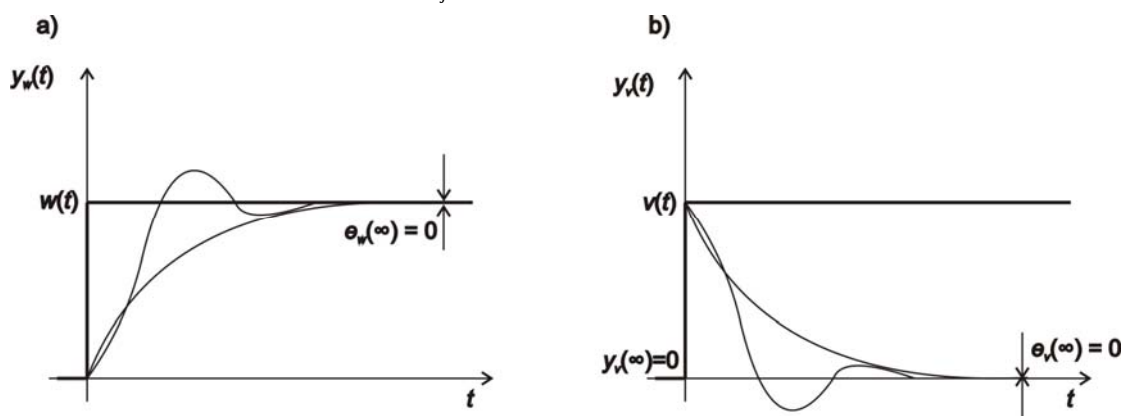
Pro

$$G_{wy}(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} \quad (7.13)$$

platí

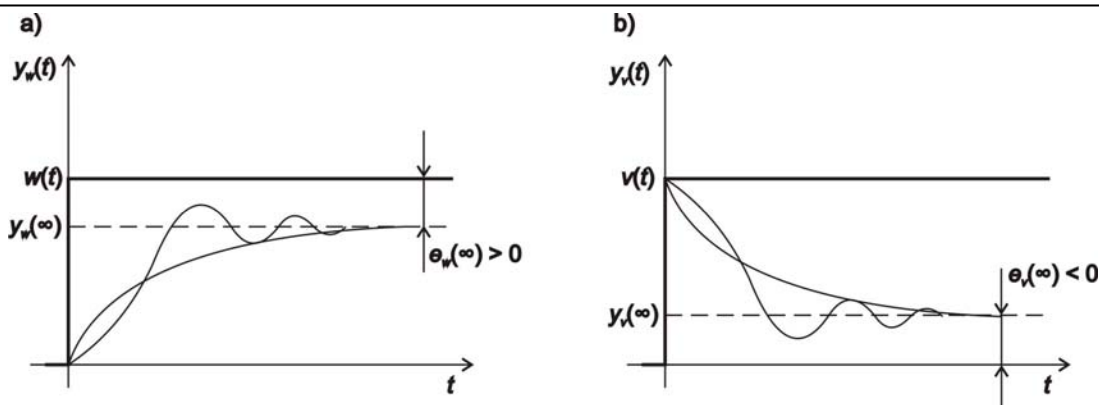
$$\sum_{i=0}^n a_i \neq \sum_{j=0}^m b_j \Rightarrow q = 0$$

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{j=0}^m b_j \Rightarrow q \geq 1 \quad (7.14)$$



Obr. 7. 9 Odezvy regulačního obvodu na skokové změny: a) žádané veličiny, b) poruchové veličiny působící na výstupu regulované soustavy s nulovými trvalými regulačními odchylkami

Odezva regulačního obvodu s trvalými regulačními odchylkami je na obr. 7. 10. Tento průběh odpovídá stavu, kdy otevřený regulační obvod neobsahuje ani jeden sumační člen a tedy stupeň astatismu je $q = 0$.



Obr. 7. 10 Odezvy regulačního obvodu na skokové změny: a) žádané veličiny, b) poruchové veličiny působící na výstupu regulované soustavy s nenulovými trvalými regulačními odchylkami

Trvalé regulační odchylky můžeme snadno určit. Vycházet budeme ze vztahu

$$E(z) = \underbrace{G_{we}(z)W(z)}_{E_w(z)} + \underbrace{G_{ve}(z)V(z)}_{E_v(z)} \quad (7.15)$$

kde $G_{we}(z)$ je odchylkový přenos řízení, $G_{ve}(z)$ je odchylkový přenos poruchy, $W(z)$ je obraz žádané veličiny a $V(z)$ obraz poruchové veličiny.

Nyní můžeme určit samotné regulační odchylky.

Trvalá regulační odchylka

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) \quad (7.16)$$

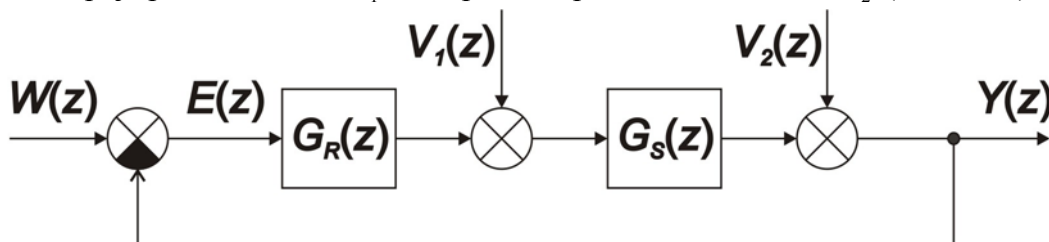
Trvalá regulační odchylka způsobená žádanou veličinou

$$e_w(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)E_w(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G_{we}(z)W(z)] \quad (7.17)$$

Trvalá regulační odchylka způsobená poruchovou veličinou

$$e_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)E_v(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G_{ve}(z)V(z)] \quad (7.18)$$

V případě výpočtu trvalé regulační odchylky poruchové veličiny je třeba rozlišit, zda porucha vstupuje před soustavou V_1 nebo porucha působí za soustavou V_2 (obr. 7. 11).



Obr. 7. 11 Regulační obvod – porucha vstupující před a za soustavou

$$G_{we}(z) = \frac{1}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{1}{1 + G_o(z)} \quad (7.19)$$

$$G_{v1e}(z) = \frac{-G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)} \quad (7.20)$$

$$G_{v2e}(z) = \frac{-1}{1 + G_R(z)G_S(z)}; \quad G_{v2e}(z) = -G_{we}(z) \quad (7.21)$$

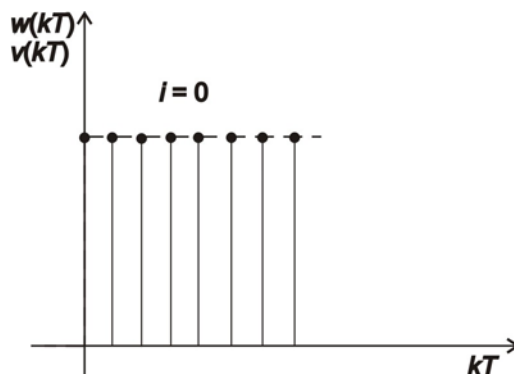
Pro stanovení trvalých regulačních odchylek se používají tzv. **testovací signály**.

$$\begin{aligned}w(kT) &= w_i(kT)^i \\v(kT) &= v_i(kT)^i\end{aligned}\quad (7.22)$$

1. Skok polohy ($i = 0$)

Jedná se o signál ve tvaru diskrétního Heavisideova skoku $\eta(kT)$. Testovací signál je definován vztahem

$$\begin{aligned}w(kT) &= w_0 \eta(kT) \triangleq W(z) = \frac{z}{z-1} w_0 \\v(kT) &= v_0 \eta(kT) \triangleq V(z) = \frac{z}{z-1} v_0\end{aligned}\quad (7.23)$$

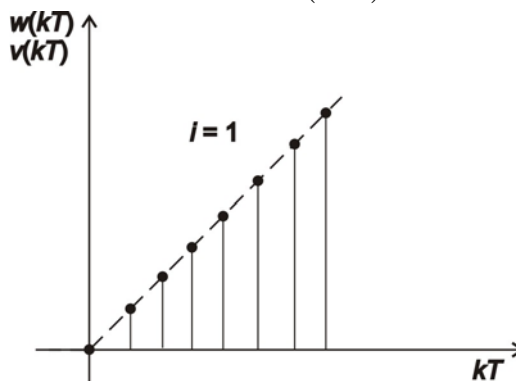


Obr. 7. 12 Testovací signál – skok polohy

2. Skok rychlosti ($i = 1$)

Testovací signál je definován vztahem

$$\begin{aligned}w(kT) &= w_1 \cdot kT \cdot \eta(kT) \triangleq W(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} w_1 \\v(kT) &= v_1 \cdot kT \cdot \eta(kT) \triangleq V(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} v_1\end{aligned}\quad (7.24)$$



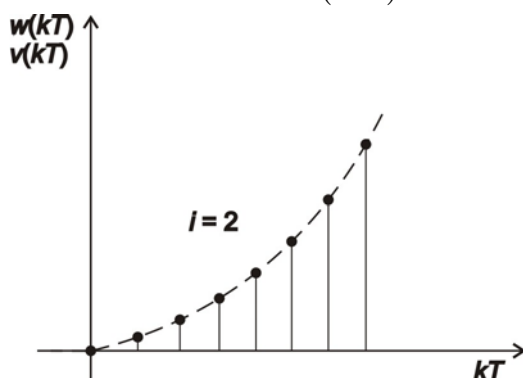
Obr. 7. 13 Testovací signál – skok rychlosti

3. Skok zrychlení ($i = 2$)

Testovací signál je definován vztahem

$$w(kT) = w_2(kT)^2 \eta(kT) \triangleq W(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} w_2 \quad (7.25)$$

$$w(kT) = w_2(kT)^2 \eta(kT) \triangleq V(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} v_2$$



Obr. 7. 14 Testovací signál – skok zrychlení

Obecně můžeme napsat obraz žádané veličiny ve tvaru

$$W(z) = \frac{D_i(z)w_i}{(z-1)^{i+1}} \quad (7.26)$$

kde

$$D_0(z) = 1,$$

$$D_1(z) = Tz,$$

$$D_2(z) = T^2 z(z+1)$$

Pro přenos otevřeného regulačního obvodu platí vztah

$$G_o(z) \frac{k_0 T^q}{(z-1)^q} G_1(z) \quad (7.27)$$

kde

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_1(z) = 1$$

Pak pro odchylový přenos řízení (7. 19) platí

$$G_{we}(z) = \frac{1}{1 + G_o(z)} = \frac{(z-1)^q}{(z-1)^q + k_0 T^q G_1(z)} \quad (7.28)$$

Vztahy (7. 26) a (7. 28) dosadíme do (7. 17) a dostaneme

$$e_w(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{(z-1)^{q-i-1} D_i(z)w_i}{(z-1)^q + k_0 T^q G_1(z)} \quad (7.29)$$

Ze vztahu (7. 29) tedy vyplývá

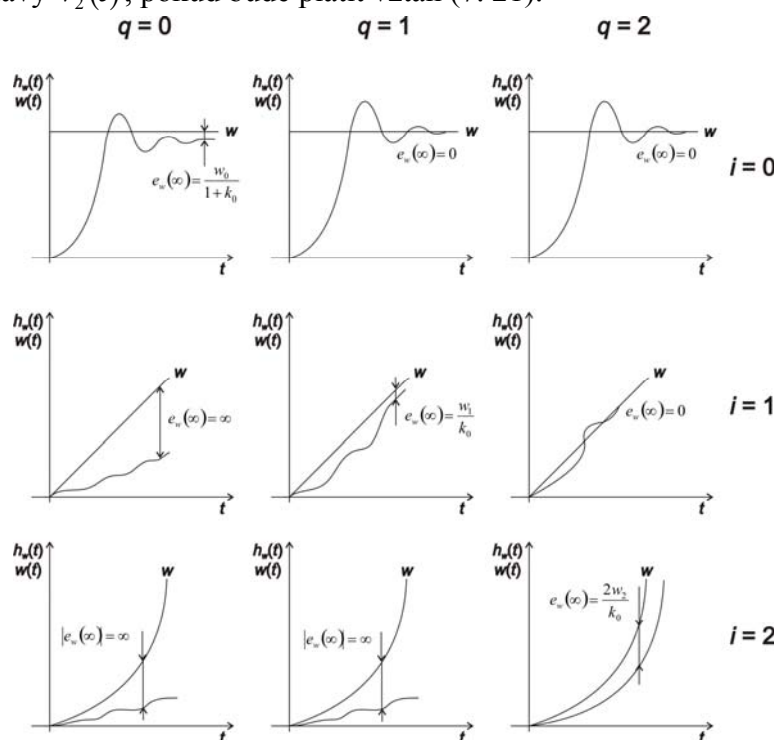
$$\begin{aligned}
0 \leq i < q : e_w(\infty) &= 0 \\
i > q \geq 0 : |e_w(\infty)| &= \infty \\
0 = i = q : e_w(\infty) &= \frac{w_0}{1 + k_0} \\
1 = i = q : e_w(\infty) &= \frac{w_1}{k_0} \\
2 = i = q : e_w(\infty) &= \frac{2w_2}{k_0}
\end{aligned} \tag{7.30}$$

kde

q – stupeň astatismu (typ regulačního obvodu),

k_0 – zesílení přenosu otevřeného regulačního obvodu $G_o(z)$.

Podobné vztahy budou platit i pro regulační odchylku způsobenou poruchou na výstupu regulované soustavy $v_2(t)$, pokud bude platit vztah (7.21).



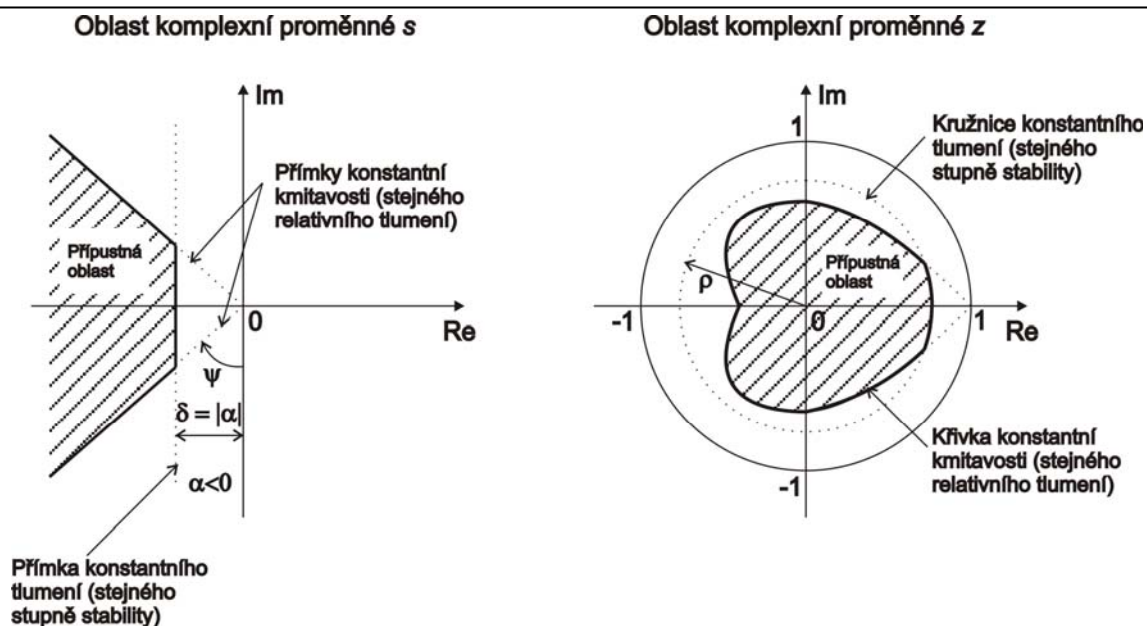
Obr. 7.15 Závislost trvalých regulačních odchylek způsobených žádanou veličinou w na stupni astatismu q a stupni žádané veličiny i

7.2 Oblast komplexní proměnné

V případě posuzování kvality regulace v oblasti komplexní proměnné z sledujeme rozmístění pólů přenosu řízení $G_{wy}(z)$.

$$G_{wy}(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \tag{7.31}$$

Základním předpokladem v takovémto případě je, že regulační obvod je stabilní. Tedy v případě diskrétních regulačních obvodů bude velikost všech kořenů charakteristického mnohočlenu menší než 1, resp. stabilní oblast u diskrétních regulačních obvodů je uvnitř jednotkové kružnice v oblasti komplexní proměnné z .



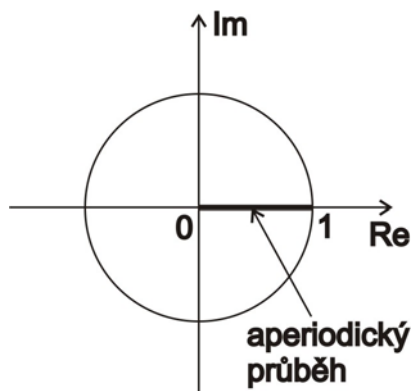
Obr. 7. 16 Srovnání rozložení pólů spojitých a diskrétních regulačních obvodů

Na obr. 7. 16 je znázorněno srovnání rozložení pólů spojitých regulačních obvodů v oblasti komplexní proměnné s a diskrétních regulačních obvodů v oblasti komplexní proměnné z .

Dle obr. 7. 16 můžeme říci, že:

Póly, které v přípustné oblasti leží nejbližší hranici přípustné oblasti, jsou dominantní.

Požadujeme-li nekmitavý (aperiodický) průběh regulačního pochodu, musí póly být reálné z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ dle obr. 7. 17 (viz tab. 6. 1).



Obr. 7. 17 Oblast vymezená pro aperiodický průběh

V případě roviny s výsledný relativní překmit κ určují dvě přímky konstantní kmitavosti se stejným relativním tlumením, které svírají úhel ψ (obr. 7. 16), výraz δ (obr. 7. 16) vyjadřuje míru stability (stupeň stability), resp. rychlost odezvy regulačního obvodu, který ovlivňuje dobu regulace danou vztahem

$$t_r = (3 \div 4) \frac{1}{\delta} \quad (7.32)$$

Z obr. 7. 16 je zřejmé, že dle požadavku na kvalitu regulace je možné v rovině s a v rovině z vymežit určitou přípustnou oblast ovlivněnou dobou regulace t_r a maximálním překmitem κ . **Připustná oblast** je vymezena

$$\text{rovina } s \begin{cases} \psi \geq \arcsin \xi \\ \delta \geq (3 \div 4) \frac{1}{t_r} \end{cases} \quad (7.33)$$

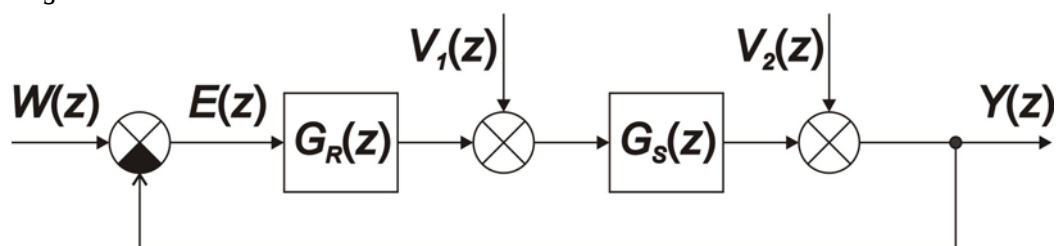
$$\text{rovina } z \begin{cases} \rho \leq e^{-|\alpha|T}; \\ \rho(\omega) \leq e^{-\frac{|\omega|T}{\operatorname{tg} \psi}} \\ \varphi(\omega) = \omega T \end{cases} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\omega}{|\alpha|} \Rightarrow |\alpha| = \frac{\omega}{\operatorname{tg} \psi} \quad (7.34)$$

Vztahy (7.34) vyplývají z transformace komplexní roviny s do komplexní roviny z dané vztahem $z = e^{sT}$.

7.3 Řešené příklady

Příklad 7.1

Určete trvalou regulační odchylku žádané veličiny a poruchové veličiny (porucha v_1 vstupuje před soustavou, porucha v_2 vstupuje za soustavou) pro regulační obvod s diskrétním regulátorem typu P s přenosem $G_R(z) = k_p$ a soustavou danou přenosem $G_S(s) = \frac{k_1}{s}$. Regulační odchylky určete pro všechny typy testovacích signálů.



Obr. 7. 18 Diskrétní regulační obvod (porucha vstupující před a za soustavou)

Řešení:

Provedeme diskretizaci soustavy (tab. 1. 2).

$$G_S(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_S(s)}{s} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

$$G_S(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{k_1}{s^2} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

$$G_S(z) = k_1 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{k_1 T}{(z-1)}$$

Nyní určíme odchylkový přenos řízení.

$$G_{we}(z) = \frac{1}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{1}{1 + \frac{k_p k_1 T}{(z-1)}} = \frac{1}{\frac{(z-1) + k_p k_1 T}{(z-1)}} = \frac{(z-1)}{(z-1) + k_p k_1 T}$$

Trvalá regulační odchylka pro žádanou veličinu pro tři testovací signály:

1. Skok polohy

$$e_w(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{(z-1)}{(z-1) + k_p k_1 T} \cdot \frac{z w_0}{(z-1)} \right] = \underline{\underline{0}}$$

2. Skok rychlosti

$$\begin{aligned} e_w(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{(z-1)}{(z-1) + k_p k_1 T} \cdot \frac{T z w_1}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T z w_1}{(z-1) + k_p k_1 T} \right] = \underline{\underline{\frac{w_1}{k_p k_1}}} \end{aligned}$$

3. Skok zrychlení

$$\begin{aligned} e_w(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{(z-1)}{(z-1) + k_p k_1 T} \cdot \frac{T^2 z(z+1) w_2}{(z-1)^3} \right] = \\ &= \underline{\underline{\infty}} \end{aligned}$$

Pro $q = 1$ výsledky odpovídají vztahům (7. 30).

Trvalá regulační odchylka pro poruchovou veličinu:

- a) Porucha
- v_2
- vstupuje za soustavou

Trvalé regulační odchylky $e_{v_2}(\infty)$ jsou podobné jako $e_w(\infty)$, ale s opačným znaménkem, protože $G_{v_2e}(z) = -G_{we}(z) = \frac{-1}{1 + G_R(z)G_S(z)}$, tj.

$$e_{v_2}(\infty) = 0 \text{ pro } v_2(kT) = v_{20} \cdot \eta(kT)$$

$$e_{v_2}(\infty) = -\frac{v_{21}}{k_p k_1} \text{ pro } v_2(kT) = v_{21} \cdot kT \cdot \eta(kT)$$

$$e_{v_2}(\infty) = -\infty \text{ pro } v_2(kT) = v_{22} \cdot (kT)^2 \cdot \eta(kT)$$

- b) Porucha
- v_1
- vstupuje před soustavou

Nyní určíme odchylkový přenos poruchy.

$$G_{v_1e}(z) = \frac{-G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{-\frac{k_1 T}{(z-1)}}{(z-1) + k_p k_1 T} = \underline{\underline{\frac{-k_1 T}{(z-1) + k_p k_1 T}}}$$

1. Skok polohy

$$\begin{aligned} e_{v_1}(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{v_1e}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-k_1 T}{(z-1) + k_p k_1 T} \cdot \frac{z v_{10}}{(z-1)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-k_1 T}{(z-1) + k_p k_1 T} \cdot \frac{z v_{10}}{(z-1)} \right] = \underline{\underline{-\frac{v_{10}}{k_p}}} \end{aligned}$$

2. Skok rychlosti

$$\begin{aligned} e_{v_1}(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{v_1e}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-k_1 T}{(z-1) + k_p k_1 T} \cdot \frac{T z v_{11}}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{-k_1 T^2 z v_{11}}{[(z-1) + k_p k_1 T] \cdot (z-1)} \right] = \underline{\underline{-\infty}} \end{aligned}$$

3. Skok zrychlení

$$e_{v1}(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{ve}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-k_1 T}{(z-1) + k_p k_1 T} \cdot \frac{T^2 z(z+1) v_{12}}{(z-1)^3} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{-2k_1 T^3 z(z+1) v_{12}^2}{[(z-1) + k_p k_1 T] \cdot (z-1)^2} \right] = -\infty$$

Vidíme, že $e_{v1}(\infty) \neq 0$ již pro skok polohy. Z toho vyplývá, že je vhodné použít místo regulátoru typu P regulátor typu PS.

Příklad 7.2

Určete trvalou regulační odchylku žádané veličiny a poruchové veličiny (porucha v_1 vstupuje před soustavou) pro regulační obvod s diskretním regulátorem typu PS s přenosem $G_R(z) = k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \cdot \frac{z}{z-1} \right)$ a soustavou danou přenosem $G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}$. Regulační odchylky určete pro všechny typy testovacích signálů.

Řešení:

Provedeme diskretizaci soustavy (tab. 1. 2).

$$G_S(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_S(s)}{s} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

$$G_S(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

$$G_S(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{\frac{k_1}{T_1}}{s \left(s + \frac{1}{T_1} \right)} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

$$G_S(z) = k_1 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1-c)z}{(z-1)(z-c)}; \quad c = e^{-aT}$$

$$G_S(z) = k_1 \cdot \frac{(1-c)}{(z-c)} = k_1 \cdot \frac{(1-e^{-T/T_1})}{(z-e^{-T/T_1})}$$

Upravíme přenos regulátoru.

$$G_R(z) = k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \cdot \frac{z}{(z-1)} \right) = k_p \left(\frac{T_I(z-1) + Tz}{T_I(z-1)} \right)$$

Nyní určíme odchylkový přenos řízení.

$$G_{we}(z) = \frac{1}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{1}{1 + \frac{k_p T_I(z-1) + k_p Tz}{T_I(z-1)} \cdot \frac{k_1(1-c)}{(z-c)}} =$$

$$= \frac{T_I(z-1)(z-c)}{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)}$$

Trvalá regulační odchylka pro žádanou veličinu pro tři testovací signály:

1. Skok polohy

$$e_w(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{T_I(z-1)(z-c)}{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)} \cdot \frac{zw_0}{(z-1)} \right] = 0$$

2. Skok rychlosti

$$e_w(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{T_I(z-1)(z-c)}{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)} \cdot \frac{Tzw_1}{(z-1)^2} \right] =$$

$$= \frac{T_I T(1-c)w_1}{Tk_p k_1(1-c)} = \underline{\underline{\frac{T_I w_1}{k_p k_1}}}$$

3. Skok zrychlení

$$e_w(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{T_I(z-1)(z-c)}{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)} \cdot \frac{T^2 z(z+1)w_2}{(z-1)^3} \right] =$$

$$= \underline{\underline{\infty}}$$

Trvalá regulační odchylka pro poruchovou veličinu (porucha v_1 vstupuje před soustavou):

Nyní určíme odchylkový přenos poruchy.

$$G_{vle}(z) = \frac{-G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{-\frac{k_1(1-c)}{(z-c)}}{\frac{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)}{T_I(z-1)(z-c)}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{-T_I k_1(1-c)(z-1)}{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)}}}$$

1. Skok polohy

$$e_{v1}(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{vle}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot G_{vle}(z) \cdot \frac{zv_{10}}{(z-1)} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-T_I k_1(1-c)(z-1)}{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)} \cdot \frac{zv_{10}}{(z-1)} \right] = 0$$

2. Skok rychlosti

$$e_{v1}(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{vle}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot G_{vle}(z) \cdot \frac{Tzv_{11}}{(z-1)^2} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-T_I k_1(1-c)(z-1)}{T_I(z-1)(z-c) + [k_p T_I(z-1) + k_p Tz] \cdot k_1(1-c)} \cdot \frac{Tzv_{11}}{(z-1)^2} \right] =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{T_I v_{11}}{k_p}}}$$

3. Skok zrychlení

$$\begin{aligned}
 e_{v1}(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot \frac{T^2 z(z+1) v_{12}}{(z-1)^3} \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-T_I k_1 (1-c)(z-1)}{T_I (z-1)(z-c) + [k_P T_I (z-1) + k_P Tz] \cdot k_1 (1-c)} \cdot \frac{T^2 z(z+1) v_{12}}{(z-1)^3} \right] \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Je vidět, že u proporcionální soustavy je regulační odchylka způsobená poruchovou ve tvaru skoku polohy vstupující před soustavou nulová, na rozdíl od příkladu 7.1, kde byla integrační regulovaná soustava.

Příklad 7.3

Určete trvalou regulační odchylku žádané veličiny a poruchové veličiny (porucha v_1 vstupuje před soustavou) pro regulační obvod s diskretním regulátorem typu PD s přenosem $G_R(z) = k_P \left(1 + \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right)$ a soustavou danou přenosem $G_S(s) = \frac{k_1}{s^2}$. Regulační odchylky určete pro všechny typy testovacích signálů.

Řešení:

Provedeme diskretizaci soustavy (tab. 1. 2).

$$\begin{aligned}
 G_S(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_S(s)}{s} \right\} \right\}_{t=kT} \\
 G_S(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{k_1}{s^3} \right\} \right\}_{t=kT} \\
 G_S(z) &= k_1 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{k_1 T^2 (z+1)}{2(z-1)^2}
 \end{aligned}$$

Upravíme přenos regulátoru.

$$G_R(z) = k_P \left(1 + \frac{T_D}{T} \cdot \frac{(z-1)}{z} \right) = k_P \left(\frac{Tz + T_D(z-1)}{Tz} \right)$$

Nyní určíme odchylkový přenos řízení.

$$\begin{aligned}
 G_{we}(z) &= \frac{1}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{1}{1 + \frac{k_P Tz + k_P T_D(z-1)}{Tz} \cdot \frac{k_1 T^2 (z+1)}{2(z-1)^2}} = \\
 &= \frac{2Tz(z-1)^2}{2Tz(z-1)^2 + [k_P Tz + k_P T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2 (z+1)}
 \end{aligned}$$

Trvalá regulační odchylka pro žádanou veličinu pro tři testovací signály:

1. Skok polohy

$$\begin{aligned}
 e_w(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{2Tz(z-1)^2}{2Tz(z-1)^2 + [k_P Tz + k_P T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2 (z+1)} \cdot \frac{zw_0}{(z-1)} \right] = 0
 \end{aligned}$$

2. Skok rychlosti

$$\begin{aligned} e_w(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{2Tz(z-1)^2}{2Tz(z-1)^2 + [k_p Tz + k_p T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2(z+1)} \cdot \frac{Tzw_1}{(z-1)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

3. Skok zrychlení

$$\begin{aligned} e_w(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{we}(z) \cdot W(z)] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{2Tz(z-1)^2}{2Tz(z-1)^2 + [k_p Tz + k_p T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2(z+1)} \cdot \frac{T^2 z(z+1)w_2}{(z-1)^3} \right] = \underline{\underline{\frac{2w_2}{k_1 k_p}}} \end{aligned}$$

Trvalá regulační odchylka pro poruchovou veličinu (porucha v_1 vstupuje před soustavou):

Nyní určíme odchylkový přenos poruchy.

$$\begin{aligned} G_{v1e}(z) &= \frac{-G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{-\frac{k_1 T^2(z+1)}{2(z-1)^2}}{\frac{2Tz(z-1)^2 + [k_p Tz + k_p T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2(z+1)}{2Tz(z-1)^2}} = \\ &= \frac{-k_1 T^3 z(z+1)}{2Tz(z-1)^2 + [k_p Tz + k_p T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2(z+1)} \end{aligned}$$

1. Skok polohy

$$\begin{aligned} e_{v1}(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot \frac{zV_{10}}{(z-1)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-k_1 T^3 z(z+1)}{2Tz(z-1)^2 + [k_p Tz + k_p T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2(z+1)} \cdot \frac{zV_{10}}{(z-1)} \right] = \underline{\underline{-\frac{V_{10}}{k_p}}} \end{aligned}$$

2. Skok rychlosti

$$\begin{aligned} e_{v1}(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot \frac{TzV_{11}}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-k_1 T^3 z(z+1)}{2Tz(z-1)^2 + [k_p Tz + k_p T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2(z+1)} \cdot \frac{TzV_{11}}{(z-1)^2} \right] = \underline{\underline{-\infty}} \end{aligned}$$

3. Skok zrychlení

$$\begin{aligned} e_{v1}(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot V(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot G_{v1e}(z) \cdot \frac{T^2 z(z+1)V_{12}}{(z-1)^3} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{-k_1 T^3 z(z+1)}{2Tz(z-1)^2 + [k_p Tz + k_p T_D(z-1)] \cdot k_1 T^2(z+1)} \cdot \frac{T^2 z(z+1)V_{12}}{(z-1)^3} \right] = \underline{\underline{-\infty}} \end{aligned}$$

8 Syntéza jednorozměrových diskrétních regulačních obvodů

Syntézou regulačního obvodu rozumíme návrh struktury regulátoru a jeho parametrů tak, aby byla dosažena požadovaná kvalita regulačního pochodu.

8.1 Malá, střední a velká vzorkovací perioda

Při analýze a syntéze (návrhu regulátoru) diskrétních regulačních obvodů vycházíme ze tří přístupů dle velikosti vzorkovací periody.

a) Pro malé vzorkovací periody T

Jak z názvu vyplývá tento přístup je možno uvažovat při malé vzorkovací periodě, převodník bereme jako součást regulátoru.

Malou vzorkovací periodu T můžeme definovat dle vztahů [Balátě, 2003]:

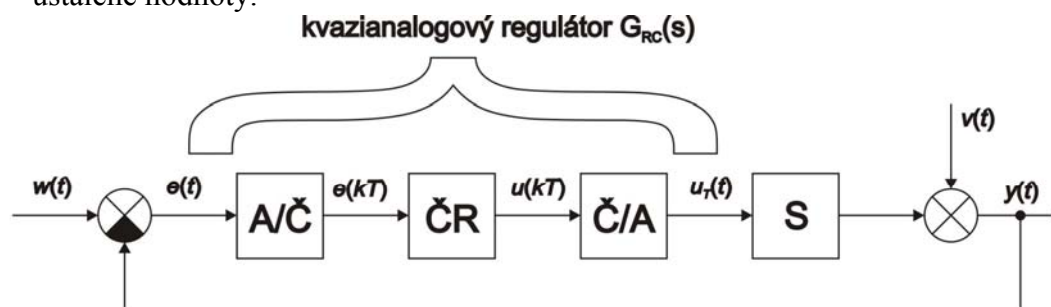
$$T \ll 0,25T_d \quad (8.1)$$

$$T \ll 0,17t_{95} \quad (8.2)$$

kde

T_d – dopravní zpoždění regulované soustavy,

t_{95} – doba, za kterou přechodová charakteristika regulované soustavy dosáhne 95 % ustálené hodnoty.



Obr. 8. 1 Blokové schéma regulačního obvodu s kvazianalogovým regulátorem

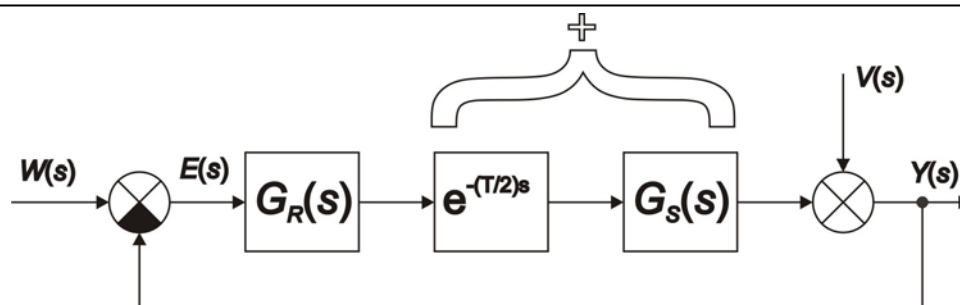
Tento přístup je velice častý a je užívám v 80% případů, kdy diskrétní regulační obvod převádíme na spojitý regulační obvod.

Na obr. 1. 2 je vidět, že při malé vzorkovací periodě může být tvarovaná akční veličina $u_T(t)$ nahrazena spojitou akční veličinou $u(t)$, která bude zpožděná o polovinu vzorkovací periody, tzn. $u(t - T/2)$. Toto nahrazení je tedy tím lepší, čím je menší vzorkovací perioda T .

Díky tomuto faktu je možno původní regulační obvod s číslicovým regulátorem na obr. 8. 1 nahradit náhradním blokovým schématem, kdy přenos regulátoru $G_R(s)$ bude obsahovat dopravní zpoždění o velikosti $T/2$, tj.

$$G_{RC}(s) = G_R(s)e^{-\frac{T}{2}s} \quad (8.3)$$

Prakticky se však toto dopravní zpoždění přiřazuje regulované soustavě, viz obr. 8. 2.



Obr. 8. 2 Náhradní blokové schéma regulačního obvodu s číslicovým regulátorem

Jestliže se při analýze nebo syntéze tohoto náhradního regulačního obvodu použije metoda nevhodná pro práci s dopravním zpožděním je možno provést aproximaci (nahrazení přibližnou hodnotou) tohoto dopravního zpoždění dle vztahů

$$e^{-\frac{T}{2}s} \approx \frac{1 - \frac{T}{4}s}{1 + \frac{T}{4}s} \quad (8.4)$$

$$e^{-\frac{T}{2}s} \approx \frac{1}{1 + \frac{T}{2}s} \quad (8.5)$$

Při použití této aproximace je nutné mít na paměti, že se jedná o přibližný přístup.

Příklad 8.1

Navrhněte regulátor pro soustavu danou přenosem $G_s(s) = \frac{2}{5s+1} e^{-6s}$. Regulátor navrhněte nejprve pro vzorkovací periodu $T = 0$ s a poté pro použití s malou vzorkovací periodou $T = 0,5$ s. Syntézu proveďte pomocí metody požadovaného modelu (viz kapitola 8.2). Relativní překmit požadujeme okolo 5 %.

Řešení:

- $T = 0$ s

Nyní navrhujeme stavitelné parametry regulátoru pomocí metody požadovaného modelu (tab. 8. 3). Použijeme regulátor typu PI.

$$T_I^* = T_1$$

$$T_I^* = T_1 = 5 \text{ s}$$

Pro překmit 5 % zjistíme parametr $\beta = 1,944$ z tab. 8. 4.

$$a = \frac{1}{\beta T_d} = \frac{1}{1,944 \cdot 6} \doteq 0,086$$

$$k_p = \frac{a T_I}{k_1} = \frac{0,086 \cdot 5}{2} = 0,215$$

- $T = 0,5$ s

Nyní navrhujeme stavitelné parametry analogového regulátoru PI pomocí metody požadovaného modelu. Návrh však bude proveden pro malou vzorkovací periodu, tzn. dopravní zpoždění soustavy, zvýšíme o $T/2$. Soustava tedy bude mít tvar

$$G_s(s) = \frac{2}{5s+1} e^{-6,25s}$$

Nyní vypočteme integrační časovou konstantu.

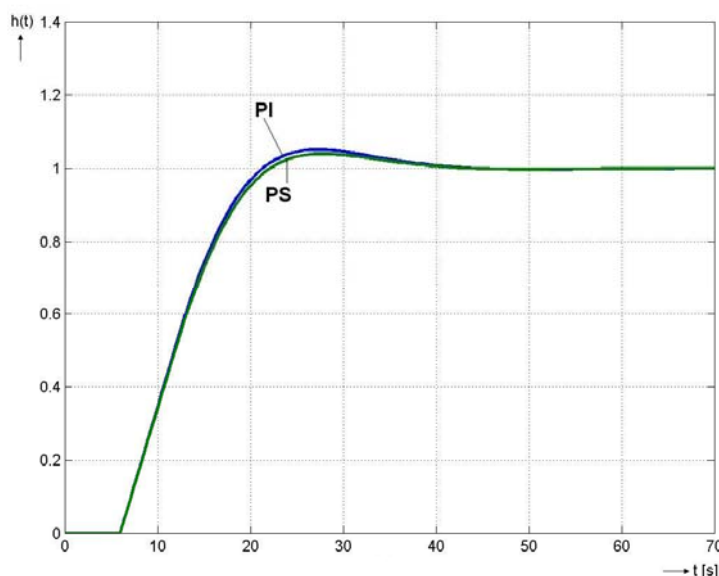
$$T_I^* = T_1$$

$$T_I^* = 5 \text{ s}$$

Pro překmit 5 % opět použijeme parametr $\beta = 1,944$.

$$a = \frac{1}{\beta T_d} = \frac{1}{1,944 \cdot 6,25} \doteq 0,082$$

$$k_P = \frac{a T_I}{k_1} = \frac{0,082 \cdot 5}{2} = 0,205$$



Obr. 8. 3 Přebodová charakteristika z příkladu 8.1

Závěr:

Jak je vidět dle obr. 8. 3, že průběh regulace odpovídá požadavkům. Při použití regulátoru PI byl při simulaci určen relativní překmit $\kappa = 5,12 \%$. Při seřizování regulačního obvodu pro použití PS regulátoru jsme stavitelné parametry nastavovali jako pro spojitý PI regulátor, ale soustava měla dopravní zpoždění větší o $T/2$. V regulačním obvodu je poté pro vypočtené hodnoty použit regulátor typu PS. Pokud použijeme regulátor PS je relativní překmit $\kappa = 3,96 \%$.

b) Pro střední vzorkovací periody T

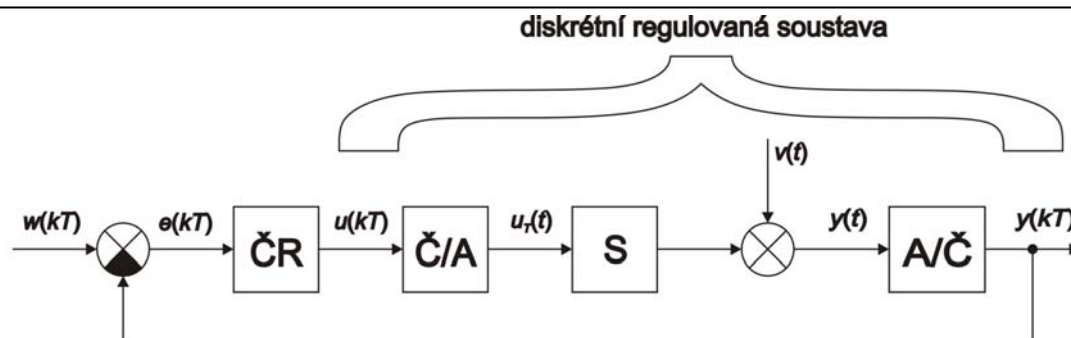
Tento přístup je možno uvažovat při střední vzorkovací periodě, převodníky jsou součástí diskrétní regulované soustavy a obvod je tedy považován za diskrétní.

Střední vzorkovací periodu T můžeme definovat dle vztahů [Balátě, 2003]:

$$T < 0,25T_d \quad (8. 6)$$

$$T < 0,17t_{95} \quad (8. 7)$$

V tomto případě využíváme při syntéze Z-transformaci.



Obr. 8. 4 Blokové schéma lineárního diskrétního regulačního obvodu

Pokud chceme provádět analýzu a syntézu takového regulačního obvodu provedeme **diskretizaci přenosu soustavy**. V našem případě mluvíme o přesné diskretizaci, kdy je spojitý přenos soustavy $G_s(s)$ převeden na přenos v diskrétním tvaru $G_s(z)$ dle vztahu (při použití vzorkovače a tvarovače 0-tého řádu)

$$G_s(s) \rightarrow G_s(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_s(s)}{s} \right\} \right\} \Bigg|_{t=kT} \quad (8. 8)$$

V případě střední vzorkovací periody se využívají tzv. **transformační vztahy** (8. 9).

$$z = \frac{1 + s \frac{T}{2}}{1 - s \frac{T}{2}}, \text{ resp. } s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (8. 9)$$

Diskrétní přenos $G_s(z)$ regulované soustavy transformujeme použitím transformačního vztahu (8. 9) z oblasti komplexní proměnné z do oblasti komplexní proměnné s a získáme náhradní přenos regulované soustavy $G'_s(s)$.

$$G_s(s) \rightarrow G'_s(s) = G_s(z) \Bigg|_{z = \frac{1 + s \frac{T}{2}}{1 - s \frac{T}{2}}} \quad (8. 10)$$

Zvolíme typ spojitého regulátoru $G_R(s)$ a dle metod syntézy pro spojitý regulační obvod určíme hodnoty jeho stavitelných parametrů. Získaný přenos regulátoru $G_R(s)$ převedeme dle transformačního vztahu (8. 9) z oblasti komplexní proměnné s do oblasti komplexní proměnné z .

$$G_R(s) \rightarrow G_R(z) = G_R(s) \Bigg|_{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}} \quad (8. 11)$$

Příklad 8.2

Pro regulovanou soustavu s přenosem $G_s(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}$ navrhnete číslicový PI regulátor.

Použijte postup pro seřízení diskrétních regulačních obvodů se střední vzorkovací periodou T .

Řešení:

Nejprve provedeme diskretizaci přenosu zadané soustavy.

$$G_s(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_s(s)}{s} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

$$G_s(z) = \frac{k_1(1-c)}{z-c}; \quad c = e^{-T/T_1}$$

Diskretizovanou soustavu dle pravidel zpětně transformujeme do oblasti komplexní proměnné s na přenos $G'_s(s)$. Použijeme transformaci ve tvaru

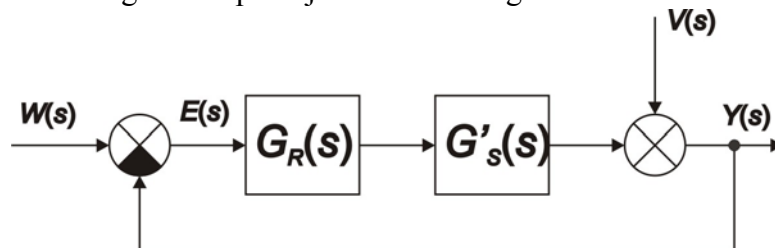
$$z = \frac{1 + s \frac{T}{2}}{1 - s \frac{T}{2}}$$

Po úpravě tedy dostaneme transformovaný přenos regulované soustavy ve tvaru

$$G'_s(s) = G_s(z) \Big|_{z = \frac{1 + s \frac{T}{2}}{1 - s \frac{T}{2}}}$$

$$G'_s(s) = \frac{k_1 \left(1 - \frac{T}{2} s \right)}{\frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2} s + 1}; \quad c = e^{-T/T_1}$$

Pro návrh a seřízení regulátoru použijeme schéma regulačního obvodu na obr. 8. 5.



Obr. 8. 5 Schéma spojitého regulačního obvodu s analogovým regulátorem pro transformovanou regulovanou soustavu

Transformovaný přenos regulované soustavy $G'_s(s)$ uvažuje již v sobě číslicově analogový převodník (tj. vzorkovač a tvarovač nultého řádu).

V souladu s obr. 8. 5 je přenos otevřeného regulačního obvodu dán vztahem [přenos PI regulátoru je $G_R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$]

$$G'_o(s) = G_R(s) \cdot G'_s(s) = \frac{k_p k_1 (T_I s + 1) \left(1 - \frac{T}{2} s \right)}{T_I s \left(\frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2} s + 1 \right)}$$

Pro výpočet parametrů regulátoru PI použijeme metodu optimálního modulu. Nejdříve provedeme kompenzaci časových konstant, tj.

$$T_I^* = \frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2}$$

Přenos otevřeného regulačního obvodu potom bude

$$G_o'(s) = \frac{k_p k_1 \left(1 - \frac{T}{2}s\right)}{\frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2}s}$$

Přenos řízení po úpravě je

$$G'_{wy}(s) = \frac{G_o'(s)}{1 + G_o'(s)} = \frac{-\frac{T}{2}k_p k_1 s + k_p k_1}{\left(\frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2} - \frac{T}{2}k_p k_1\right)s + k_p k_1}$$

kde

$$a_0 = b_0 = k_p k_1 \Rightarrow q = 1$$

$$a_1 = \frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2} - \frac{T}{2}k_p k_1 \quad A_1 = a_1^2$$

$$b_1 = -\frac{T}{2}k_p k_1 \quad B_1 = b_1^2$$

Protože $q = 1$ u metody optimálního modulu vycházíme z rovnic

$$A_1 = B_1 \Rightarrow \left(\frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2} - \frac{T}{2}k_p k_1\right)^2 = \frac{T^2}{4}k_p^2 k_1^2$$

$$\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2 \cdot \frac{T^2}{4} - \frac{T^2}{2} \frac{1+c}{1-c} k_p k_1 + \frac{T^2}{4} k_p^2 k_1^2 = \frac{T^2}{4} k_p^2 k_1^2$$

Po úpravě je hodnota zesílení regulátoru

$$k_p^* = \frac{1}{2k_1} \cdot \frac{1+c}{1-c}$$

Dopočtené parametry k_p^* , T_I^* dosadíme přímo do přenosu číslicového PI regulátoru daného vztahem

$$G_R(z) = k_p^* \left(1 + \frac{T}{T_I^*} \cdot \frac{z}{z-1}\right)$$

Závěr:

Na obr. 8. 6 je průběh výstupní veličiny $y(t)$, jako odezva na jednotkový skok žádané veličiny. Byly uvažovány tyto hodnoty konstant:

$$k_1 = 2,$$

$$T_1 = 5 \text{ s},$$

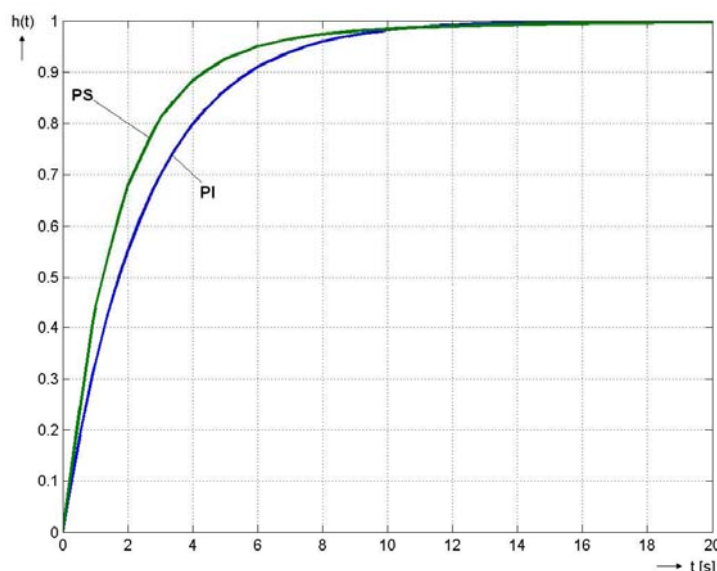
$$T = 1 \text{ s},$$

$$c = e^{-T/T_1} \doteq 0,819,$$

$$T_I^* = \frac{1+c}{1-c} \cdot \frac{T}{2} \doteq 5,025 \text{ s}$$

$$k_p^* = \frac{1}{2k_1} \cdot \frac{1+c}{1-c} \doteq 1,01$$

Pro srovnání je uveden průběh výstupní veličiny při použití analogového regulátoru PI s parametry $k_p^* = 1$, $T_I^* = 5 \text{ s}$. Z průběhu vyplývá, že oba regulační obvody jsou stabilní.



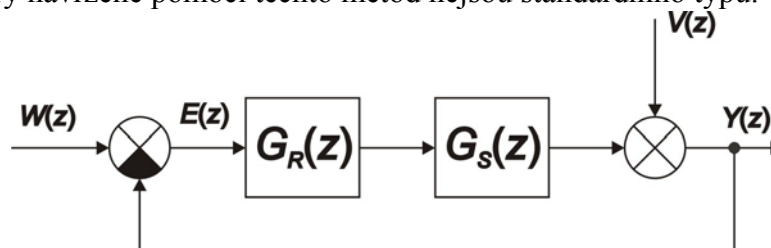
Obr. 8. 6 Průběhy výstupních veličin z příkladu 8.2

c) Pro velké vzorkovací periody T

Za velkou vzorkovací periodu T považujeme takovou periodu T , která nevyhovuje podmínkám (8. 1), (8. 2), (8. 6) a (8. 7).

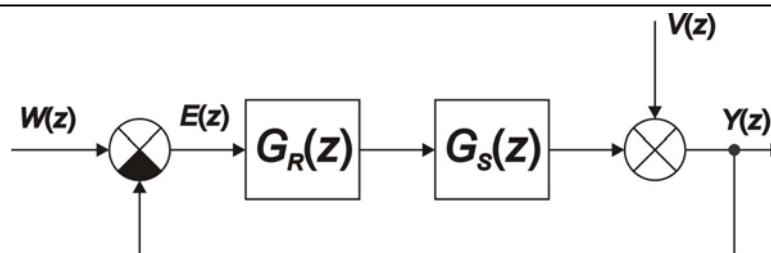
V tomto případě, na rozdíl od předchozích přibližných metod analýzy a syntézy diskrétních regulačních obvodů získáme přesné výsledky v okamžicích vzorkování [Balátě, 2003]. Návrhy u diskrétního regulačního obvodu se provádí pouze v oblasti komplexní proměnné z , tzn. provedeme diskretizaci soustavy a pracujeme v oblasti komplexní proměnné z . Dále je nutno podotknout, že při zvyšování vzorkovací periody dochází ve větší míře k destabilizaci diskrétního regulačního obvodu.

V kapitole 8.4 jsou uvedeny metody (návrh číslicových regulátorů přímou syntézou na konečný počet kroků a Dahlinův regulátor), které jsou vhodné pro libovolnou vzorkovací periodu T , ale z výše uvedených důvodů je lepší dodržet vztahy (8. 6) a (8. 7) pro její volbu. Regulátory navržené pomocí těchto metod nejsou standardního typu.

Obr. 8. 7 Jednorozměrový diskrétní lineární regulační obvod pro velkou vzorkovací periodu T

8.2 Metoda požadovaného modelu

Metodou požadovaného modelu (dříve metoda inverze dynamiky) je možné provádět syntézu lineárních regulačních obvodů i s dominantním dopravním zpožděním [Vítečková, 2000]. Seřízení regulátoru touto metodou zaručuje nulovou trvalou regulační odchylku způsobenou skokovou změnou polohy žádané hodnoty w (tudiž také poruchy v působící na výstupu regulované soustavy), což odpovídá blokovému schématu regulačního obvodu podle obr. 8. 8 [Vítečková, 1998].



Obr. 8. 8 Regulační obvod s číslicovým regulátorem a diskretizovanou soustavou

V případě této metody předpokládáme použití konvenčních regulátorů jak pro spojitou, tak i pro diskretní regulaci, viz kapitola 3.1, tab. 8. 1.

Tab. 8. 1 Přenosy konvenčních typů regulátorů

Typ regulátoru	Analogový regulátor (přenos)	Číslicový regulátor (přenos)
P	k_p	k_p
I (S)	$\frac{1}{T_I s}$	$\frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}$
PI (PS)	$k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$	$k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}\right)$
PD	$k_p (1 + T_D s)$	$k_p \left(1 + \frac{T_D}{T} \frac{z-1}{z}\right)$
PID (PSD)	$k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$	$k_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T} \frac{z-1}{z}\right)$

Metoda požadovaného modelu umožňuje seřadit regulátor pro danou soustavu, tak aby byl zaručen požadovaný relativní překmit κ v rozsahu 0 až 50 %.

Aby bylo možné metodu požadovaného modelu použít pro seřízení regulátoru, musí být přenos regulované soustavy $G_S(s)$ v jednom ze základních tvarů tab. 8. 3, jinak je nutno přenos upravit dle tab. 8. 2, nebo jiným způsobem [Vítečková, Víteček, 2006].

Zde si uvedeme některé postupy, jak získat přenosy regulovaných soustav ve tvaru vhodném pro metodu požadovaného modelu

$$G_S(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_{d1}s} \quad (8.12)$$

nebo

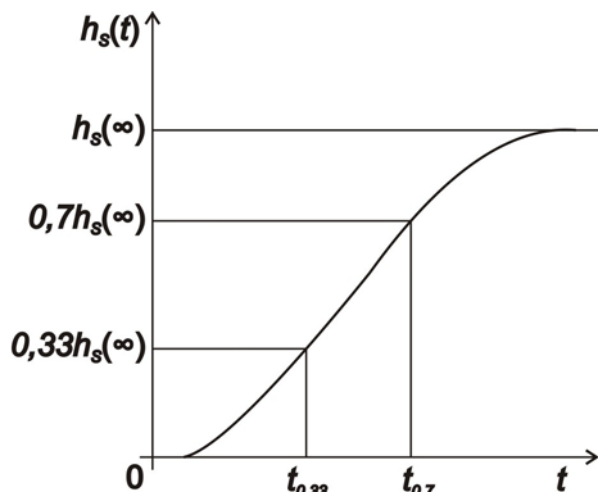
$$G_S(s) = \frac{k_1}{(T_2 s + 1)^2} e^{-T_{d2}s} \quad (8.13)$$

Dopravní zpoždění T_{d1} , resp. T_{d2} regulované soustavy je buďto přirozené nebo může vzniknout aproximací setrvačnosti vyššího řádu. Koeficient k_1 je dán ustáleným stavem přechodové charakteristiky, tedy

$$k_1 = \frac{h_s(\infty)}{\Delta u} \quad (8.14)$$

kde Δu je velikost skoku akční veličiny.

Další parametry T_1 , T_2 , T_{d1} , T_{d2} lze určit z přechodové charakteristiky soustavy (obr. 8. 9).



Obr. 8. 9 Přechodová charakteristika soustavy

Parametry určíme dle vztahů

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1,245(t_{0,7} - t_{0,33}) \\ T_{d1} &= 1,498t_{0,33} - 0,498t_{0,7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_{d1}s} \quad (8. 15)$$

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= 0,794(t_{0,7} - t_{0,33}) \\ T_{d2} &= 1,937t_{0,33} - 0,937t_{0,7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{k_1}{(T_2 s + 1)^2} e^{-T_{d2}s} \quad (8. 16)$$

Při identifikaci aperiodických soustav např. Strejcovou metodou [Noskievič, 1992; Švarc, Šeda, Vítečková, 2007] získáme přenos soustavy ve tvaru

$$G_s(s) = \frac{k_1}{(T_n s + 1)^n} e^{-T_{dn}s} \quad (8. 17)$$

Přenosy soustav vyššího řádu lze převést dle tab. 8. 2 v souladu se schématem

$$\frac{1}{(T_n s + 1)^n} e^{-T_{dn}s} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{T_1 s + 1} e^{-T_{d1}s} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(T_2 s + 1)^2} e^{-T_{d2}s} \quad (8. 18)$$

Tab. 8. 2 Tabulka pro převod přenosů v souladu se schématem (8. 18)

$\frac{1}{(T_n s + 1)^n} e^{T_{dn}s}$	n	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{T_1 s + 1} e^{T_{d1}s}$	$\frac{T_1}{T_n}$	1	1,568	1,98	2,32	2,615	2,881
	$\frac{T_{d1} - T_{dn}}{T_n}$	0	0,552	1,232	1,969	2,741	3,537
$\frac{1}{(T_2 s + 1)^2} e^{T_{d2}s}$	$\frac{T_2}{T_n}$	0,638	1	1,263	1,48	1,668	1,838
	$\frac{T_{d2} - T_{dn}}{T_n}$	*-0,352	0	0,535	1,153	1,821	2,523

$$* T_{d1} \geq 0,352T_1$$

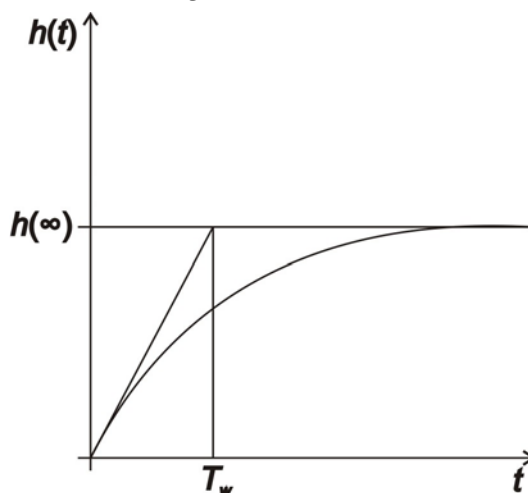
Metoda požadovaného modelu předpokládá, že požadovaný přenos řízení má tvar pro $T_d = 0$ (diskrétní, spojitě)

$$G_{wy}(z) = \frac{1 - c_w}{z - c_w}; \quad c_w = e^{-T/T_w} \quad (8.19)$$

$$G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1}$$

Pro regulovanou soustavu bez dopravního zpoždění $T_d = 0$ je předpokládán průběh přechodové charakteristiky $h(t)$ uzavřeného regulačního obvodu na obr. 8. 10, tedy bez relativního překmitu κ . V případě, že tedy soustava nemá dopravní zpoždění T_d , pak musíme navrhnout časovou konstantu T_w uzavřeného regulačního obvodu. Vzorkovací periodu poté volíme dle vztahu

$$T < \frac{1}{3}T_w \quad (8.20)$$



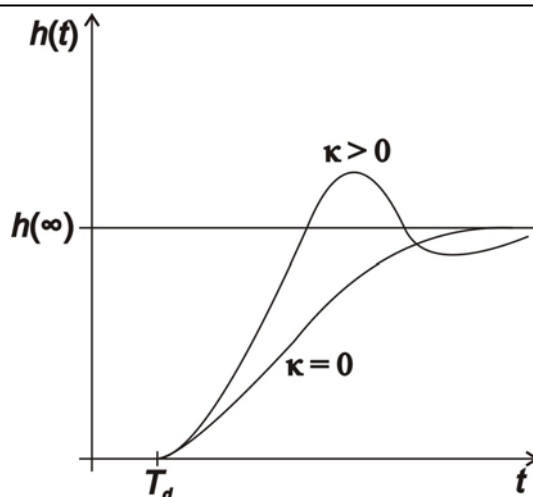
Obr. 8. 10 Přechodová charakteristika uzavřeného regulačního obvodu bez dopravního zpoždění

Metoda požadovaného modelu předpokládá, že požadovaný přenos řízení má tvar pro $T_d > 0$ (diskrétní, spojitě)

$$G_{wy}(z) = \frac{aT}{z - 1 + aTz^{-d}} z^{-d}; \quad d = \frac{T_d}{T} \quad (8.21)$$

$$G_{wy}(s) = \frac{a}{s + ae^{-T_d s}} e^{-T_d s}$$

Pro regulovanou soustavu s dopravním zpožděním $T_d > 0$ je předpokládán průběh přechodové charakteristiky $h(t)$ uzavřeného regulačního obvodu na obr. 8. 11, tedy se zvoleným relativním překmitem κ v rozsahu 0 až 50 %.



Obr. 8. 11 Přejchodová charakteristika uzavřeného regulačního obvodu s dopravním zpožděním

Při práci s číslicovými regulátory je nutno určit vzorkovací periodu a to v souladu s jedním z pravidel (8. 22) a (8. 23).

$$T \leq 0,3T_d \quad (8. 22)$$

$$T \leq \left(\frac{1}{15} \div \frac{1}{6} \right) t_{0,95} \quad (8. 23)$$

Tab. 8. 3 Výpočet optimálních hodnot stavitelných parametrů regulátorů metodou požadovaného modelu (MPM)

REGULOVANÁ SOUSTAVA	REGULÁTOR < ANALOGOVÝ $T = 0$ ČÍSLICOVÝ $T > 0$				
	Typ	k_p^*		T_I^*	T_D^*
		$T_d = 0$	$T_d > 0$		
$\frac{k_1}{s} e^{-T_d s}$	P	$\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{a}{k_1}$	-	
$\frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s}$	PI	$\frac{2T_I^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_I^*}{k_1}$	$T_1 - \frac{T}{2}$	-
$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-T_d s}$	PD	$\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{a}{k_1}$	-	$T_1 - \frac{T}{2}$
$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_d s}$ $T_1 \geq T_2$	PID	$\frac{2T_I^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_I^*}{k_1}$	$T_1 + T_2 - T$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$
$\frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} e^{-T_d s}$ $0,5 < \xi_0 \leq 1$	PID	$\frac{2T_I^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_I^*}{k_1}$	$2\xi_0 T_0 - T$	$\frac{T_0}{2\xi_0} - \frac{T}{4}$

Tab. 8. 4 Hodnoty koeficientů α a β pro relativní překmit κ pro MPM

κ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
α	1,282	0,984	0,884	0,832	0,763	0,697	0,669	0,640	0,618	0,599	0,577
β	2,718	1,944	1,720	1,561	1,437	1,337	1,248	1,172	1,104	1,045	0,992

Pro parametr a platí vztah

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d} \quad (8. 24)$$

kde α a β jsou dány tab. 8. 4.

Příklad 8.3

Pro soustavu $G_s(s) = \frac{2(2s+1)}{(10s+1)(5s+1)(s+1)} e^{-6s}$ navrhnete číslicový regulátor pomocí metody požadovaného modelu, tak aby byl zajištěn překmit $\kappa = 0,1$ (10 %).

Řešení:

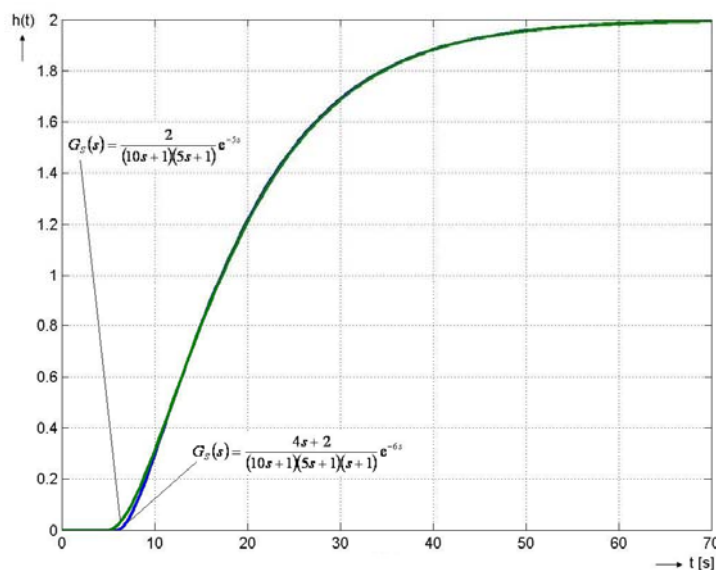
Označme $T_1 = 10$ s, $T_2 = 5$ s, $T_3 = 1$ s, $T_{d1} = 6$ s, $T_{10} = 2$ a $k_1 = 2$

Zadaný přenos obsahuje ve jmenovateli jeden nedominantní člen $T_3 = 1$ s. Tento přenos můžeme upravit, tak že tento nedominantní člen převedeme do dopravního zpoždění $T_{d2} = T_{d1} + T_3 = 6 + 1 = 7$ s a získáme tvar

$$G_s(s) = \frac{2(2s+1)}{(10s+1)(5s+1)} e^{-7s}$$

a člen v čitateli přenosu opět přesuneme do dopravního zpoždění $T_{d3} = T_{d2} + T_{10} = 7 + 2 = 9$ s a získáme [Vítečková, Víteček, 2006]

$$G_s(s) = \frac{2}{(10s+1)(5s+1)} e^{-9s}$$



Obr. 8. 12 Přechodová charakteristika zadané a aproximované soustavy

Dle obr. 8. 12 je vidět, že aproximace původní soustavy proběhla zcela v pořádku, neboť obě přechodové charakteristiky soustav jsou téměř totožné.

Z aproximovaného přenosu soustavy vyplývá: $T_1 = 10$ s, $T_2 = 5$ s a $T_d = 5$ s.

Dle tab. 8. 3 vidíme, že pro soustavu s tímto přenosem je vhodné použít PSD regulátor. Nyní můžeme určit vzorkovací periodu T podle vztahu

$$T \leq 0,3T_d$$

$$T \leq 0,3 \cdot 5$$

$$T \leq 1,5 \text{ s}$$

Pro následující kroky zvolíme $T = 0,5$ s.

Vypočteme integrační časovou konstantu regulátoru T_I .

$$T_I^* = T_1 + T_2 - T$$

$$T_I^* = 10 + 5 - 0,5 = 14,5 \text{ s}$$

Vypočteme derivační časovou konstantu regulátoru T_D .

$$T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$$

$$T_D^* = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5} - \frac{0,5}{4} \doteq 3,21 \text{ s}$$

Vypočteme zesílení regulátoru k_p . Pro tento výpočet musíme určit hodnotu a dle tab. 8. 4.

Koeficient α pro požadovaný překmit je $\alpha = 0,884$, koeficient β pro požadovaný překmit je $\beta = 1,720$.

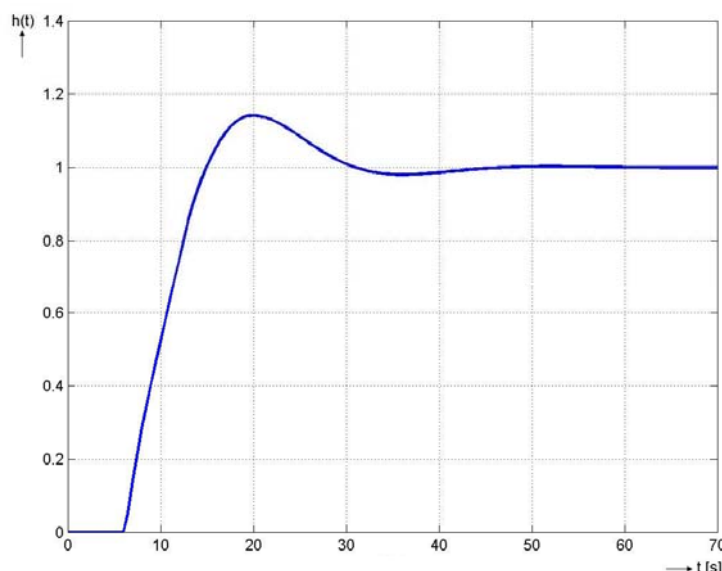
$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d}$$

$$a = \frac{1}{0,884 \cdot 0,5 + 1,720 \cdot 5} \doteq 0,11$$

Nyní tedy můžeme vypočítat koeficient k_p .

$$k_p = \frac{a T_I^*}{k_1}$$

$$k_p = \frac{0,11 \cdot 14,5}{2} \doteq 0,8$$



Obr. 8. 13 Přejchodová charakteristika uzavřeného regulačního obvodu z příkladu 8.3

Závěr:

Jak je vidět dle obr. 8. 13 získali jsme regulační pochod, u kterého je relativní překmit vyšší než byl požadavek $\kappa = 14,9 \%$.

Příklad 8.4

Pro regulovanou soustavu s dopravním zpožděním $G_s(s) = \frac{3}{(6s+1)^4} e^{-12s}$ navrhnete číslíkový regulátor PS a PSD pomocí metody požadovaného modelu, tak aby byl zajištěn překmit $\kappa = 0,1$ (10 %) pro vzorkovací periodu $T = 2$ s.

Řešení:

Vzhledem k tomu, že se jedná o soustavu vyššího řádu, musíme určit náhradní přenosy ve tvaru (8. 12) a (8. 13) za použití tab. 8. 2.

Ze zadaného přenosu regulované soustavy můžeme určit: $n = 4$, $k_1 = 3$, $T_4 = 6$ s, $T_{d4} = 12$ s.

- **PS regulátor**

Pro přenos ve tvaru $G_s(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_{d1}s}$ z tab. 8. 2 získáme hodnoty:

$$\frac{T_1}{T_4} = 2,320 \Rightarrow T_1 = 2,320 \cdot 6 = 13,92 \text{ s}$$

$$\frac{T_{d1} - T_{d4}}{T_4} = 1,969 \Rightarrow T_{d1} = 1,969 \cdot 6 + 12 = 23,814 \text{ s}$$

Získáváme tedy aproximaci původní soustavy ve tvaru $G_s(s) \approx \frac{3}{13,92s + 1} e^{-23,814s}$

zobrazenou s původní soustavou na obr. 8. 14.

Pro nově získanou soustavu z tab. 8. 3 a tab. 8. 4 získáme:

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d}$$

$$a = \frac{1}{0,884 \cdot 2 + 1,720 \cdot 23,814} \doteq 0,023$$

$$T_I^* = T_1 - \frac{T}{2}$$

$$T_I^* = 13,92 - \frac{2}{2} = 12,92 \text{ s}$$

$$k_P^* = \frac{a T_I^*}{k_1} = \frac{0,023 \cdot 12,92}{3} \doteq 0,099$$

Průběh regulace je zobrazen na obr. 8. 15.

- **PSD regulátor**

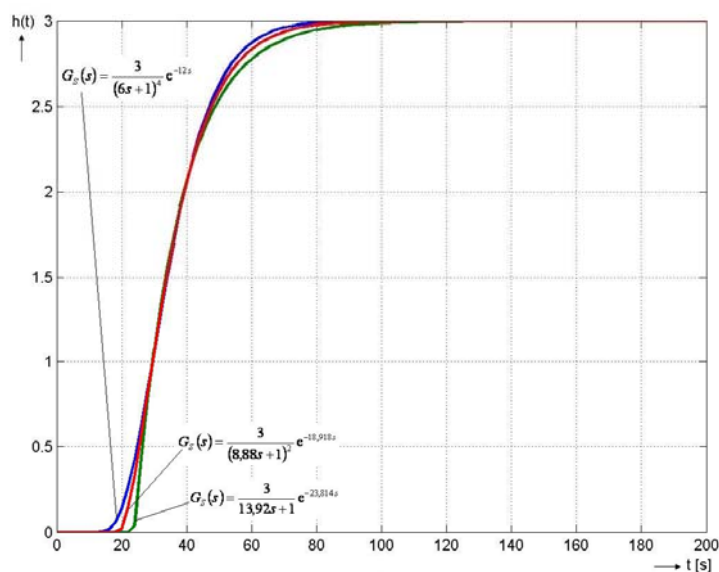
Pro přenos ve tvaru $G_s(s) = \frac{k_1}{(T_2 s + 1)^2} e^{-T_{d2}s}$ z tab. 8. 2 získáme hodnoty:

$$\frac{T_2}{T_4} = 1,480 \Rightarrow T_2 = 1,480 \cdot 6 = 8,88 \text{ s}$$

$$\frac{T_{d2} - T_{d4}}{T_4} = 1,153 \Rightarrow T_{d2} = 1,153 \cdot 6 + 12 = 18,918 \text{ s}$$

Získáváme tedy aproximaci původní soustavy ve tvaru $G_s(s) \approx \frac{3}{(8,88s + 1)^2} e^{-18,918s}$

zobrazenou s původní soustavou na obr. 8. 14.



Obr. 8. 14 Přechodová charakteristika zadané soustavy a aproximovaných soustav

Pro nově získanou soustavu z tab. 8. 3 a tab. 8. 4 získáme:

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_d}$$

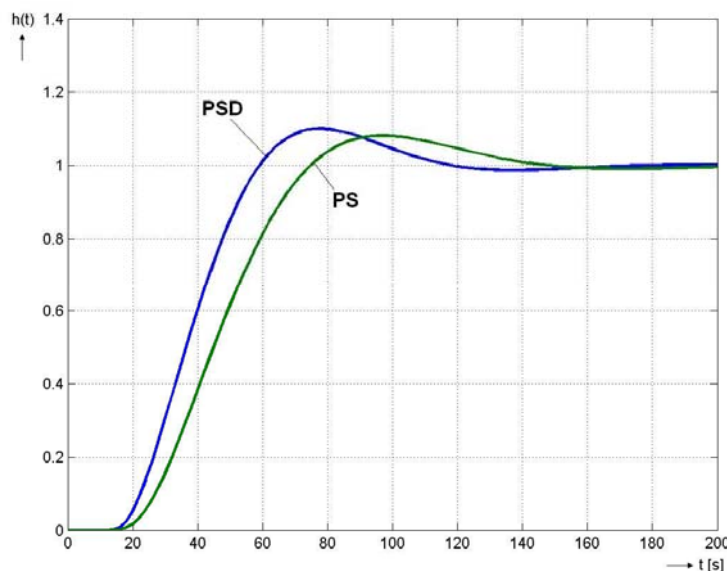
$$a = \frac{1}{0,884 \cdot 2 + 1,720 \cdot 18,918} \doteq 0,029$$

$$T_I^* = T_1 + T_2 - \frac{T}{2} = 8,88 + 8,88 - \frac{2}{2} = 16,76 \text{ s}$$

$$T_D^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4} = \frac{8,88^2}{8,88 + 8,88} - \frac{2}{4} = 3,94 \text{ s}$$

$$k_p^* = \frac{a T_I^*}{k_1} = \frac{0,029 \cdot 16,76}{3} \doteq 0,16$$

Průběh regulace je zobrazen na obr. 8. 15.



Obr. 8. 15 Přechodová charakteristika z příkladu 8.4

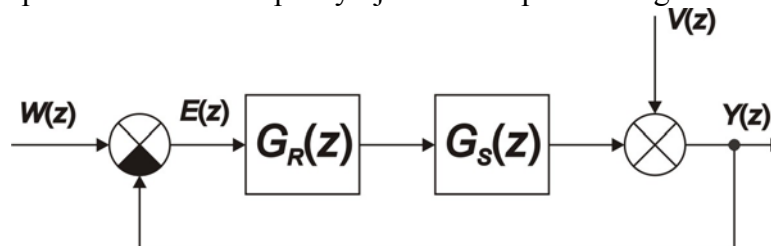
Závěr:

Jak je vidět na průběhu regulace (obr. 8. 15) metoda požadovaného modelu dává velmi kvalitní výsledky a zároveň je dodržen požadovaný překmit 10 %. V případě PS regulátoru jsme získali relativní překmit $\kappa = 8,12 \%$ a při použití PSD regulátoru je $\kappa = 10,08 \%$.

8.3 Metoda optimálního modulu

Metodou optimálního modulu je možné provádět syntézu lineárních regulačních obvodů, které neobsahují dopravní zpoždění. Metoda je užívána jak pro spojitě, tak i pro diskrétní regulační obvody. V případě diskrétních regulačních obvodů můžeme uvažovat regulační obvod dle obr. 8. 16 [Vítečková, Víteček, 2006].

Metoda optimálního modulu se používá v případě, když stupeň statismu je $q \leq 1$, nejčastěji však v případech kdy $q = 1$. Metoda je často používána pro regulaci elektrických pohonů. Metoda optimálního modulu poskytuje relativní překmit regulované veličiny 5 %.



Obr. 8. 16 Regulační obvod s číslicovým regulátorem a diskretizovanou soustavou

Metodou optimálního modulu stejně jako metodou požadovaného modelu seřizujeme diskrétní regulátory konvenčního typu (tab. 8. 1).

Pro vybrané regulované soustavy je sestavena tab. 8. 5.

Tab. 8. 5 Hodnoty stavitelných parametrů pro metodu optimálního modulu

Regulovaná soustava		Regulátor: Analogový ($T = 0$), Číslicový ($T > 0$)			
		TYP	k_p^*	T_I^*	T_D^*
1	$\frac{k_1}{T_1 s + 1}$	I	-	$2k_1(T_1 - 0,5T)$	-
2	$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}$	P	$\frac{1}{2k_1 T_1}$	-	-
3	$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	PI	$\frac{T_I^*}{2k_1 T_2}$	$T_1 - 0,5T$	-
4	$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	PD	$\frac{1}{2k_1(T_2 + 0,5T)}$	-	$T_1 - 0,5T$
5	$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$ $T_1 \geq T_2 \geq T_3$	PID	$\frac{T_I^*}{2k_1(T_3 + 0,5T)}$	$T_1 + T_2 - T$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$

Při seřizování pomocí metody optimálního modulu se využívá tzv. **kompensace časových konstant**, která je založena na vykrácení jednoho nebo dvou stabilních dvojčlenů regulované soustavy jedním dvojčlenem u regulátoru PI a PD nebo dvěma dvojčleny u regulátoru PID [Vítečková, Víteček, 2006].

Příklad 8.5

Pro regulovanou soustavu popsanou přenosem $G_s(s) = \frac{2}{5s + 1}$ navrhnete číslicový regulátor pomocí metody optimálního modulu, který zajistí nulovou trvalou regulační odchylku pro skokovou změnu žádané w i poruchové veličiny v . Poruchová veličina v vstupuje za soustavou (obr. 8. 16).

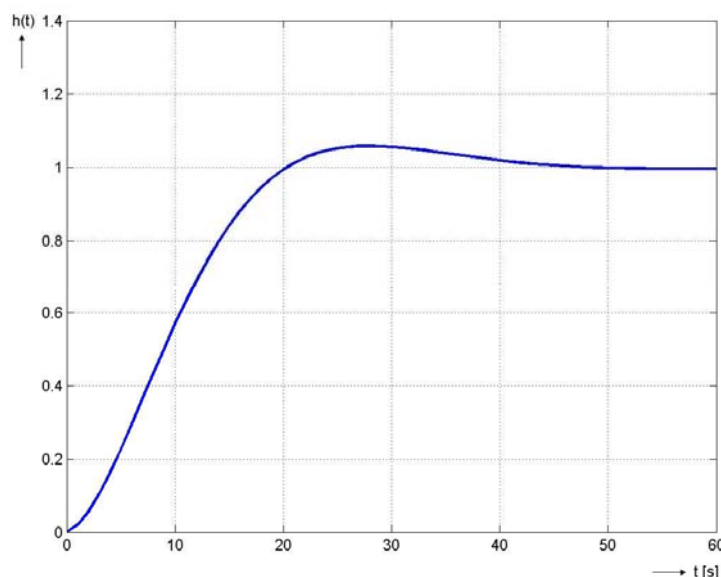
Řešení:

Viz tab. 8. 5 (1.řádek) je doporučeno použít diskrétní I regulátor. Vzorkovací periodu zvolíme $T = 1$ s.

$$T_I^* = 2k_1(T_1 - 0,5T)$$

$$T_I^* = 2 \cdot 2(5 - 0,5 \cdot 1)$$

$$T_I^* = 18 \text{ s}$$



Obr. 8. 17 Přechodové charakteristika regulačního obvodu seřízeného pomocí metody optimálního modulu z příkladu 8.5

Závěr:

Jak je vidět dle průběhu přechodové charakteristiky, získali jsme regulační pochod požadované kvality, tedy s relativním překmitem okolo 5 %.

Příklad 8.6

Pro regulovanou soustavu popsanou přenosem $G_s(s) = \frac{2}{(5s+1)(3s+1)}$ navrhnete číslcový regulátor pomocí metody optimálního modulu, který zajistí nulovou trvalou regulační odchylku pro skokovou změnu žádané w i poruchové veličiny v . Poruchová veličina vstupuje za soustavou v .

Řešení:

Viz tab. 8. 5 (3.řádek) je doporučeno použít diskretní PI regulátor. Vzorkovací periodu zvolíme $T = 1$ s.

Nyní vypočteme integrační časovou konstantu dle vztahu

$$T_I^* = T_1 - 0,5T$$

$$T_I^* = 5 - 0,5 \cdot 1$$

$$T_I^* = 4,5 \text{ s}$$

Dále vypočteme zesílení regulátoru k_p^*

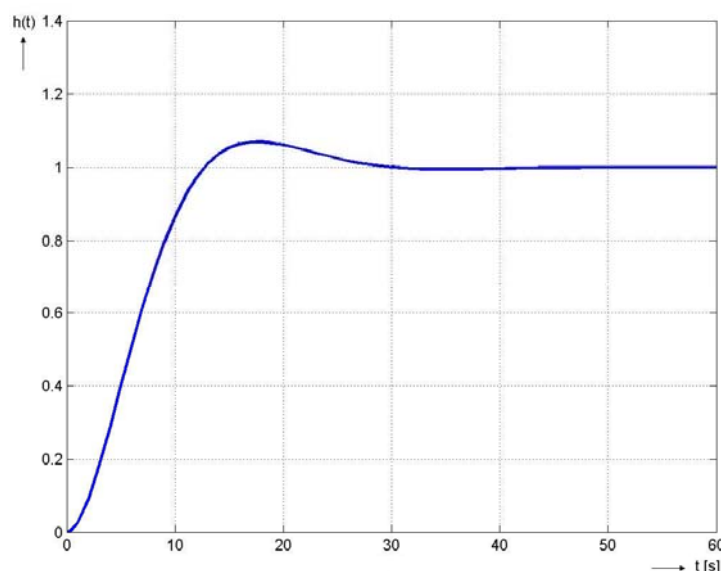
$$k_p^* = \frac{T_I^*}{2k_1T_2}$$

$$k_p^* = \frac{4,5}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$k_p^* = 0,375$$

Závěr:

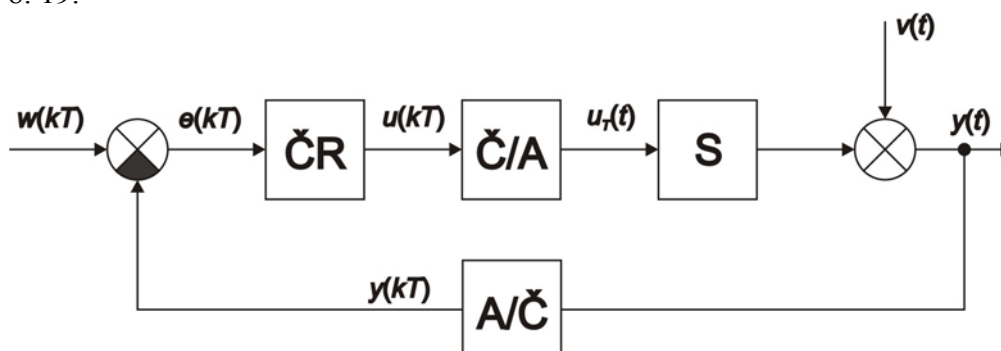
Jak je vidět dle průběhu přechodové charakteristiky obr. 8. 18, získali jsme regulační pochod požadované kvality, tedy s relativním překmitem okolo 5 %.



Obr. 8. 18 Přejchodové charakteristika regulačního obvodu seřízeného pomocí metody optimálního modulu z příkladu 8.6

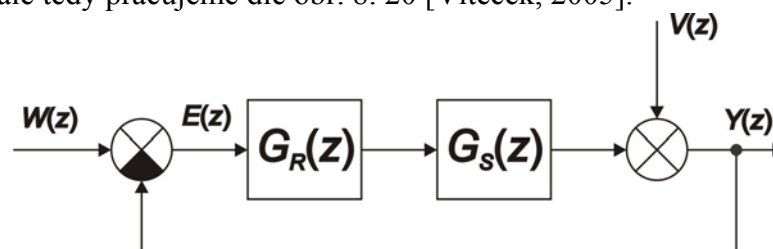
8.4 Návrh číslicového regulátoru přímou syntézou

Při přímém návrhu regulátoru vycházíme ze schématu pro číslicový regulační obvod dle obr. 8. 19.



Obr. 8. 19 Blokové schéma regulačního obvodu s číslicovým regulátorem

V tomto případě uvažujeme, že Č/A převodník má vlastnosti vzorkovače a tvarovače nultého řádu a dále tedy pracujeme dle obr. 8. 20 [Víteček, 2005].



Obr. 8. 20 Blokové schéma náhradního regulačního obvodu

Z-přenos regulované soustavy bude tedy mít tvar

$$G_s(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_s(s)}{s} \right\} \right\} \Big|_{t=kT} \quad (8. 25)$$

Pro regulovanou soustavu popsanou přenosem

$$G_s(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s} \quad (8.26)$$

pro

$$d = \frac{T_d}{T} \quad (8.27)$$

získáme

$$G_s(z) = \frac{(1-c)k_1}{z-c} z^{-d}; \quad c = e^{-\frac{T}{T_1}} \quad (8.28)$$

resp.

$$G_s(z) = \frac{(1-c)k_1}{1-cz^{-1}} z^{-(d+1)} \quad (8.29)$$

Z-přenos reálné soustavy má vždy zpoždění nejméně o jednu vzorkovací periodu T , viz (8.29).

Přenos řízení diskrétního regulačního obvodu dle obr. 8.20 je

$$G_{wy}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_R(z)G_s(z)}{1 + G_R(z)G_s(z)} \quad (8.30)$$

Z tohoto přenosu jsme schopni určit přenos regulátoru $G_R(z)$, který má tvar

$$G_R(z) = \frac{1}{G_s(z)} \cdot \frac{G_{wy}(z)}{1 - G_{wy}(z)} \quad (8.31)$$

který zajistí požadovaný přenos řízení (8.30) pro regulovanou soustavu $G_s(z)$.

Můžeme tedy říci, že pokud požadujeme přenos řízení ve tvaru

$$G_{wy}^*(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} \quad (8.32)$$

zajistí jej regulátor daný přenosem

$$G_R^*(z) = \frac{1}{G_s(z)} \cdot \frac{G_{wy}^*(z)}{1 - G_{wy}^*(z)} \quad (8.33)$$

Rovnice (8.33) se nazývá **rovnice syntézy** (synthesis equation).

V závislosti na požadovaném přenosu řízení $G_{wy}^*(z)$ obdržíme různé regulátory. Dva z těchto regulátorů jsou:

- regulátor na konečný počet kroků (dead-beat controller),
- Dahlinův regulátor (Dahlin controller).

8.4.1 Regulátor na konečný počet kroků

Tento typ regulátoru umožňuje při skokové změně žádané veličiny $w(kT)$ ukončit přechodový děj za dobu $(d+1)T$. Pro regulovanou soustavu (8.26) to tedy znamená ukončení procesu za $(d+1)$ kroků.

Tento požadavek je tedy definován přenosem řízení ve tvaru

$$G_{wy}^*(z) = z^{-(d+1)} \quad (8.34)$$

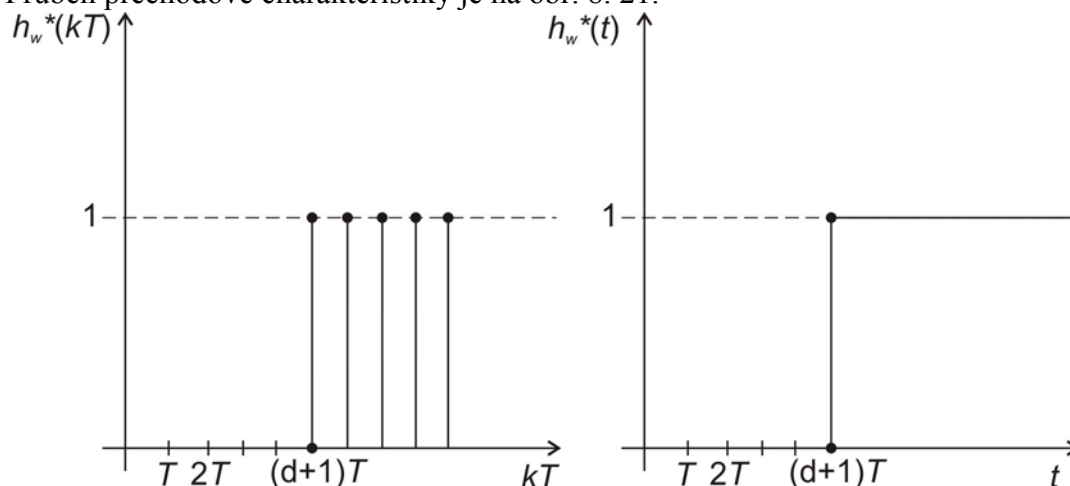
Pokud tedy uvažujeme vztahy (8.29) a (8.33) získáme přenos regulátoru na konečný počet kroků daný vztahem

$$G_R^*(z) = \frac{1 - cz^{-1}}{(1-c)k_1 z^{-(d+1)}} \cdot \frac{z^{-(d+1)}}{1 - z^{-(d+1)}} \quad (8.35)$$

resp.

$$G_R^*(z) = \frac{1}{(1-c)k_1} \cdot \frac{1 - cz^{-1}}{1 - z^{-(d+1)}} \quad (8.36)$$

Průběh přechodové charakteristiky je na obr. 8. 21.

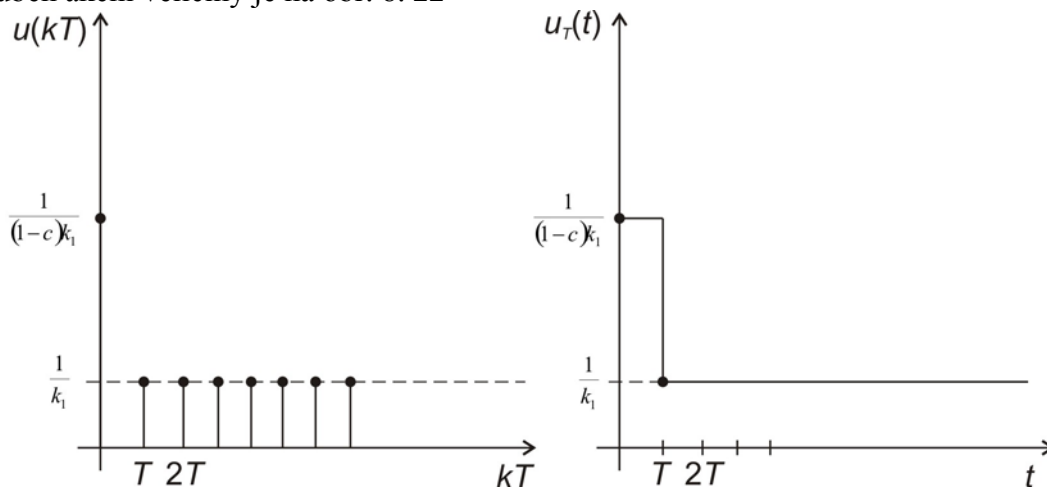


Obr. 8. 21 Přechodová charakteristika pro regulaci na konečný počet kroků

Průběh akční veličiny získáme dle

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{G_R^*(z)}{1 + G_R^*(z)G_S(z)} = \frac{1 - cz^{-1}}{(1-c)k_1} = \frac{1}{(1-c)k_1} - \frac{c}{(1-c)k_1} z^{-1} \quad (8.37)$$

Průběh akční veličiny je na obr. 8. 22



Obr. 8. 22 Průběh akční veličiny pro regulaci na konečný počet kroků

Přechodová charakteristika má zjevně ideální průběh, ale nevýhodou této metody je, že je málo robustní vůči změnám hodnoty dopravního zpoždění T_d .

Příklad 8.7

Pro regulovanou soustavu popsanou přenosem $G_s(s) = \frac{2}{5s+1} e^{-6s}$ navrhnete číslicový regulátor na konečný počet kroků pro vzorkovací periodu $T = 2$ s.

Řešení:

Ze zadání můžeme určit: $k_1 = 2$, $T_1 = 2$ s a $T_d = 6$ s.

Nejdříve je nutné provést diskretizaci zadané soustavy.

$$G_s(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_s(s)}{s} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

Získáme diskretizovaný přenos ve tvaru

$$G_s(z) = \frac{(1-c)k_1}{z-c} z^{-d}; \quad c = e^{-\frac{T}{T_1}}$$

resp.

$$G_s(z) = \frac{(1-c)k_1}{1-cz^{-1}} z^{-(d+1)}$$

kde

$$d = \frac{T_d}{T} = \frac{6}{2} = 3$$

a

$$c = e^{-\frac{T}{T_1}}$$

$$c = e^{-(2/5)} \doteq 0,67$$

Podle výpočtu by měla být regulace ukončena za $(d+1)$ kroků, tedy po 4 krocích.

Dosadíme zadané hodnoty a získáme diskretizovaný přenos ve tvaru

$$G_s(z) = \frac{(1-0,67) \cdot 2}{1-0,67z^{-1}} z^{-4}$$

$$G_s(z) = \frac{0,66z^{-4}}{1-0,67z^{-1}}$$

a po úpravě vhodné k simulaci v prostředí MATLAB-Simulink a získáme

$$G_s(z) = \frac{0,66}{z^4 - 0,67z^3}$$

Nyní můžeme navrhnout regulátor dle

$$G_R^*(z) = \frac{1}{G_s(z)} \cdot \frac{G_{wy}^*(z)}{1-G_{wy}^*(z)}$$

kde dosadíme

$$G_{wy}^*(z) = z^{-(d+1)} = z^{-4}$$

a získáme

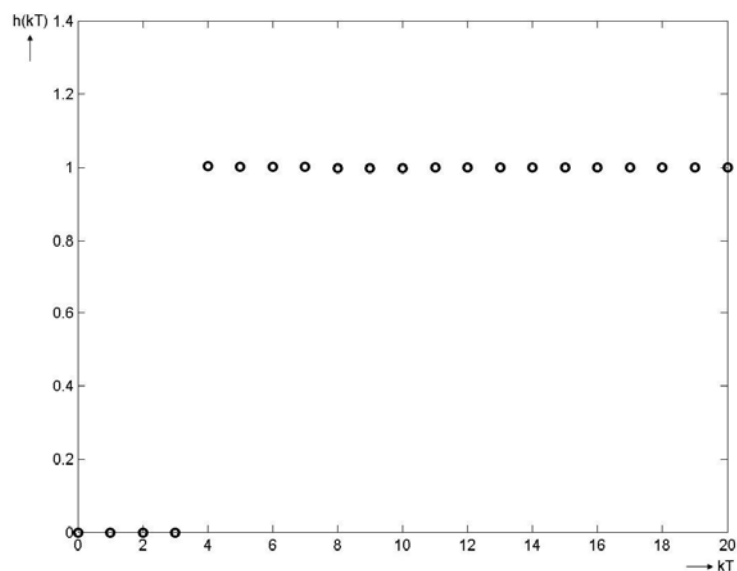
$$G_R^*(z) = \frac{1-cz^{-1}}{(1-c)k_1z^{-(d+1)}} \cdot \frac{z^{-(d+1)}}{1-z^{-(d+1)}} = \frac{1}{(1-c)k_1} \cdot \frac{1-cz^{-1}}{1-z^{-(d+1)}}$$

$$G_R^*(z) = \frac{1}{(1-0,67) \cdot 2} \cdot \frac{1-0,67z^{-1}}{1-z^{-4}}$$

Po úpravě získáme přenos

$$G_R^*(z) = \frac{1,52z^4 - 1,02z^3}{z^4 - 1}$$

Přechodová charakteristika získaná simulací je zobrazena na obr. 8. 23.



Obr. 8. 23 Přejchodové charakteristika regulačního obvodu seřízeného metodou regulace na konečný počet kroků příkladu 8.7

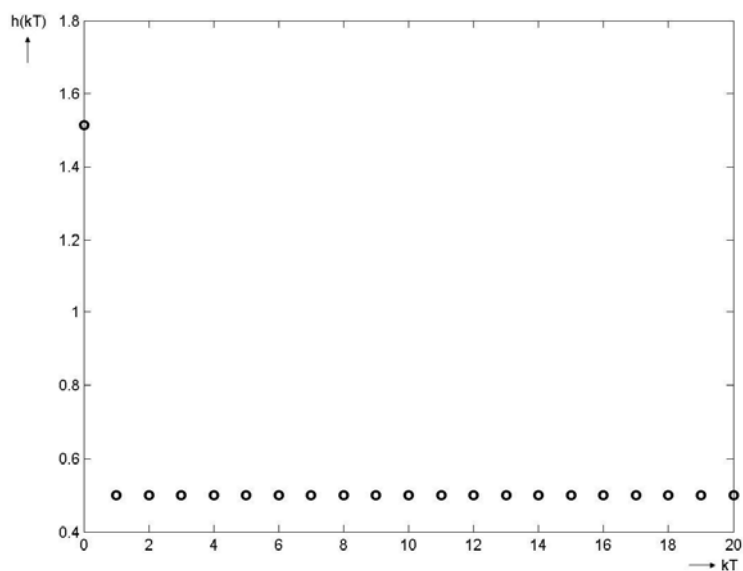
Můžeme dále určit průběh akční veličiny $u(kT)$ dle vztahu

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{G_R^*(z)}{1 + G_R^*(z)G_S(z)}$$

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{1 - cz^{-1}}{(1 - c)k_1} = \frac{1}{(1 - c)k_1} - \frac{c}{(1 - c)k_1} z^{-1}$$

získáme tedy

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{1}{(1 - 0,67) \cdot 2} - \frac{0,67}{(1 - 0,67) \cdot 2} z^{-1} = \frac{z - 0,67}{0,66z}$$



Obr. 8. 24 Průběh akční veličiny z příkladu 8.7

8.4.2 Dahlinův regulátor

V případě Dahlinova regulátoru předpokládáme, že požadovaný Z-přenos řízení má tvar

$$G_{wy}^*(z) = \frac{1-c_w}{z-c_w} z^{-d} = \frac{1-c_w}{z-c_w z^{-1}} z^{-(d+1)}; \quad c_w = e^{-\frac{T}{T_w}} \quad (8.38)$$

Tento přenos řízení odpovídá požadovanému L-přenosu řízení

$$G_{wy}^*(s) = \frac{1}{T_w s + 1} e^{-T_d s} \quad (8.39)$$

Uvažujeme-li regulovanou soustavu popsanou přenosem

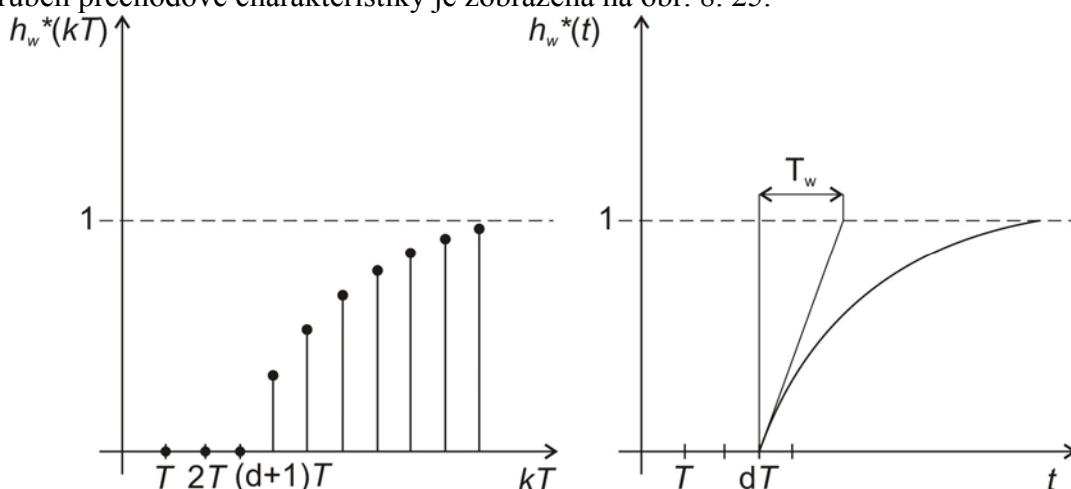
$$G_s(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s} \quad (8.40)$$

a přenos řízení (8.38), můžeme dle **rovnice syntézy** (8.33) s uvažováním vztahu (8.29) psát

$$G_R^*(z) = \frac{1-cz^{-1}}{(1-c)k_1 z^{-(d+1)}} \cdot \frac{\frac{1-c_w}{z-c_w z^{-1}} z^{-(d+1)}}{1 - \frac{1-c_w}{z-c_w z^{-1}} z^{-(d+1)}} \Rightarrow \quad (8.41)$$

$$G_R^*(z) = \frac{1-c_w}{(1-c)k_1} \cdot \frac{1-cz^{-1}}{1-c_w z^{-1} - (1-c_w)z^{-(d+1)}}$$

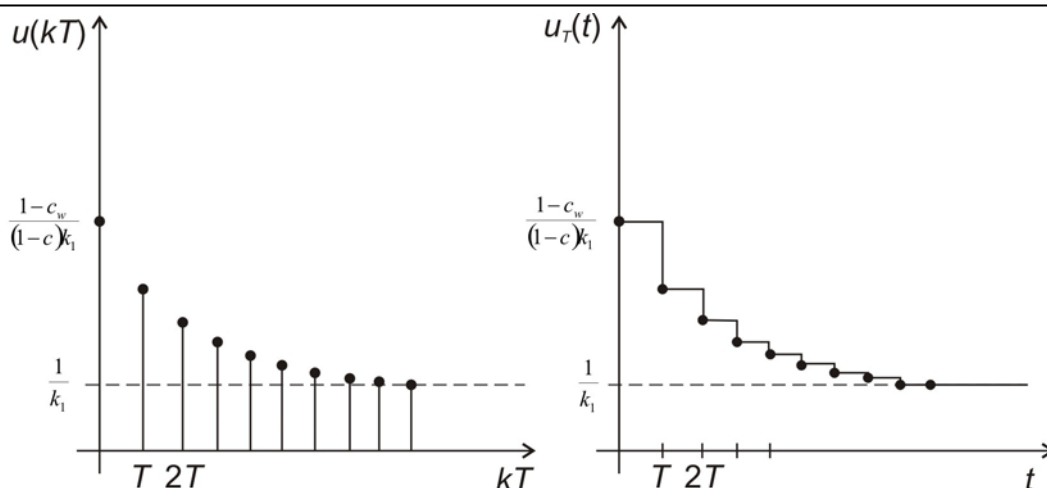
Průběh přechodové charakteristiky je zobrazena na obr. 8.25.



Obr. 8.25 Přechodová charakteristika pro regulaci pomocí Dahlinova regulátoru

Průběh akční veličiny (obr. 8.26) získáme dle vztahu

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{G_R^*(z)}{1 + G_R^*(z)G_s(z)} = \frac{1-c_w}{(1-c)k_1} \cdot \frac{1-cz^{-1}}{1-c_w z^{-1}} \quad (8.42)$$



Obr. 8. 26 Průběh akční veličiny pro Dahlinův regulátor

Výhodou této metody je, že oproti metodě návrhu regulátoru na konečný počet kroků je Dahlinův regulátor mnohem více robustní vůči změnám T_d .

Nepříjemným jevem je tzv. **zvonění** (klepání) akční veličiny $u(kT)$, resp. $u_T(kT)$. Tento jev je způsoben záporným pólem regulátoru blízkým -1 v komplexní rovině z . Tento bod označujeme jako **uzel zvonění**.

U Dahlinova regulátoru je toto zvonění způsobeno nevhodnou volbou časové konstanty regulačního obvodu T_w při dané vzorkovací periodě T . Rovnice syntézy pak má tvar

$$G_R(z) = \frac{1}{G_S(z)} \cdot \frac{(1-c_w)z^{-(d+1)}}{1-c_wz^{-1} - (1-c_w)z^{-(d+1)}} =$$

$$= \frac{1}{G_S(z)} \cdot \frac{(1-c_w)z^{-(d+1)}}{(1-z^{-1})[1 + (1-c_w)z^{-1} + (1-c_w)z^{-2} + \dots + (1-c_w)z^{-d}]}$$
(8. 43)

kde

$$c_w = e^{-T/T_w}$$

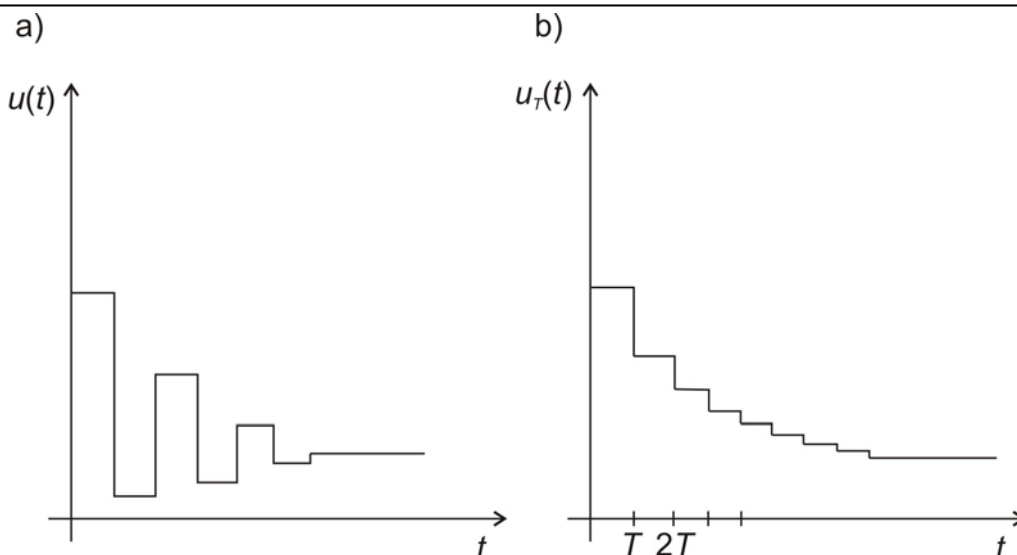
Například pro $d=1$ a $\frac{T}{T_w} \doteq 4,6 \Rightarrow c_w \doteq 0,01$ získáme

$$G_R(z) = \frac{1}{G_S(z)} \cdot \frac{0,99z^{-2}}{1 - 0,01z^{-1} - 0,99z^{-2}} = \frac{1}{G_S(z)} \cdot \frac{0,99z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+0,99z^{-1})}$$
(8. 44)

Pól regulátoru $z = -0,99$ způsobuje zmíněné zvonění (obr. 8. 27a), které se však na průběhu nemusí projevit.

Tento tzv. zvonící pól $z = p^*$ může způsobit rychlejší opotřebení akčního orgánu. Odstraněn může být dosazením do dvojčlenu $(1 + p^*z^{-1})$ za $z=1$, tzn. zastoupením vztahu $(1 + p^*z^{-1})$ jeho ustálenou hodnotou. Např. pro (8. 44) získáme (obr. 8. 27b)

$$G_R(z) = \frac{1}{G_S(z)} \cdot \frac{0,99z^{-2}}{1,99(1-z^{-1})}$$
(8. 45)



Obr. 8. 27 Průběh akční veličiny a) zatížený zvoněním, b) kompenzované zvonění

Příklad 8.8

Pro regulovanou soustavu popsanou přenosem jako v příkladu 8.7, tedy $G_s(s) = \frac{2}{5s+1} e^{-6s}$ navrhnete Dahlinův číslicový regulátor pro vzorkovací periodu $T = 2$ s. Pomocí simulace byla zjištěna konstanta T_w pro danou soustavu a to $T_w = 3$ s.

Řešení:

Ze zadání můžeme určit: $k_1 = 2$, $T_1 = 2$ s, $T_w = 3$ s a $T_d = 6$ s.

V příkladu 8.7 jsme získali diskretizovaný přenos ve tvar

$$G_s(z) = \frac{(1-c)k_1}{z-c} z^{-d}; \quad c = e^{-\frac{T}{T_1}}$$

resp.

$$G_s(z) = \frac{(1-c)k_1}{1-cz^{-1}} z^{-(d+1)}$$

Dále jsme určili potřebné konstanty

$$d = \frac{T_d}{T} = \frac{6}{2} = 3$$

a

$$c = e^{-\frac{T}{T_1}}$$

$$c = e^{-(2/5)} \doteq 0,67$$

Nyní vypočteme hodnotu konstanty c_w , tedy

$$c_w = e^{-\frac{T}{T_w}}$$

$$c_w = e^{-(2/3)} \doteq 0,51$$

Podle výpočtu by měla být regulace ukončena za $(d+1)$ kroků, tedy po 4 krocích.

Dosadíme zadané hodnoty a získáme diskretizovaný přenos ve tvaru

$$G_s(z) = \frac{(1 - 0,67) \cdot 2}{1 - 0,67z^{-1}} z^{-4}$$

$$G_s(z) = \frac{0,66z^{-4}}{1 - 0,67z^{-1}}$$

a po úpravě vhodné k simulaci v prostředí MATLAB-Simulink a získáme

$$G_s(z) = \frac{0,66}{z^4 - 0,67z^3}$$

Nyní můžeme navrhnout regulátor dle

$$G_R^*(z) = \frac{1}{G_s(z)} \cdot \frac{G_{wy}^*(z)}{1 - G_{wy}^*(z)}$$

kde dosadíme

$$G_{wy}^*(z) = \frac{1 - c_w}{z - c_w z^{-1}} z^{-(d+1)}$$

a získáme

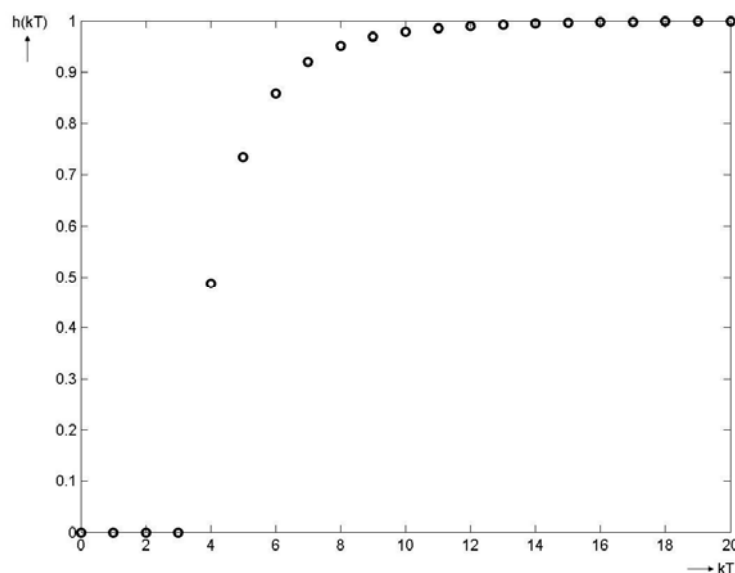
$$G_R^*(z) = \frac{1 - c_w}{(1 - c)k_1} \cdot \frac{1 - cz^{-1}}{1 - c_w z^{-1} - (1 - c_w)z^{-(d+1)}}$$

$$G_R^*(z) = \frac{1 - 0,51}{(1 - 0,67) \cdot 2} \cdot \frac{1 - 0,67z^{-1}}{1 - 0,51z^{-1} - (1 - 0,51)z^{-4}}$$

Po úpravě získáme přenos

$$G_R^*(z) = \frac{0,74z^4 - 0,5z^3}{z^4 - 0,51z^3 - 0,49}$$

Přechodová charakteristika získaná simulací je zobrazena na obr. 8. 28.



Obr. 8. 28 Přechodové charakteristika regulačního obvodu seřízeného pomocí Dahlinova regulátoru z příkladu 8.8

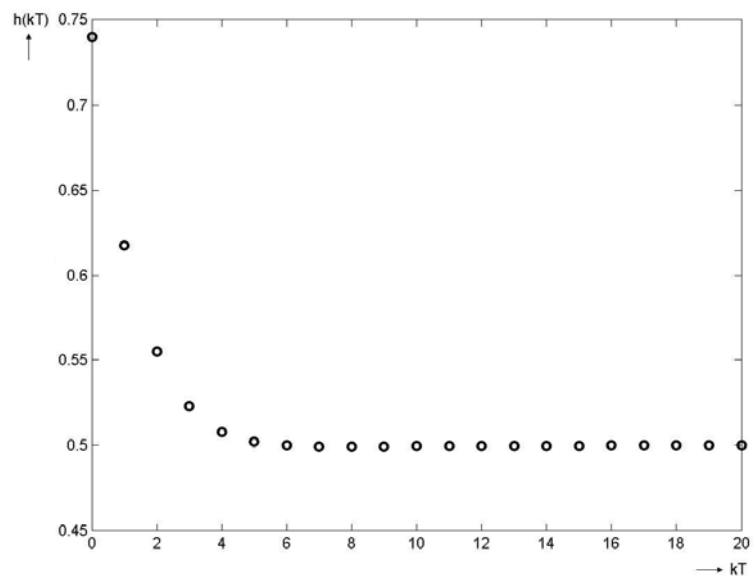
Může dále určit průběh akční veličiny $u(kT)$ dle vztahu

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{G_R^*(z)}{1 + G_R^*(z)G_S(z)} = \frac{1 - c_w}{(1 - c)k_1} \cdot \frac{1 - cz^{-1}}{1 - c_w z^{-1}}$$

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{1 - 0,51}{(1 - 0,67) \cdot 2} \cdot \frac{1 - 0,67z^{-1}}{1 - 0,51z^{-1}}$$

získáme tedy

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{0,74z - 0,5}{z - 0,51}$$



Obr. 8. 29 Průběh akční veličiny z příkladu 8.8