

UMB 564: Matematická analýza I

Přednášející: Prof. Vlastimil Křivan

Kontakt: krivan@prf.jcu.cz

Informace: elearning.jcu.cz/

Přednáška 1: Číselné množiny

Logická výstavba matematiky

- 1 **Axiomy.** Axiom z řec. axioma(=to co se obecně uznává) jsou základní stavební kameny matematiky. Současná matematika vychází z *Zermelo–Fraenkelových axiomů*. Pro naše potřeby ale tyto axiomy nemusíme znát.
- 2 **Definice.** Pomocí definic vymezujeme nové pojmy (např. kružnice je množina bodů roviny, které mají od daného bodu stejnou a kladnou vzdálenost). Definice se nedokazují.
- 3 **Věta** (nebo též **Tvrzení**, **Lemma** a pod.) je matematické tvrzení (např. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, Pythagorova věta). Věty se dokazují.
- 4 **Důkaz** je základním metodickým nástrojem matematiky (na rozdíl od ostatních přírodních věd, kde základním metodickým nástrojem je *experiment*). Základní typy důkazů jsou následující:
 - 1 *Přímý důkaz.* Např. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
 - 2 *Důkaz sporem.* Vychází z toho, že tvrzení je buď pravdivé nebo nepravdivé. Pro důkaz daného tvrzení se předpokládá, že tvrzení neplatí a dojde se ke sporu s předpoklady tvrzení (viz např. důkaz tvrzení, že neexistuje největší přirozené číslo).
 - 3 *Důkaz matematickou indukcí.*

Některé používané matematické symboly

- Kvantifikátory:
 - $\forall$ = pro každý, pro všechny/a
 - $\exists$ = existuje
- $\in$ = být prvkem množiny (např. $x \in M$, čteme x je prvkem množiny M)

Číselné množiny: Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Formální zavedení přirozených čísel je na základě tzv. *Peanových axiomů*

Axiom 1 1 je přirozené číslo

Axiom 2 Každé přirozené číslo má svého následovníka

Axiom 3 1 není následovník žádného přirozeného čísla

Axiom 4 Jestliže se následovníci m' a n' čísel m a n rovnají, pak se rovnají i m a n

Axiom 5 Axiom matematické indukce: Pokud pro nějakou vlastnost přirozených čísel platí, že ji má 1 a z toho, že ji má přirozené číslo n plyne, že ji má i jeho následovník n' , pak tuto vlastnost již mají všechna přirozená čísla.

Definice 1 (Přirozená čísla)

Množina, která splňuje Peanovy axiomy se nazývá množina přirozených čísel a značí se $\mathbb{N}$ (od slova "Naturals").

Množina $\mathbb{N}$ je uzavřená vůči operacím sčítání tj.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}$$

Množina $\mathbb{N}$ není uzavřená vůči operaci odčítání, tj.

$$\exists m, n \in \mathbb{N} : m - n \notin \mathbb{N}$$

Důkaz metodou matematické indukce:

Používá se pro důkazy tvrzení, která mají platit pro všechna přirozená čísla.

Postup:

- 1 Dokážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$ (případně pro jiné konkrétní přirozené číslo)
- 2 Indukční předpoklad: Předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo k a dokážeme, že pak platí i pro číslo $k + 1$
- 3 Z Axiomu matematické indukce pak plyne, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla.

Aritmetická posloupnost

Pro členy aritmetické posloupnosti $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

kde d je dané číslo (tzv. difference). Platí:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \quad (1)$$

Věta 1 (Částečný součet aritmetické posloupnosti)

Pro všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_1 + \dots + a_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

Příklad (Částečný součet aritmetické posloupnosti $1 + 2 + 3 + \dots + n$)

Pro všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 2 + \dots + n = (n + 1) \frac{n}{2}$.

Důkaz vzorce pro částečný součet aritmetické posloupnosti matematickou indukcí

Důkaz

Označme součet prvních k členů aritmetické posloupnosti s_k , tj. $s_k = a_1 + \dots + a_k$.

- ① Tvzení platí pro $n = 1$, protože $s_1 (= a_1) = (a_1 + a_1) \frac{1}{2}$
- ② Indukční předpoklad: Předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo k , tj. předpokládáme, že platí

$$s_k = (a_1 + a_k) \frac{k}{2} \quad (2)$$

a chceme dokázat, že tvrzení platí i pro součet $k + 1$ členů, tj. chceme dokázat, že platí

$$s_{k+1} = (a_1 + a_{k+1}) \frac{k+1}{2}, \text{ tj.},$$

$$s_k + a_{k+1} = (a_1 + a_{k+1}) \frac{k+1}{2}$$

S využitím indukčního předpokladu (2) upravíme:

$$(a_1 + a_k) \frac{k}{2} + a_{k+1} = (a_1 + a_{k+1}) \frac{k+1}{2}$$

$$ka_1 + ka_k + 2a_{k+1} = ka_1 + a_1 + ka_{k+1} + a_{k+1}$$

$$a_{k+1} = a_1 + k(a_{k+1} - a_k)$$

$$a_{k+1} = a_1 + kd.$$

Poslední rovnost platí, protože posloupnost $\{a_i\}$ je aritmetická posloupnost pro kterou platí (1). Tvrzení bylo dokázáno.

Geometrická posloupnost

Členy geometrické posloupnosti $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ splňují $a_{n+1} = qa_n$, kde číslo q je tzv. kvocient. Platí $a_n = q^{n-1}a_1$.

Věta 2 (Částečný součet geometrické posloupnosti $a_{n+1} = qa_n$ a součet geometrické řady pro $q < 1$)

- ① Pro $q \neq 1$ a všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 + \dots + a_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.
- ② Pokud je $|q| < 1$, pak existuje konečný součet nekonečné geometrické řady $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots = \frac{a_1}{1-q}$.

Důkaz vzorce pro součet konečně mnoha členů geom. pos. matematickou indukcí:

Důkaz

1. *Tvrzení platí triviálně pro $n = 1$.*
2. *Indukční předpoklad: Předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo k , tj. předpokládáme, že platí*

$$a_1 + \dots + a_k = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Chceme dokázat, že tvrzení platí i pro číslo $k + 1$, tj. chceme dokázat, že platí

$$a_1 + \dots + a_{k+1} = a_1 \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Levou stranu rovnosti s využitím indukčního předpokladu upravíme:

$$(a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1} = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q} + a_1 q^k = a_1 \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Tvrzení bylo dokázáno.

Přímý důkaz vzorce pro součet konečně mnoha členů geometrické posloupnosti

Důkaz

Označme $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Pak platí

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}. \quad (1)$$

Rovnici (1) vynásobíme q , tj.

$$qs_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n. \quad (2)$$

Od rovnice (2) odečteme rovnici (1) a obdržíme

$$qs_n - s_n = -a_1 + a_1 q^n,$$

tj.

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Číselné množiny: Celá čísla $\mathbb{Z}$

- ① $\mathbb{Z}$ – množina celých čísel – "Zahlen"
- ② $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ③ $\mathbb{Z}$ je rozšířením $\mathbb{N}$ o množinu řešení všech rovnic tvaru

$$n + x = m, \text{ kde } m, n \in \mathbb{N}$$

- ④ $\mathbb{Z}$ není uzavřená vůči operaci dělení
- ⑤ Sudá čísla: $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- ⑥ Lichá čísla: $\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Číselné množiny: Racionální čísla $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ – množina racionálních čísel – "Quotients"

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, \text{ kde } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m \text{ a } n \text{ jsou nesoudělná} \right\}$$

$\mathbb{Q}$ je rozšířením $\mathbb{Z}$ o množinu řešení všech rovnic tvaru

$$nx = m, \text{ kde } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{Q}$ je tedy uzavřená také vůči operaci dělení (vyjma dělení nulou, které není definované). Stále však existuje mnoho rovnic, které v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ řešit nelze, např. $x^2 = 2$.

Věta 3 (Hippasos z Metapontu, 5.st př. Kr.)

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (tj. $\sqrt{2}$ není racionální číslo).

Poznámka

Protože $\sqrt{2}$ není racionální číslo, tak to znamená, že existují čísla, která nelze vyjádřit ve tvaru zlomku.

Důkaz sporem

Důkaz

Důkaz provedeme sporem, tj. budeme předpokládat, že tvrzení neplatí a dokážeme, že toto není možné, tj. musí platit opak.

Předpokládejme tedy, že $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, tj. že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Existují tedy $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ navzájem nesoudělná taková, že $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, tj. $2n^2 = m^2$. Platí tedy, že m^2 je sudé číslo a tedy m je také sudé číslo^a. Existuje tedy $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $m = 2k$, tj. $m^2 = 4k^2$, tj. $2n^2 = 4k^2$ a tedy n^2 je také sudé číslo, tj. $n = 2\ell$ pro vhodné $\ell \in \mathbb{Z}$. Dokázali jsme, že m i n jsou sudá čísla, tj. jsou dělitelná číslem 2, tj. jsou soudělná. To je spor s předpokladem, že m a n jsou nesoudělná a tedy $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

^aToto můžeme opět dokázat sporem. Předpokládejme, že m je liché, tj. existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $m = 2k + 1$. Odtud $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$, což je liché číslo a spor s předpokladem, že m^2 je sudé.

Definice 2

Desetinným rozvojem čísla x nazýváme výraz

$$x = a_0.a_1a_2a_3\dots$$

kde a_0 je celé číslo ($a_0 \in \mathbb{Z}$) a každé a_i , $i = 1, 2, \dots$ je jedna z číslic $0, \dots, 9$. Pokud existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = 0$ pro $m < n$, pak se desetinný rozvoj nazývá **konečný**. V opačném případě se desetinný rozvoj nazývá **nekonečný**. Pokud se od nějakého indexu členy nebo skupiny členů opakují, pak je desetinný rozvoj **periodický**.

Reálná čísla $\mathbb{R}$

Věta 4

Číslo je racionální právě když má konečný nebo periodický desetinný rozvoj.

Důkaz

Vzhledem k tomu, že tvrzení je ve formě logické ekvivalence ("právě když $\iff$ "), musíme tedy dokázat platnost dvou implikací.

- 1 $(\Rightarrow)$ Necht' r je racionální číslo, tj. $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Při dělení čísla p číslem q se buď vyskytne zbytek 0 a v tom případě je desetinný rozvoj konečný, nebo se zbytek 0 nevyskytne. Různých zbytků se ale může vyskytnout pouze maximálně $q - 1$, tj. desetinný rozvoj je periodický. (Zkuste např. $10 : 7 = 1.\overline{142857}$).
- 2 $(\Leftarrow)$ Uvažujme číslo $x = a_0.a_1a_2\ldots = a_0 + r$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $r = 0.a_1a_2\ldots$ ($0 < r < 1$, kdyby $r = 0$, pak není co dokazovat). Tento rozvoj je buď konečný, tj. $r = 0.a_1a_2\ldots a_n$ a tedy $10^n r = a_1\ldots a_n =: a \in \mathbb{N}$, tj. $r = \frac{a}{10^n}$, a tedy $r \in \mathbb{Q}$. Když je rozvoj nekonečný a periodický, tak

$$\begin{aligned}r &= 0.a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_k} \\10^n r - a &= 0.\overline{b_1b_2\ldots b_k} \\10^k(10^n r - a) &= b_1b_2\ldots b_k.\overline{b_1b_2\ldots b_k} = b + (10^n r - a) \\(10^k - 1)(10^n r - a) &= b \in \mathbb{N} \\r &= \frac{\frac{b}{10^k - 1} + a}{10^n} \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Reálná čísla

Definice 3 (Iracionální a reálná čísla)

- 1 Čísla s nekonečným a neperiodickým rozvojem se nazývají **iracionální čísla**.
- 2 Racionální a iracionální čísla tvoří množinu **reálných čísel** $\mathbb{R}$.

Geometrická reprezentace reálných čísel

- 1 Reálná čísla lze ztotožnit s body na přímce zvané číselná osa
- 2 Každé reálné číslo je na číselné ose zobrazeno právě jedním bodem.
- 3 Každému bodu na číselné ose odpovídá právě jedno reálné číslo¹



4 Reálné číslo může mít dva různé desetinné rozvoje, tj. jedno reálné číslo je možné zapsat různými způsoby, např. $0.\bar{9} = 1$. Dokažte.

Poznámka

Formální definici reálných čísel podal [Richard Dedekind](#) (1831–1916) (tzv. Dedekindovy řezy).

¹ Toto je netriviální tvrzení, které vychází z toho, že množina reálných čísel je tzv. úplná

Uspořádání na množině reálných čísel

Definice 4

Nechť $x = a_0.a_1a_2\dots$ ($a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, \dots, 9\}$) je kladné reálné číslo. Nechť $n \in \mathbb{N}$.
Racionální číslo

$$\underline{x}_n = a_0.a_1a_2\dots a_n$$

se nazývá **dolní aproximace čísla** x . *Racionální číslo*

$$\overline{x}_n = \underline{x}_n + \frac{1}{10^n}$$

se nazývá **horní aproximace čísla** x .

Definice 5 (Uspořádání na množině reálných čísel)

- ① Kladné reálné číslo $x = a_0.a_1a_2\dots$ je **větší** než kladné reálné číslo $y = b_0.b_1b_2\dots$ ($x > y$) pokud existuje index $n \in \mathbb{N}$ takový, že $\underline{x}_n > \overline{y}_n$.
- ② Pokud neplatí ani jedna z nerovností $x > y$ a $y > x$, pak $x = y$.

Uspořádání na množině reálných čísel

Příklad

S využitím definice uspořádání dokažte, že platí $1 = 0.\bar{9}$

Důkaz

Podle definice uspořádání, musíme dodázat, že neplatí ani $0.\bar{9} < 1$, ani $1 < 0.\bar{9}$. Důkaz provedeme sporem.

- 1 Budeme předpokládat, že $0.\bar{9} < 1$, tj. podle definice existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{0.999\dots n} < \underline{1}_n = 1$, tj. horní odhad čísla $0.\bar{9}$ je menší než dolní odhad čísla 1. Platí, že

$$\overline{0.999\dots 1} = 0.9 + 0.1 = 1$$

$$\overline{0.999\dots 2} = 0.99 + 0.01 = 1$$

$$\overline{0.999\dots 3} = 0.999 + 0.001 = 1$$

atd.

a tedy nerovnost $0.\bar{9} < 1$ neplatí.

- 2 Nyní budeme předpokládat, že $0.\bar{9} > 1$, tj. musí existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{0.999\dots n} > \underline{1}_n = 1$. Protože

$$\underline{0.999\dots 1} = 0.9$$

$$\underline{1}_1 = 1 + 0.1 = 1.1 > 1$$

$$\underline{0.999\dots 2} = 0.99$$

$$\underline{1}_2 = 1 + 0.01 = 1.01 > 1$$

$$\underline{0.999\dots 3} = 0.999$$

$$\underline{1}_3 = 1 + 0.001 = 1.001 > 1$$

atd.

atd.

tedy pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí $\overline{0.999\dots n} < \underline{1}_n$ tj. neplatí, že $0.\bar{9} > 1$.