

Přednáška 2: Zobrazení

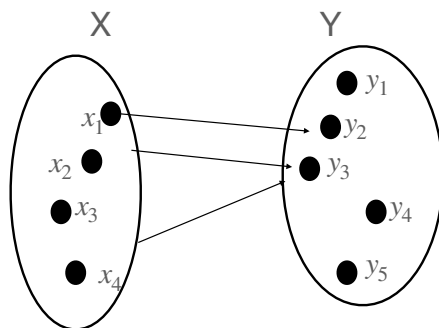
Zobrazení

Definice 9

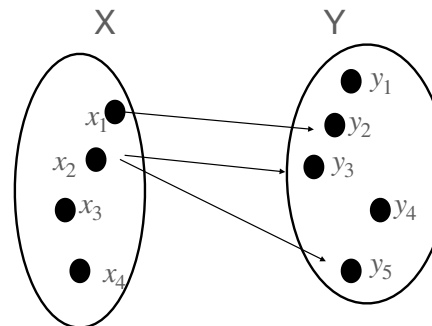
Nechť X a Y jsou neprázdné množiny a $D \subset X$. Jestliže ke každému $x \in D$ je přiřazen právě jeden prvek $y \in Y$ pomocí předpisu f , pak takové přiřazení nazýváme zobrazení množiny D do množiny Y , nebo zobrazení z množiny X do množiny Y a zapisujeme jako $f : X \mapsto Y$. Zápis $y = f(x)$ znamená, že prvku $x \in X$ zobrazení f přiřazuje prvek y .

Množina D se nazývá definiční obor zobrazení a její obraz $H(f) = f(D)$ se nazývá obor hodnot zobrazení.

Zobrazení, $D = \{x_1, x_2, x_4\}$, $H = \{y_2, y_3\}$



Není zobrazení



Zobrazení

Poznámka

Důvod, proč nepřipouštíme, aby jednomu vzoru nebyl přiřazen více než jeden obraz je čistě praktický. Představte si, že množina vzorů reprezentuje tři stavy nastavení joysticku ovládání lodního kormidla: Joystick vlevo, v nulové poloze, nebo vpravo. Prostřednictvím servomotorů (reprezentujících funkci f) může mít kormidlo lodi polohy: vpravo, přímý směr, vlevo. A určitě nechceme, aby např. když vychýlíme joystick vpravo byly dvě možnosti co skutečné kormidlo udělá (např. zůstane v přímém směru nebo se vychýlí vlevo).

Zobrazení

Definici zobrazení můžeme zapsat ve zkrácené podobě v následujícím tvaru:

Definice 10

Nechť X a Y jsou neprázdné množiny. Pak $f : X \mapsto Y$ je zobrazení s definičním oborem $D \subset X$ právě když platí

$$\text{Je-li } x_1 = x_2 \in D \implies f(x_1) = f(x_2).$$

Věta 6

Nechť X a Y jsou neprázdné množiny. Pak $f : X \mapsto Y$ je zobrazení s definičním oborem $D \subset X$ právě když platí:

$$\text{Je-li } f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 \neq x_2.$$

Důkaz

f je zobrazení $\iff (x_1 = x_2 \in D \implies f(x_1) = f(x_2)) \iff$
 $f(x_1) \neq f(x_2) \implies (x_1 \neq x_2)$ (viz. negace implikace, Základy logiky)

Zobrazení na množinu a zobrazení prosté

Definice 11

Zobrazení $f : X \mapsto Y$ se nazývá

- ① *zobrazení množiny X do množiny Y , pokud je definiční obor $D = X$*
- ② *zobrazení na, je-li obor hodnot H roven Y , tj. $H = Y$*
- ③ *zobrazení prosté jestliže platí, že pro každé $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$,*
- ④ *vzájemně jednoznačné zobrazení množin X a Y , pokud se jedná o prosté zobrazení množiny X na množinu Y .*

Poznámka

Všimněte si, že ve výše uvedené definici prostého zobrazení se předpokládá, že definiční obor zobrazení je roven X .

Ekvivalentní definice prostého zobrazení:

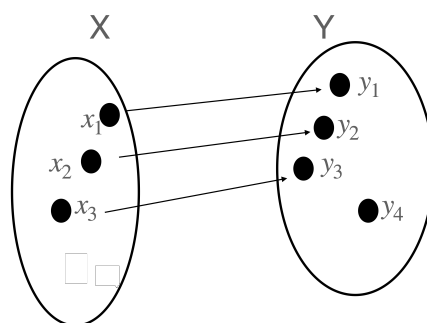


- ① $f : X \mapsto Y$ je prosté zobrazení pokud platí, že

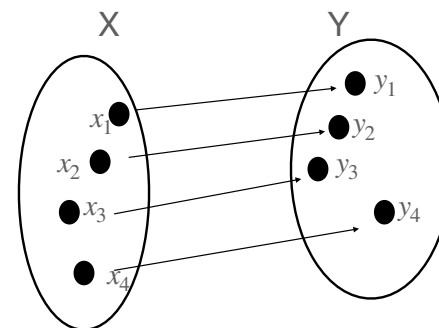
$$\text{Je-li } f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Příklady zobrazení

Zobrazení prosté



Zobrazení vzájemně jednoznačné



Posloupnost

Definice 12

Zobrazení jehož definičním oborem jsou přirozená čísla a oborem hodnot reálná čísla se nazývá posloupnost. Posloupnosti obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{a_1, a_2, \dots\}$

Příklad (Aritmetická posloupnost)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro kterou platí $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbb{N}$ se nazývá aritmetická posloupnost. Číslo d se nazývá *diference*. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Příklad (Geometrická posloupnost)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro kterou platí $a_{n+1} = qa_n$, $n \in \mathbb{N}$ se nazývá geometrická posloupnost. Číslo q se nazývá *kvocient*. Součet prvních n členů geometrické posloupnosti je

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Mohutnost množiny

Otázka

Jak porovnat "velikost" dvou nekonečných množin? Lze říci, která z množin je "větší"?

Definice 13 (Mohutnost množiny)

Mohutnost množiny A budeme značit $m(A)$. Množina A je

- ① konečná pokud $m(A) = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$
- ② spočetná, pokud $m(A) = m(\mathbb{N})$
- ③ nespočetná pokud není konečná a není spočetná.

Definice 14

Množiny A a B mají stejnou mohutnost ($m(A) = m(B)$), pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : A \mapsto B$.

Poznámka

Podle definice je tedy množina spočetná, pokud ji můžeme uspořádat do posloupnosti, tj. můžeme všechny její prvky očíslovat přirozenými čísly. Nespočetnou množinu nemůžeme uspořádat do posloupnosti, tj. nelze její prvky očíslovat přirozenými čísly.

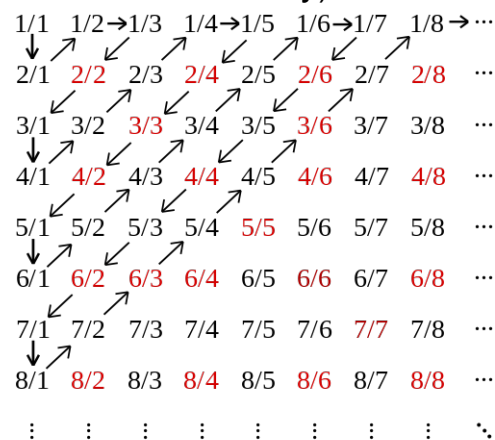
Spočetné a nespočetné množiny

Věta 7 (Georg Cantor (1845-1918))

- ① *Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je spočetná.*
- ② *Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je spočetná.*
- ③ *Intervaly $A = (0, 1)$ a $B = (0, 2)$ mají stejnou mohutnost*
- ④ *Čtverec $A = (0, 1) \times (0, 1)$ a interval $B = (0, 1)$ mají stejnou mohutnost.*
- ⑤ *Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.*
- ⑥ *Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je **nespočetná**.*

Důkaz

1. $\mathbb{N}$ je spočetná množina podle definice. Každý prvek očíslováme sebou samým.
2. Množinu $\mathbb{Z}$ uspořádáme do posloupnosti např. následovně: $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = -2, a_6 = 3, a_7 = -3$, etc.
3. Zobrazení $f(x) = 2x$ je vzájemně jednoznačné mezi množinami $A = (0, 1)$ a $B = (0, 2)$.
4. Zobrazení definované následovně $(x, y) = (0.x_1x_2x_3\cdots, 0.y_1y_2y_3\cdots) \in (0, 1) \times (0, 1) \mapsto 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots \in (0, 1)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení jednotkového čtverce $(0, 1) \times (0, 1)$ na interval $(0, 1)$. Georg Cantor v roce 1877 řekl: "Vidím to, ale nevěřím tomu."
5. Idea důkazu, že množina $\mathbb{Q}$ je spočetná vychází z uspořádání kladných racionálních čísel do posloupnosti (je ovšem ještě zapotřebí odstranit nezkrácené zlomky)



6. To, že reálná čísla jsou nespočetná dokázal také G. Cantor pomocí diagonální metody. Důkaz provedeme sporem pro interval $[0, 1)$, tj. předpokládejme, že reálná čísla z intervalu $[0, 1)$ můžeme očíslovat přirozenými čísly, tj. že je můžeme uspořádat do posloupnosti $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = [0, 1)$, přičemž

$$x_1 = 0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 \dots$$

$$x_2 = 0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \dots$$

$$x_3 = 0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \dots$$

$$x_4 = 0.a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^4 \dots$$

$$\vdots$$

kde $a_i^j \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Nyní zkonstruujeme nové reálné číslo

$$y = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$$

kde $b_i \neq a_i^i$ (a ne všechna b_i rovna 9). Číslo $y \in [0, 1)$ je tedy zcela jistě různé od všech čísel x_i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Obdrželi jsme tedy spor s předpokladem, že všechna reálná čísla lze očíslovat přirozenými čísly.

Definice 16 (Intervaly v $\mathbb{R}$)

Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- 1 Otevřený interval: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- 2 Uzavřený interval: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- 3 Interval zleva uzavřený, zprava otevřený: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- 4 Shora neomezený interval: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- 5 Zdola neomezený interval: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- 6 Pro $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ množina $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se nazývá ε -okolí bodu a
- 7 Pro $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ množina $U(a, \varepsilon) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$ se nazývá prstencové ε -okolí bodu a



Symbyly ∞ a $-\infty$ **nej**sou reálná čísla a **neplatí** pro ně pravidla pro počítání s reálnými čísly. Např. následující výrazy **nej**sou definovány: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 1^∞ .

Věta 8

- ① Mezi libovolnými dvěma různými reálnými čísly leží racionální číslo.
- ② Mezi libovolnými dvěma různými reálnými čísly leží iracionální číslo.

Důkaz

- ① Necht' $x, y \in \mathbb{R}$, $y - x > 0$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n(y - x) > 1$. Pak existuje celé číslo m , takové, že $nx < m < ny = nx + n(y - x)$. Platí tedy $x < \frac{m}{n} < y$.
- ② Necht' $x, y \in \mathbb{R}$, $y - x > 0$. Pak $\frac{1}{\sqrt{2}}x < \frac{1}{\sqrt{2}}y$. Z předchozího tvrzení plyne, že existuje racionální číslo $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $\frac{1}{\sqrt{2}}x < r < \frac{1}{\sqrt{2}}y$ tj., $x < r\sqrt{2} < y$ a $r\sqrt{2}$ je iracionální.

