

Příklady k procvičení

1. Doplňte následující tabulku:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$
$(1, 3)$	$[2, 5]$				
$(-2, 3]$	$[3, 4)$				
$(0, +\infty)$	$[-1, 1]$				
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$				

Poznámka: $\mathbb{I}$ označuje množinu všech iracionálních čísel

2. Rozhodněte, zda je množina A konečná, spočetná nebo nespočetná:

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $A = (2, 7)$ | d) $A = (2, 7) \setminus \mathbb{Q}$ |
| b) $A = (2, 7) \cap \mathbb{N}$ | e) $A = \{(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$ |
| c) $A = (2, 7) \cap \mathbb{Q}$ | f) $A = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ |

3. Určete $\min A$, $\max A$, $\inf A$, $\sup A$ a rozhodněte, zda je množina A omezená:

- | | |
|---|--|
| a) $A = \{x^2 + 1; x \in [1, 2)\}$ | d) $A = \{x \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} - x < 2\}$ |
| b) $A = \{\frac{(-1)^n}{n^2}; n \in \mathbb{N}\}$ | e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - 6x < 0\}$ |
| c) $A = \{2 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ | f) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 3\}$ |

4. Uveďte příklad množiny s následujícími vlastnostmi (pokud taková množina neexistuje, zdůvodněte):

- a) $\sup A = 5$ a A není omezená;
- b) $A \subset \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ a $\min A = \max A$;
- c) A je spočetná a $\max A$ neexistuje
- d) $\sup A + \inf A = 5$ a A není konečná
- e) A je omezená a $\inf A > \sup A$

5. Napište předpisy funkcí, je-li:

- a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f_1(x) = f(x^2 - 1)$, $f_2(x) = (f(x))^2 + f(2)$
- b) $g(\theta) = \sin(2\theta)$, $g_1(\theta) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot g(-\theta)$, $g_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{g(\theta)}}$
- c) $u(t) = t + \frac{2}{t}$, $u_1(t) = u\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $u_2(t) = u(1 - u(t - 1))$

Výsledky:

1.

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$
$(1, 3)$	$[2, 5]$	$[2, 3)$	$(1, 5]$	$(1, 2)$	$[3, 5]$
$(-2, 3]$	$[3, 4)$	$\{3\}$	$(-2, 4)$	$(-2, 3)$	$(3, 4)$
$(0, +\infty)$	$[-1, 1]$	$(0, 1]$	$[-1, +\infty]$	$(1, +\infty)$	$[-1, 0]$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$

2. a) nespočetná; b) konečná; c) spočetná; d) nespočetná; e) konečná; f) spočetná

3. a) $\min A = 2 = \inf A$, $\sup A = 5$, $\max A$ neexistuje; omezenáb) $\min A = -1 = \inf A$, $\max A = \frac{1}{4} = \sup A$; omezenác) $\max A = 3 = \sup A$, $\inf A = 2$, $\min A$ neexistuje; omezenád) $\min A = 0 = \inf A$, $\max A = 3 = \sup A$; omezenáe) $\sup A = 3$, $\inf A = -\infty$, $\min A$ neexistuje, $\max A$ neexistuje; není omezená (je omezená pouze shora)f) $\inf A = 3$, $\sup A = +\infty$, $\min A$ neexistuje, $\max A$ neexistuje; není omezená (je omezená pouze zdola)4. a) např. $A = (-\infty, 5)$; b) např. $A = \{\pi\}$; c) např. $A = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$; d) např. $(1, 4)$;

e) neexistuje

5. a) $f_1(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $f_2(x) = (\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{3} = x + 1 + \sqrt{3}$ b) $g_1(\theta) = -\sin(-2\theta) = \sin \theta = g(\theta)$, $g_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin(2\theta)}}$ c) $u_1 = \frac{1}{t^2} + 2t^2$, $u_2 = u\left(\frac{-2}{t-1}\right) = -\frac{2}{t-1} - t + 1$