

Přednáška 3: Supremum a infimum množiny

Omezená množina

Definice 17 (Omezená množina)

Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pokud existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé číslo $x \in A$ platí, že $x \leq c$ ($x \geq c$), pak množinu A nazýváme shora (zdola) omezenou a číslo c nazýváme horní (dolní) závorou (event. odhadem, omezením). Množina se nazývá omezená, pokud je omezená shora i zdola.

Definice 18 (Minimum, maximum)

Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pokud existuje číslo $a \in A$ takové, že pro každé číslo $x \in A$ platí $x \leq a$ ($x \geq a$), pak a se nazývá maximum (minimum) množiny A . Značíme $a = \max A$ ($a = \min A$).



V definici minima (maxima) je důležité to, že minimum (maximum) je prvkem množiny A .

Příklad

1. Množina $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ je omezená, $\max A = 1$ ale $\min A$ neexistuje.
2. Množina $(1, 2)$ je omezená, ale nemá ani minimum ani maximum.

Supremum a infimum množiny

Supremum a infimum množiny zobecňují pojem maxima a minima i pro množiny, které maximum a minimum nemají.

Definice 19 (Supremum a infimum)

Nechť A je neprázdná ($A \neq \emptyset$), shora omezená podmnožina reálných čísel.

Supremum množiny A je reálné číslo, které značíme jako $\sup A \in \mathbb{R}$ a které splňuje

- (1) pro každý prvek $x \in A$ platí $x \leq \sup A$
- (2) žádné číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $x < \sup A$ není horní závorou množiny A .

Nechť A je neprázdná ($A \neq \emptyset$), zdola omezená podmnožina reálných čísel.

Infimum množiny A je reálné číslo, které značíme jako $\inf A$ a které splňuje

- (1) pro každý prvek $x \in A$ platí $x \geq \inf A$
- (2) žádné číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $x > \inf A$ není dolní závorou množiny A .

Poznámka

Supremum množiny je tedy její nejmenší horní závora a infimum množiny je její největší dolní závora.

Supremum a infimum množiny

Příklad

Nechť $a < b$.

- ① $\sup(a, b) = b$, $\max(a, b)$ neexistuje
- ② $\inf(a, b) = a$, $\min(a, b)$ neexistuje
- ③ $\sup\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \max\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = 1$
- ④ $\inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = 0$, $\min\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ neexistuje

Důkaz

Dokážeme, že $\inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = 0$. (Ostatní případy si rozmyslete sami!).

- ① Platí, že $0 < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tj. 0 je dolní závora množiny $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.
- ② Musíme dokázat, že 0 je největší dolní závora. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje dolní závora $L > 0$. Pak pro $n > \frac{1}{L}$ platí, že $\frac{1}{n} < L$, což je spor s tím, že L je dolní závora množiny M .



Cantorovo diskontinuum jako příklad "netriviální" množiny v $\mathbb{R}$

Většina podmnožin $\mathbb{R}$ se kterými se prakticky setkáváme, jsou intervaly. Množiny v $\mathbb{R}$ jsou ale daleko složitější. Jednou ze "zajímavých" podmnožin intervalu $[0, 1]$ je tzv. Cantorovo diskontinuum. Tuto množinu konstruujeme následujícím způsobem. Z intervalu $[0, 1]$ odstraníme prostřední třetinu, tj. interval $(1/3, 2/3)$. Získáme tak dva uzavřené intervaly $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Z každého tohoto intervalu opět odstraníme prostřední třetinu (tj. odstraníme dva intervaly délky $1/9$) a tak budeme postupovat do nekonečna. Mohlo by se zdát, že tímto způsobem odstraníme nakonec všechny body, protože délka segmentů, které vylučujeme je rovna 1 (Jedná se o součet geometrické řady $1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$). Ale není tomu tak. Výsledná množina je neprázdná a nazývá se Cantorovo diskontinuum (nebo Cantorova množina). Cantorovo diskontinuum má řadu zajímavých vlastostí, lze např. ukázat že Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina.

Věta o supremu a infimu

Věta 9 (Věta o supremu a infimu)

Nechť $E \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina ($E \neq \emptyset$).

- ① *Je-li množina E shora omezená, pak existuje $\sup E$.*
- ② *Je-li množina E zdola omezená, pak existuje $\inf E$.*

Poznámka

Význam Věty o supremu a infimu spočívá v tom, že supremum a infimum existuje (na rozdíl od minima a maxima) pro každou omezenou a neprázdnou množinu v $\mathbb{R}$.

Důkaz věty o supremu

Definujeme reálné číslo $a_0.a_1a_2\dots$ ($a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, \dots, 9\}$) následovně:

- ① $a_0 \in \mathbb{Z}$ je největší celé číslo, které není horní závorou množiny E , tj. $a_0 + 1$ je horní závora množiny E .
- ② $a_1 \in \{0, \dots, 9\}$ je největší číslice taková, že číslo $a_0.a_1$ není horní závorou množiny E , tj. $a_0.a_1 + \frac{1}{10}$ je horní závorou množiny E .
- ③ $a_2 \in \{0, \dots, 9\}$ je největší číslice taková, že $a_0.a_1a_2$ není horní závorou množiny E , tj., číslo $a_0.a_1a_2 + \frac{1}{10^2}$ je horní závorou množiny E atd.

Nyní dokážeme, že takto definované číslo $a = a_0.a_1a_2\dots$ je supremem množiny E , tj.

$$\sup E = a$$

Podle definice suprema, musíme dokázat, že

- (a) a je horní závora množiny E
- (b) je to nejmenší horní závora.

Pokračování důkazu

(a) Nejprve dokážeme, že $a = a_0.a_1a_2\dots$ je horní závora množiny E , tj. že pro každé $x \in E$ platí $x \leq a$. Toto dokážeme pomocí důkazu sporem. Budeme předpokládat, že tvrzení neplatí, tj. existuje $y \in E$ tak, že $y > a$. Necht' $y = y_0.y_1y_2\dots$ je desetinný rozvoj čísla y . Podle definice nerovnosti mezi reálnými čísly (viz. Definice 5) tedy platí, že existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\underline{y}_n > \bar{a}_n,$$

tj.,

$$y_0.y_1y_2\dots y_n > a_0.a_1a_2\dots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

To je ovšem spor s tím, že $a_0.a_1a_2\dots a_n + \frac{1}{10^n}$ je horní závora množiny E podle konstrukce čísla a .

(b) Nyní dokážeme, že číslo a je nejmenší horní závora. Důkaz opět provedeme sporem, tj. budeme předpokládat, že existuje horní závora b , množiny E , která je menší než a , tj. $b < a$. Existuje tedy $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\bar{b}_m = b_0.b_1\dots b_m + \frac{1}{10^m} < a_0.a_1\dots a_m.$$

To by ovšem znamenalo, že číslo $a_0.a_1\dots a_m$ je horní závora množiny E . To je však ve sporu s konstrukcí čísla a . □

Příklady

Příklad

Dokažte podle definice, že $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} = 2$.

Příklad

Uvažujme množinu

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- ① $\sup A = \max A = 1$
- ② $\min A$ *neexistuje*
- ③ $\inf A = 0$

Eulerovo číslo e

Věta 10

- ① Množina $E = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná a shora omezaná.
- ② Posloupnost $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí, tj. $a_n < a_{n+1}$

Poznámka

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^N$ si můžeme zobrazit na počítači pro libovolné konečné $N \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy pro libovolný konečný počet prvků posloupnosti ukázat, že jsou omezené. Pomocí počítače ale nemůžeme dokázat, že nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

Důkaz Věty 10

1. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a dále zvolíme libovolně $k < n$, $k \in \mathbb{N}$. Pak podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n-1}{n} \dots \frac{1}{n} = \\
 &\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq \\
 &\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = \\
 &\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots n}\right) < \\
 &\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right) = \\
 &\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^{n-k}}{1 - \frac{1}{k+1}} = \\
 &\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1} \frac{k+1}{k} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right) < \\
 &\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{k!} \frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

Např. pro $k = 1$ a všechna $n > 1$ platí $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} \frac{1}{1} = 1 + 1 + 1 = 3$, tj. množina E je shora omezená.

Pokračování důkazu

2. Dokážeme, že posloupnost a_n je rostoucí.

Z bodu 1. plyne, že

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$
$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots +$$
$$\frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Protože

$$1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n-1,$$

srovnáním výrazu pro a_{n+1} s výrazem pro a_n vidíme, že $a_n < a_{n+1}$.



Eulerovo číslo

Definice 20

Číslo $e := \sup\{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá Eulerovo číslo.

Poznámka

Protože množina $\{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je shora omezená (Věta 10) a neprázdná, tak existuje její supremum podle Věty o supremum a infimu (Věta 9). $\square$

Poznámka

Eulerovo číslo je také možné ekvivalentně definovat^a jako

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

^aTo je důsledkem toho, že $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1}$. Pokud je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vlastnosti Eulerova čísla

Některé vlastnosti Eulerova čísla:

- 1 Eulerovo číslo je iracionální, takže jeho desetinný rozvoj je nekonečný a neperiodický.
- 2 Hodnota Eulerova čísla je přibližně $e \doteq 2.72$.
- 3 Eulerovo číslo je základem pro přirozený logaritmus.