

Přednáška 4: Funkce 1

Funkce

Definice 21 (Funkce)

Nechť $D \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $f : D \mapsto \mathbb{R}$ se nazývá reálná funkce reálné proměnné. Množina D se nazývá definiční obor funkce a množina

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D, y = f(x)\}$$

se nazývá graf funkce f . Množina $H(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{existuje } x \in D, y = f(x)\}$ se nazývá obor hodnot funkce.

Vertikální test: Křivka v rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je grafem funkce právě když žádná vertikální čára neprotíná graf ve více než jednom bodě.

Poznámka (Přirozený definiční obor funkce)

Pokud funkce f nemá specifikovaný definiční obor, pak rozumíme jejím definičním oborem všechna reálná čísla, pro která je funkční předpis také reálné číslo. Definiční obor značíme $D(f)$.

Rovnost funkcí

Definice 22

Funkce f a g jsou si rovny, pokud platí:

- ① *Definiční obory se navzájem rovnají, tj. $D(f) = D(g)$*
- ② *Funkční hodnoty se rovnají, tj. $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in D(f)$.*

Příklad

Funkce $f(x) = x + 1$ a $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ se nerovnají, protože definiční obor funkce f , tj. $D(f) = \mathbb{R}$ se nerovná definičnímu oboru funkce g , tj. $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pro $x \in D(g)$ platí $f(x) = g(x)$.



Algebraické operace s funkcí mohou změnit její definiční obor!

Elementární funkce

Definice 23

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá:

- ① Lineární, pokud $f(x) = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}$. Parametr k se nazývá směrnice přímky a platí, že $k = \tan \alpha$, kde α je úhel, který svírá graf funkce s osou x . Grafem lineární funkce je přímka.
- ② Kvadratická, pokud $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $D(f) = \mathbb{R}$. Grafem kvadratické funkce je parabola s vrcholem v bodě $[x, f(x)] = [-\frac{b}{2a}, -(\frac{b^2}{4a} - c)]$
- ③ Absolutní hodnota,

$$f(x) = |x| := \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Graf funkce absolutní hodnota má tvar písmene V.

Vzorec pro řešení kvadratické rovnice metodou tzv. doplnění na čtverec

Nechť $a > 0$. Pak

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a} x \right) + c = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \end{aligned}$$

tj. řešení rovnice $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = 0$ je

$$x = \pm \sqrt{\frac{a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - c}{a}} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Věta 12 (Vzorec pro řešení kvadratické rovnice)

Řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má tvar

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Příklad

Příklad

Vyřešte rovnici $x^2 + 2x - 3 = 0$ dplněním na čtverec.

$$x^2 + x - 6 = (x^2 + 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2) - 6 - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

tj.,

$$\begin{aligned}x^2 + x - 6 &= 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} &= 0 \\ x + \frac{1}{2} &= \pm \frac{5}{2} \\ x &= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}\end{aligned}$$

tj. řešení jsou 2 a -3.

Funkce absolutní hodnota

Věta 13 (Některé vlastnosti funkce absolutní hodnota)

- 1 $|-x| = |x|$ *pro* $x \in \mathbb{R}$
- 2 $-|x| \leq x \leq |x|$ *pro* $x \in \mathbb{R}$
- 3 $|xy| = |x| |y|$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}$
- 4 $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$
- 5 $|x + y| \leq |x| + |y|$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}$ (Trojúhelníková nerovnost)
- 6 $|x| = \sqrt{x^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$

Důkaz

- 1
 - Je-li $x > 0$, pak $|x| = x$ a $|-x| = -(-x) = x$.
 - Je-li $x < 0$, pak $|x| = -x$ a $|-x| = -x$.
 - Je-li $x = 0$, pak $|x| = 0$ a $|-x| = 0$.
- 2 Proved'te důkaz sami.
- 3
 - Je-li $x = 0$ nebo $y = 0$ pak $|xy| = 0$ a $|x||y| = 0$.
 - Je-li $x > 0$ a $y > 0$ pak $|xy| = xy$ a $|x||y| = xy$.
 - Je-li $x > 0$ a $y < 0$ pak $|xy| = -xy$ a $|x||y| = x(-y)$.
 - Je-li $x < 0$ a $y > 0$ pak $|xy| = -xy$ a $|x||y| = (-x)(y)$.
 - Je-li $x < 0$ a $y < 0$ pak $|xy| = xy$ a $|x||y| = (-x)(-y) = xy$.

4 Proved'te důkaz sami.

5 Protože platí

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

a tedy

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

tj.

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

6 Proved'te důkaz sami.



Aritmetické operace s funkcemi

Definice 24

Necht' jsou zadány funkce f a g . Pak definujeme:

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$

(2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$

(3) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$

(4) $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$, $g(x) \neq 0$

(5) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ pro $x \in D(f \circ g) = \{x \mid x \in D(g), g(x) \in D(f)\}$.



Skládání funkcí není komutativní operace, protože $f \circ g \neq g \circ f$

Příklad

Uvažujme funkce $f(x) = x^2 + 3$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Pak

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x + 3, \quad D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 3}, \quad D(g \circ f) = \mathbb{R}$$

Sudá, lichá a periodická funkce

Definice 25

Funkce f se nazývá

- ① sudá, pokud platí $f(-x) = f(x)$ pro $x \in D(f)$
- ② lichá, pokud platí $f(-x) = -f(x)$ pro $x \in D(f)$
- ③ periodická, pokud existuje $T > 0$ tak, že je-li $x \in D(f)$ pak $x \pm T \in D(f)$ a platí, že $f(x + T) = f(x)$.

Poznámka

Je-li $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ periodická funkce s periodou T , pak je podle definice tato funkce definovaná na všech intervalech $[a + kT, b + kT]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Pokud je $T \leq (b - a)$, pak je tedy funkce f definovaná na celé reálné ose, tj. pro $x \in \mathbb{R}$.

Věta 14

- ① Graf funkce je symetrický podle osy y právě když je funkce sudá.
- ② Graf funkce je symetrický podle počátku souřadného systému právě když je funkce lichá.

Důkaz

Důkaz

- 1 Graf je symetrický podle osy $y \iff ([x, y] \in \text{Graf}(f) \iff [-x, y] \in \text{Graf}(f)) \iff (y = f(x) \iff y = f(-x)) \iff \text{funkce } f \text{ je sudá.}$
- 2 Graf je symetrický podle počátku $\iff ([x, y] \in \text{Graf}(f) \iff [-x, -y] \in \text{Graf}(f)) \iff (y = f(x) \iff -y = f(-x)) \iff f(x) = -f(-x) \iff \text{funkce } f \text{ je lichá.}$

Inverzní funkce

Definice 26 (Inverzní funkce)

Jestliže dvě funkce f a g splňují podmínky

① $f(g(x)) = x$ pro každé $x \in D(g)$

② $g(f(x)) = x$ pro každé $x \in D(f)$

pak f a g se nazývají inverzní funkce. Zapisujeme $f = g^{-1}$ a $g = f^{-1}$.



Je zapotřebí rozlišovat mezi inverzní funkcí $f^{-1}(x)$ a (-1) mocninou funkce $f(x)$, tj. $f(x)^{-1} \equiv \frac{1}{f(x)}$.

Inverzní funkce

Věta 15

Funkce má inverzní funkci právě když je prostá.

Horizontální test: Funkce f má inverzní funkci právě když libovolná horizontální přímka protíná graf funkce maximálně v jednom bodě.

Důkaz

Důkaz

Chceme dokázat, že je-li funkce f prostá, pak f^{-1} je funkce podle Definice 9, tj. musíme ověřit podmínku z Věty 6.

Funkce f je prostá právě když

$$(x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2 \in D(f) \implies y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2) \iff$$

$$(y_1 = y_2 \implies x_1 = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x_2) \iff f^{-1} \text{ je funkce podle Věty 6.}$$

Inverzní funkce

Věta 16

Grafy inverzních funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy $y = x$.

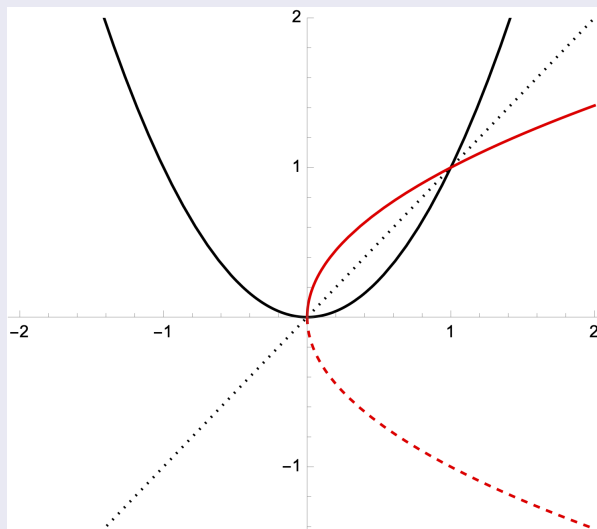
Důkaz

$[x, y] \in \text{Graph}(f) \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff [y, x] \in \text{Graph}(f^{-1}) \iff$
body $[x, y]$ a $[y, x]$ jsou symetrické podle osy $y = x$ □

Inverzní funkce nemusí existovat

Příklad

Uvažujme kvadratickou funkci $f(x) = x^2$ (její graf je vyznačen plnou, černou čarou). Graf symetrický podle osy $y = x$ (tečkovaná přímka) je vyznačen červeně (plná i čárkovaná čára). Tento graf není ovšem grafem žádné funkce (není splněn vertikální test, viz. poznámka pod Definicí 21). To je způsobeno tím, že funkce f není prostá na svém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$, takže k ní na tomto intervalu neexistuje inverzní funkce. Definiční obor funkce $f = x^2$ zúžíme na interval $[0, \infty)$. Na tomto intervalu je funkce f prostá a existují k ní inverzní funkce $f^{-1}(x)$. Tuto inverzní funkci značíme $\sqrt{x}$ (její graf je vyznačený červenou, plnou čarou na obrázku).



Poznámka

V předchozím příkladě bychom mohli také postupovat tak, že definiční obor funkce $f = x^2$ zúžíme na interval $(-\infty, 0]$. Na tomto intervalu je funkce f prostá a graf k ní inverzní funkce je vyznačen na předchozím obrázku červenou, přerušovanou čarou. Je tedy vidět že v případě funkcí, které nejsou prosté, existuje více možností, jak definovat inverzní funkci. V případě funkce druhá odmocnina se tato inverzní funkce konstruuje k funkci x^2 definované na intervalu $[0, \infty)$.

Postup při hledání inverzní funkce

Nejprve musíme zajistit, aby inverzní funkce k funkci f vůbec existovala, tj. pokud f není prostá (tj. nedefinuje prosté zobrazení), pak její definiční obor zúžíme tak, aby se jednalo o prosté zobrazení množiny $D(f)$ na množinu $H(f)$. Pak hledáme inverzní funkci takto:

- 1 Pro $y \in H(f)$ z rovnice $y = f(x)$ vypočítáme x v závislosti na y .
- 2 Ve výsledku prohodíme x a y (to odpovídá záměně os) a získáme inverzní funkci f^{-1} jejíž definiční obor $D(f^{-1}) = H(f)$ a obor hodnot $H(f^{-1}) = D(f)$.

Inverzní funkce k lineární a kvadratické funkci

Příklad

Inverzní funkcí k lineární funkci $y = f(x) = kx + q$ je lineární funkce

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{k}x - \frac{q}{k}.$$

Definice 27 (Odmocnina)

*Inverzní funkce ke kvadratické funkci $f : y = x^2$ se nazývá odmocnina $f^{-1} : y = \sqrt{x}$.
Její definiční obor je $D(f^{-1}) = \{x | x \geq 0\}$.*



- 1 K dané funkci nemusí existovat inverzní funkce. Např. k funkci $y = x^2$ s přirozeným definičním oborem $\mathbb{R}$ neexistuje inverzní funkce. Ke kvadratické funkci $y = x^2$ s definičním oborem $x \geq 0$ je inverzní funkce $y = \sqrt{x}$.
- 2 Definiční obor inverzní funkce f^{-1} se nemusí shodovat s definičním oborem funkce f

Funkce rostoucí a klesající

Definice 28 (Funkce rostoucí a klesající)

Funkce $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ se nazývá rostoucí (resp. klesající) pokud pro každé x_1 a x_2 z definičního oboru funkce takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

Věta 17

Každá rostoucí (klesající) funkce má inverzní funkci.

Důkaz

Je-li f rostoucí funkce, tj. $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$, pak platí, že $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, tj. funkce f je prostá a tedy existuje inverzní funkce. Důkaz pro klesající funkci je obdobný.



Mocninná funkce

Mocninná funkce je funkce ve tvaru

$$f(x) = x^a,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je zadaná konstanta, která se nazývá *exponent*. Nezávisle proměnná je x . Definiční obor mocninné funkce závisí na a .

Mocninná funkce s celočíselným exponentem

Definice 29

Pro $n \in \mathbb{N}$

- ① $f(x) = x^n$, pro každé reálné číslo x (tj. $D(f) = \mathbb{R}$)
- ② $f(x) = x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, pro každé reálné číslo $x \neq 0$, tj. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ③ $f(x) = x^0 := 1$, pro každé reálné číslo $x \neq 0$. (Výraz 0^0 nedefinujeme.)

Věta 18

- ① Je-li exponent n sudé číslo, pak je funkce $f(x) = x^n$ sudá. Pro $x < 0$ je klesající a pro $x > 0$ je rostoucí.
- ② Je-li exponent n liché číslo, pak je funkce $y = x^n$, lichá a je rostoucí pro všechna $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Pravidla pro počítání s mocninami pro $m, n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$:

- ① $x^n x^m = x^{n+m}$
- ② $(x^n)^m = x^{nm}$
- ③ $x^n y^n = (xy)^n$
- ④ Pro $x \neq 0$, $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- ⑤ Pro $y \neq 0$, $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

Mocninná funkce s racionálním exponentem

Definice 30 (n -tá odmocnina)

Inverzní funkce k funkci $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ se nazývá n -tá odmocnina

$$f(x) = \sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}.$$

Definiční obor je následující:

- ① Je-li n liché číslo, pak je definičním oborem a oborem hodnot této funkce $\mathbb{R}$
- ② Je-li n sudé číslo, pak je definičním oborem a oborem hodnot interval $[0, +\infty)$.

Odmocniny

Pravidla pro počítání s odmocninami:

- 1 Pro sudé $n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in [0, \infty)$ platí $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$
- 2 Pro sudé $n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in [0, \infty)$, $y \neq 0$ platí $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- 3 Pro sudé $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $x, y \in [0, \infty)$ platí $(\sqrt[n]{x})^k = \sqrt[n]{x^k}$
- 4 Pro liché $n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$
- 5 Pro liché $n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ platí $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- 6 Pro liché $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $(\sqrt[n]{x})^k = \sqrt[n]{x^k}$

Mocninná funkce s racionálním exponentem

Definice 31

Pro racionální exponent $r = \frac{m}{n}$, ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), je definiční obor mocninné funkce $f(x) = x^{\frac{m}{n}} (= \sqrt[n]{x^m})$ následující:

- ① Je-li $m > 0$, m sudé, pak $D(f) = \mathbb{R}$
- ② Je-li $m > 0$, m liché, n sudé, pak $D(f) = [0, +\infty)$,
- ③ Je-li $m < 0$, m sudé, pak $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- ④ Je-li $m < 0$, m liché, n sudé, pak $D(f) = (0, +\infty)$.

Pravidla pro počítání pro mocniny s racionálním exponentem

Věta 19

Nechť x, y jsou kladná reálná čísla a $r, s \in \mathbb{Q}$ jsou racionální čísla. Pak platí

1 $x^r x^s = x^{r+s}$

2 $(x^r)^s = x^{rs}$

3 $x^r y^r = (xy)^r$

4 $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

5 $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$

Pokud bychom nekladli žádná omezení na x a y , dostali bychom nepravdivá tvrzení. Např.,



$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} \neq \left((-1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[3]{(-1)^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.$$

Bylo zde nesprávně aplikované pravidlo $(x^r)^s = x^{rs}$ pro $x = -1$.

Důkaz

Dokážeme první tvrzení, tj. $x^r x^s = x^{r+s}$ pro $x \geq 0$, ostatní tvrzení se dokáží podobně.

Protože r, s jsou racionální čísla, tak je můžeme psát ve tvaru zlomků. Oba dva zlomky převedeme na společného jmenovatele, tj. $r = \frac{m}{n}$ a $s = \frac{p}{n}$, $m, p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak podle pravidel pro počítání s celočíselnými mocninami platí

$$x^r x^s = \sqrt[n]{x^m} \sqrt[n]{x^p} = \sqrt[n]{x^m x^p} = \sqrt[n]{x^{m+p}} = x^{\frac{m+p}{n}} = x^{r+s}.$$

Mocninná funkce s reálným exponentem

Mocninnou funkci s reálným exponentem můžeme definovat dvěma způsoby. Oba dva způsoby ovšem vedou ke stejné funkci.

Definice 32 (Mocninná funkce s reálným exponentem)

Pro reálný exponent $a \in \mathbb{R}$, a pro $x \in (0, \infty)$ definujeme $y = x^a$ následovně:

(i) *Je-li $x \geq 1$, $a > 0$ pak*

$$x^a := \sup\{x^r \mid 0 < r \leq a, r \in \mathbb{Q}\}.$$

(ii) *Je-li $0 < x < 1$, $a > 0$ a pak*

$$x^a := \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^a}$$

(iii) *Je-li $x > 0$ a $a > 0$ pak*

$$x^{-a} := \frac{1}{x^a}$$

(iv) *Je-li $a > 0$ pak $0^a := 0$*



❶ Mocnina s reálným exponentem je tedy definována pouze pro $x > 0$.

Mocninná funkce s reálným exponentem definovaná pomocí funkce $\ln$

Mocninnou funkci můžeme také definovat pomocí exponenciální funkce a logaritmické funkce (viz. Přednáška 5).

Definice 33 (Mocninná funkce s reálným exponentem definovaná pomocí suprema)

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme mocninnou funkci $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ následovně

$$f(x) = x^a := e^{a \ln x}.$$

Poznámka

Protože funkce $\ln$ je definovaná pouze pro kladná čísla, tak je mocninná funkce definovaná pomocí funkce $\ln$ definovaná také pouze pro $x > 0$.

Některé záludnosti počítačové algebry: Odmocnina v $\mathbb{R}$ vs. odmocnina v $\mathbb{C}$



- 1 V oboru reálných čísel platí $x = (\sqrt{x})^2$ POUZE pro $x \geq 0$ (protože odmocnina není definovaná pro záporná čísla)
- 2 V oboru komplexních čísel platí $z = (\sqrt{z})^2$ pro $z \in \mathbb{C}$. Proč?



- 1 Např. v programu Mathematica
 $\text{In}[1] := (\sqrt{x})^2$
 $\text{Out}[1] = x$
bez omezení na hodnoty x , tj. i pro $x < 0$. Důvodem je to, že Mathematica pracuje v oboru komplexních čísel, tj. pro $x < 0$ platí, že

$$(\sqrt{x})^2 = (i\sqrt{-x})^2 = (-1)(-x) = x.$$

- 2 Pokud chceme v programu Mathematica pracovat s odmocninou pouze v reálném oboru, použijeme funkci `Surd`.