

Příklady k procvičení

1. Napište předpisy složených funkcí a určete jejich definiční obory:

a) $f(x) = e^x$, $g(x) = 2x + 1$

$$f \circ g, \quad g \circ f$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \log x$, $h(x) = x^{-2}$

$$f \circ g \circ h, \quad g \circ f \circ h, \quad h \circ g \circ f, \quad f \circ h \circ f \circ g$$

2. Zapište následující funkce jako funkce složené z elementárních funkcí:

a) $y = 5^{\sqrt{x}}$

c) $y = \sin^3(\sqrt{x})$

b) $y = \tan |1 - 3x|$

d) $y = \frac{1}{\ln^2(-x)}$

3. Rozhodněte, zda je daná funkce sudá nebo lichá:

a) $f_1(x) = x^2 + x$

c) $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$

b) $f_2(x) = \frac{1}{|x| - 3}$

d) $f_4(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$

4. Načrtněte graf funkce f , která:

a) je prostá a není monotónní, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) je rostoucí, omezená shora a $f(0) < 0$

c) je lichá a $f(0) = -1$

d) je sudá a $H(f) = \mathbb{R}$

e) je nerostoucí a $H(f) = \{0, 1, 2\}$

5. Nechť je dána funkce f . Najděte inverzní funkci f^{-1} a načrtněte grafy obou funkcí

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$, $x \in [-1, 1]$

b) $f(x) = (x-1)^3$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Výsledky:

1. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{2x+1}$, $D(f \circ g) = \mathbb{R}$; $(g \circ f) = g(f(x)) = 2e^x + 1$,
 $D(g \circ f) = \mathbb{R}$;
 b) $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = \sqrt[3]{\log \frac{1}{x^2}}$, $D(f \circ g \circ h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $(g \circ f \circ h)(x) = g(f(h(x))) = \log \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \log x^{-2/3}$, $D(g \circ f \circ h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = \frac{1}{(\sqrt[3]{\log x})^2}$, $D(h \circ g \circ f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
 $(f \circ h \circ f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{(\sqrt[3]{\log x})^2}} = \log^{-2/9} x$, $D(f \circ h \circ f \circ g) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
2. a) $y = f(g(x)) = 5^{\sqrt{x}}$, $f(x) = 5^x$, $g(x) = \sqrt{x}$
 b) $y = f(g(h(x))) = \tan |1 - 3x|$, $f(x) = \tan x$, $g(x) = |x|$, $h(x) = 1 - 3x$
 c) $y = f(g(h(x))) = \sin^3(\sqrt{x})$, $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt{x}$
 d) $y = f(g(h(x))) = \frac{1}{\ln^2(-x)}$, $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = -x$
3. a) f_1 není ani sudá, ani lichá; b) f_2 je sudá; c) f_3 není ani sudá, ani lichá (definiční obor není symetrický); d) f_4 je lichá
4. a) např. $f(x) = \frac{1}{x+1}$; b) např. $f(x) = -(\frac{1}{2})^x$; c) neexistuje (lichá funkce definovaná v nule musí splňovat $f(0) = 0$); d) např. $f(x) = \ln |x|$;
 e) např. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x < 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$

Poznámka: V tomto příkladu stačí načrtnout graf *jakékoli* funkce s danými vlastnostmi, aniž byste znali její předpis. Pokud si nevíte rady, vykreslete si pomocí nějakého programu (např. [Wolfram Alpha](#)) výše uvedené příklady a zopakujte si, jak tyto funkce načrtnout užitím základních transformací grafů funkcí.

5. a) $f^{-1}(x) = x^2 - 2$, $D(f^{-1}) = [0, +\infty) = H(f)$, $H(f^{-1}) = [-2, +\infty) = D(f)$,
 b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R} = H(f)$, $H(f^{-1}) = \mathbb{R} = D(f)$
 c) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{-x - 1}$, $D(f^{-1}) = [-5, -1] = H(f)$, $H(f^{-1}) = [-1, 1] = D(f)$
 d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x-1}$, $D(f^{-1}) = (-\infty, 1) = H(f)$, $H(f^{-1}) = (0, +\infty) = D(f)$

Poznámka: Pro určení oboru hodnot původní funkce je dobré umět transformovat grafy elementárních funkcí. Pokud s tím máte potíže, určete obor hodnot s pomocí nějakého softwaru. Na příštím cvičení se k transformacím vrátíme.