

Přednáška 5 : Funkce exponenciální, logaritmická, goniometrické

Exponenciální a logaritmická funkce

Definice 34 (Exponenciální funkce)

Pro každé reálné číslo $a > 0$ a každé reálné číslo x se funkce

$$f(x) = a^x$$

nazývá exponenciální funkce o základu a . Definičním oborem jsou reálná čísla a pro $a \neq 1$ je oborem hodnot interval $(0, +\infty)$.

Pokud je $a = e$ (Eulerovo číslo) pak se funkce $y = e^x$ nazývá exponenciální funkce.



Rozdíl mezi exponenciální funkcí a mocninou funkcí je tedy v tom, že exponenciální funkce má nezávisle proměnnou x v exponentu, zatímco mocninná funkce x^a má nezávisle proměnnou v základu.

Exponenciální funkce

Poznámka

Funkci e^x je možné definovat i jinými způsoby, např. pomocí nekonečné řady (viz. Matematická analýza II)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

nebo jako^a

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (3)$$

^aVšimněte si, že pokud $x = 1$ ve vztahu (1), tak dostaneme definici Eulerova čísla

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Logaritmická funkce

Definice 35 (Logaritmická funkce)

- 1 Je-li $f(x) = a^x$ exponenciální funkce o základu $a > 0$, $a \neq 1$, pak inverzní funkce $f^{-1}(x)$ se nazývá logaritmická funkce o základu a a značí se $\log_a(x)$. Definiční obor logaritmické funkce je $(0, +\infty)$ a obor hodnot $\mathbb{R}$.
- 2 Logaritmická funkce o základu e se obvykle značí $\ln(x) := \log_e(x)$.

Nechť $x, y \in (0, \infty)$. Pak pro $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ platí

- 1 $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- 2 $\log_a(x^b) = b \log_a(x)$
- 3 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Exponenciální a logaritmická funkce

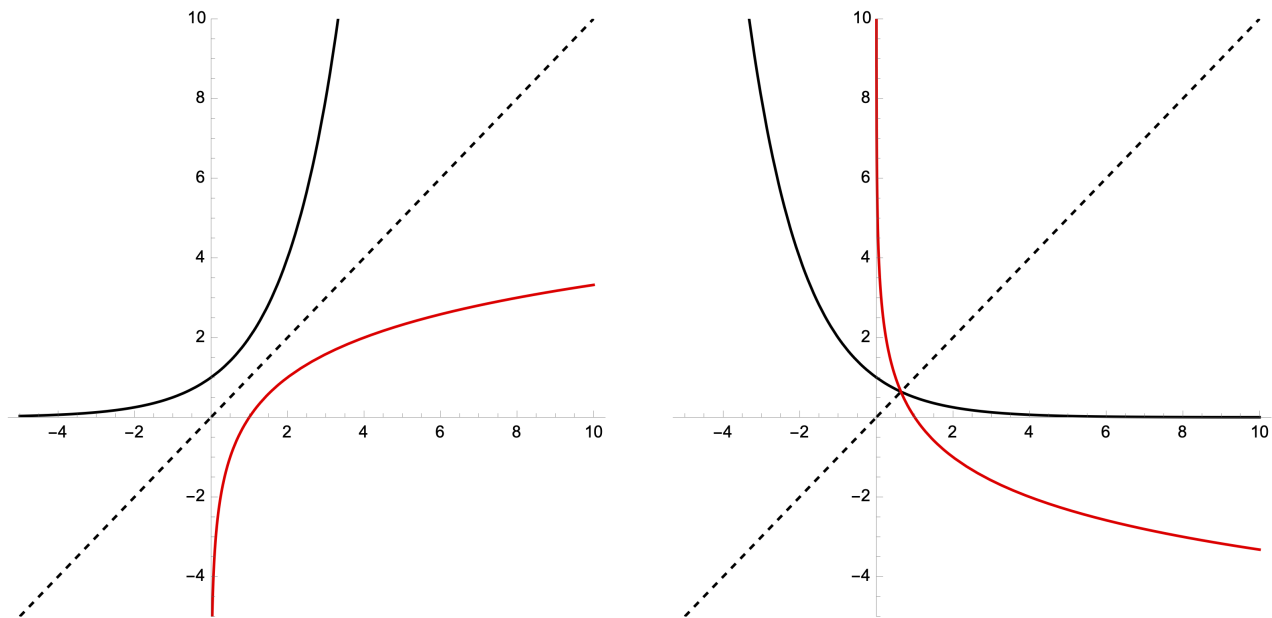
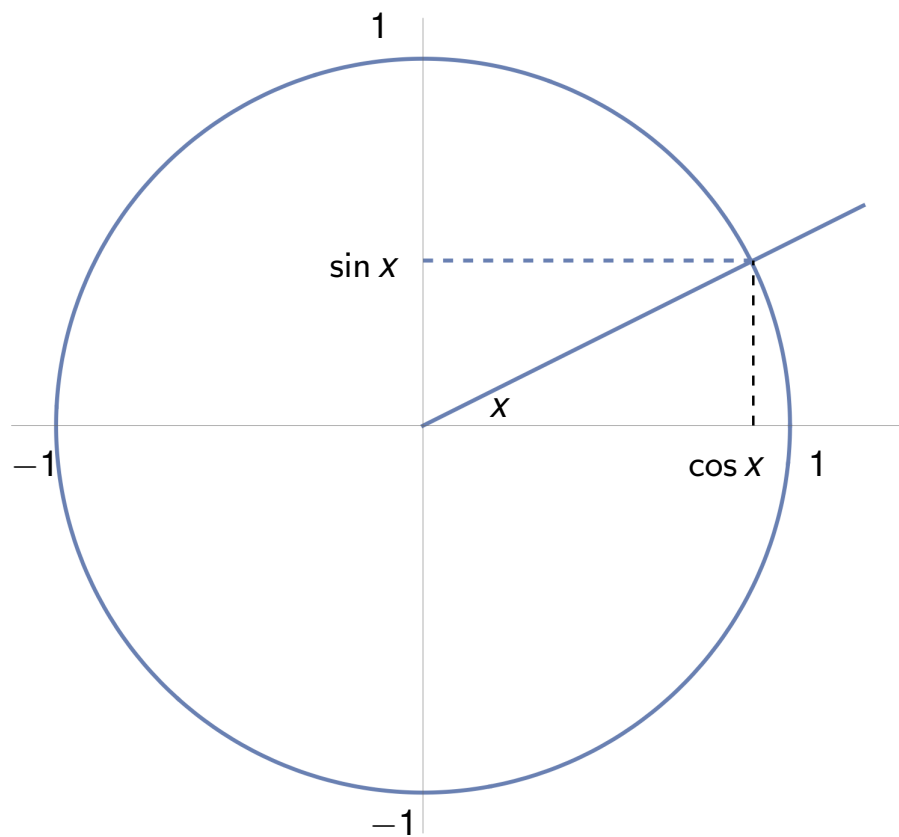


Figure: Levý obrázek znázorňuje graf exponenciální funkce 2^x (černá čára) a inverzní funkce $\log_2 x$ (červená čára). Pravý obrázek znázorňuje graf exponenciální funkce 0.5^x (černá čára) a inverzní funkce $\log_{0.5} x$ (červená čára).

Goniometrické funkce



Goniometrické funkce

- 1 Velikost úhlu se udává buď v úhlové míře (tj. ve stupních), nebo v obloukové míře (tj. v radiánech, přičemž $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$)
- 2 V následujícím textu budeme vyjadřovat velikost úhlu, pokud nebude řečeno jinak, vždy v radiánech.
- 3 Základní goniometrické funkce

$$f : y = \sin(x), \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = [-1, 1]$$

$$f : y = \cos(x), \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = [-1, 1]$$

$$f : y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad H(f) = \mathbb{R}$$

$$f : y = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad H(f) = \mathbb{R}$$

Některé základní goniometrické rovnosti

1

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

2

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

3

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

4

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

5

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

6

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

7

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

8

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

9

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Důkaz tří rovností

$$\triangle OAX \sim \triangle EDX$$

$$1. \sin(\alpha + \beta) = |AE| = |AC| + |CE| = |BD| + |CE| = \frac{|BD|}{|OD|} |OD| + \frac{|CE|}{|DE|} |DE| =$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

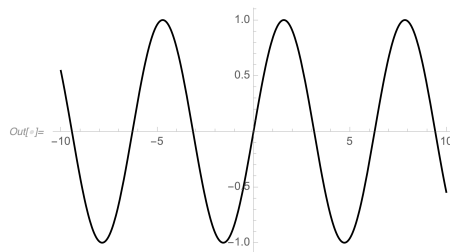
$$2. \sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = |OA| = |OB| - |AB| = |OB| - |CD| = \frac{|OB|}{|OD|} |OD| - \frac{|CD|}{|ED|} |ED| =$$

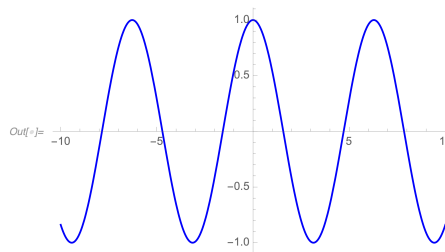
$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Cyklometrické funkce (inverzní funkce k funkcím goniometrickým) arcsin arccos

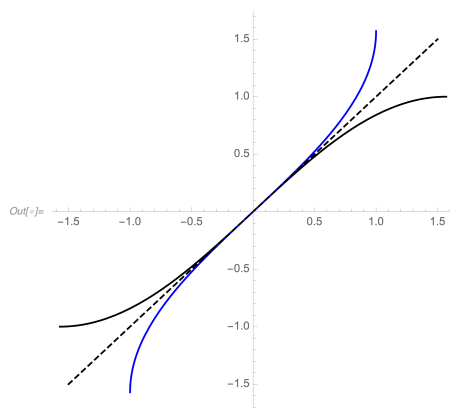
`In[ ]:= Plot[Sin[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Black]`



`In[ ]:= Plot[Cos[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Blue]`



`In[]:= Show[{Plot[Sin[x], {x, -π/2, π/2}, PlotStyle -> Black],
Plot[ArcSin[x], {x, -1, 1}, PlotStyle -> Blue],
Plot[x, {x, -1.5, 1.5}, PlotStyle -> {Dashed, Black}]],
AspectRatio -> 1, PlotRange -> All]`



`In[]:= Show[{Plot[Cos[x], {x, 0, π}, PlotStyle -> Black],
Plot[ArcCos[x], {x, -1, 1}, PlotStyle -> Blue],
Plot[x, {x, 0, 1.5}, PlotStyle -> {Dashed, Black}]], AspectRatio -> 1,
PlotRange -> All]`

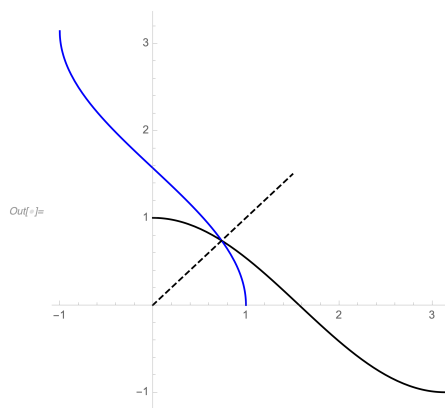
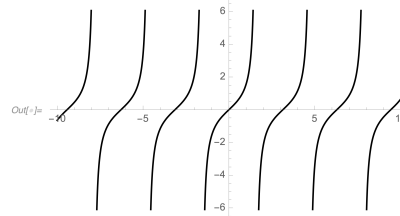


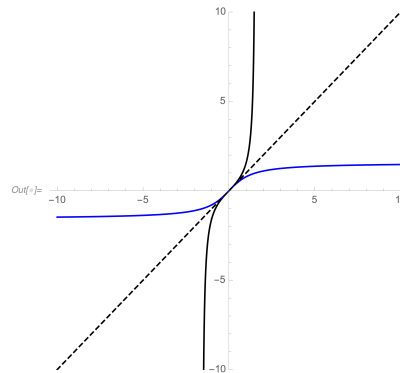
Figure: Inverzní funkce k sin (vlevo dole) a cos (vpravo dole). Černou čarou je vyznačena funkce sin nebo cos na intervalu, na kterém je prostá a modrou barvou je vyznačena inverzní

Cyklometrické funkce arctan, arccot

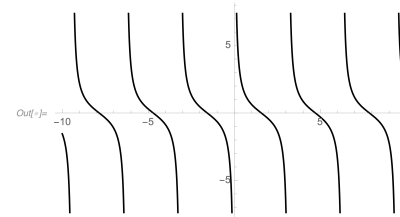
```
In[ ]:= Plot[Tan[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Black]
```



```
In[ ]:= Show[{Plot[Tan[x], {x, -pi/2, pi/2}, PlotStyle -> Black,
  PlotRange -> {-10, 10}],
  Plot[ArcTan[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Blue],
  Plot[x, {x, -10, 10}, PlotStyle -> {Dashed, Black}]], AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> All]
```



```
Plot[Cot[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Black]
```



```
In[ ]:= Show[{Plot[Cot[x], {x, 0, pi}, PlotStyle -> Black, PlotRange -> {-10, 10}],
  Plot[ArcTan[1/x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Blue],
  Plot[x, {x, -10, 10}, PlotStyle -> {Dashed, Black}]], AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> All]
```

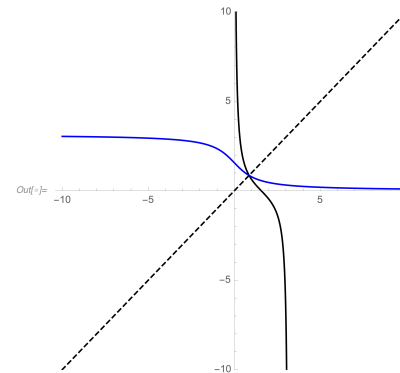
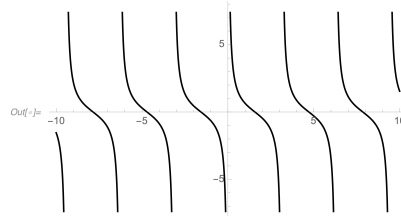


Figure: Inverzní funkce k tan (vlevo dole) a cot (vpravo dole). Černou čarou je vyznačena funkce tan nebo cot na intervalu, na kterém je prostá a modrou barvou je vyznačena inverzní funkce arctan a arccot

Cyklometrická funkce arccot implementace v programu Mathematica

```
In[ ]:= Plot[Cot[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Black]
```



```
In[ ]:= Show[{Plot[Cot[x], {x, -π/2, π/2}, PlotStyle -> Black,
  PlotRange -> {-10, 10}],
  Plot[ArcCot[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Blue],
  Plot[x, {x, -10, 10}, PlotStyle -> {Dashed, Black}]], AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> All]
```

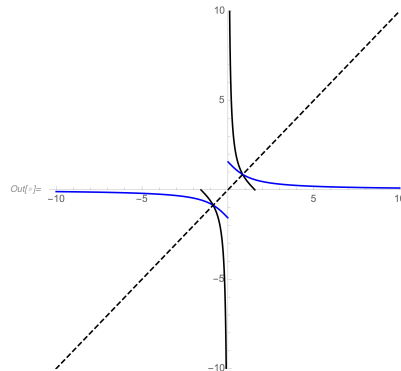


Figure: Implementace inverzní funkce k funkci cot v programu Mathematica. Funkce cot se uvažuje na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ na kterém je prostá, tj. existuje inverzní funkce, kterou Mathematica definuje funkcí arccot.

Cyklometrické funkce (inverzní funkce k funkcím goniometrickým)

$$f : y = \arcsin(x) := \sin^{-1}(x) \quad D(f) = [-1, 1], H(f) = [-\pi/2, \pi/2]$$

$$f : y = \arccos(x) := \cos^{-1}(x) \quad D(f) = [-1, 1], H(f) = [0, \pi]$$

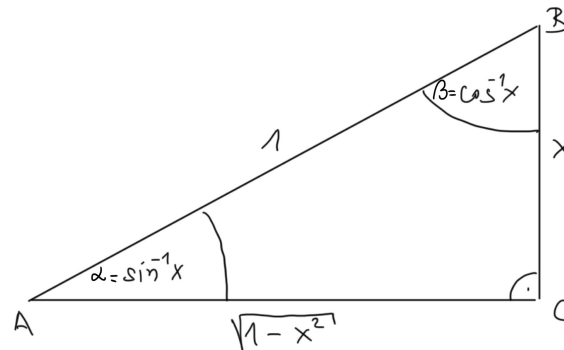
$$f : y = \arctan(x) := \tan^{-1}(x) \quad D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (-\pi/2, \pi/2)$$

$$f : y = \operatorname{arccot}(x) := \cot^{-1}(x) \quad D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0, \pi)$$

Poznámka

V případě funkcí, které nejsou prosté, závisí inverzní funkce na tom, na jaký interval zúžíme definiční obor funkce, abychom získali prosté zobrazení. Výše uvedené definice inverzních funkcí jsou běžně používány. Jak jsme ale viděli, např. program Mathematica definuje inverzní funkci k funkci cot jiným způsobem. Výše uvedená definice funkce arccot se konstruuje k funkci cot s definičním oborem $(0, \pi)$. Funkce arccot pak je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ s oborem hodnot $(0, \pi)$. Program Mathematica konstruuje inverzní funkci k funkci cot na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Inverzní funkce je pak definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ s oborem hodnot $(-\pi/2, \pi/2]$, přičemž funkce arccot je pak nespojitá funkce v bodě 0 a arccot v bodě 0 je definovaný hodnotou $\pi/2$.

Základní cyklometrické rovnosti



$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$$

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(\sin^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$



Je zapotřebí rozlišovat mezi $\sin^{-1} x$, tj. inverzní funkcí k funkci $\sin x$ a mezi -1 mocninou funkce $\sin x$, tj. $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$. Zda-li se jedná o inverzní funkci nebo o mocninu musí být zřejmé z kontextu.