

Přednáška 6: Limita funkce I

Limita posloupnosti

Neformální definice: *Limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je takové číslo L , že vzdálenost a_i od L můžeme udělat libovolně malou, pro všechny indexy i dostatečně veliké.*

Definice 36 (Definice limity posloupnosti)

Nechť je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak definujeme

Vlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

právě když pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \epsilon$.

Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

právě když pro každé číslo $N > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n > N$.

Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

právě když pro každé číslo $N < 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n < N$.

Limita posloupnosti

Zápis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$



vyjadřuje dvě vlastnosti:

- 1 Limita posloupnosti v daném bodě existuje
- 2 Hodnota této limity je rovna číslu $L \in \mathbb{R}$.

Příklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Důkaz

Podle Definice 36 chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$, najdeme $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > N$ platí $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, tj.

$$(1 - \varepsilon)^n < n < (1 + \varepsilon)^n.$$

Nerovnost $(1 - \varepsilon)^n < n$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost $n < (1 + \varepsilon)^n$ dokážeme pomocí binomické věty. Platí

$$(1 + \varepsilon)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \varepsilon^i > \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2.$$

Položíme-li $N > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$, tak pro $n > N$ platí

$$(1 + \varepsilon)^n > \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 > n.$$

Limita posloupnosti

Příklad (Limita posloupnosti nemusí existovat)

Posloupnost $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ nemá limitu.

Věta 20

- 1 Necht' posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající (tj. $a_{n+1} \geq a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$) a omezená shora. Pak existuje limita posloupnosti a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.
- 2 Necht' posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí (tj. $a_{n+1} \leq a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$) a omezená zdola. Pak existuje limita posloupnosti a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad

Protože posloupnost $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená (Věta 10) tak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} = e$$

Důkaz Věty 20

Důkaz

Dokážeme první tvrzení. Protože množina $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ je omezená shora, tak podle věty o supremu (Věta 9) víme, že existuje supremum této množiny a označíme

$$L = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Zvolíme si $\varepsilon > 0$. Z definice suprema plyne, že $a_n \leq L$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq L,$$

tj.

$$|a_{n_0} - L| < \varepsilon.$$

Protože posloupnost je rostoucí, tj. $a_n \leq a_{n+1}$, tak pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$. Dokázali jsme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Limita funkce-neformální definice

"Limita funkce f v bodě a , ve kterém funkce nemusí být definovaná, je takové číslo L , že vzdálenost funkce $f(x)$ od L je libovolně malá, pokud je x dostatečně blízko bodu a ."

Limita funkce

Definice 37 (Prstencové okolí bodu)

Pro libovolné $\epsilon > 0$ se množina $(a - \epsilon, a + \epsilon) \setminus \{a\}$ nazývá prstencové okolí bodu a .

Definice 38 (Vlastní limita ve vlastním bodě)

Nechť je funkce definována v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

($L \in \mathbb{R}$) právě když pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každý bod x z definičního oboru funkce f splňující $0 < |x - a| < \delta$ plyne, že $|f(x) - L| < \epsilon$.

1. Definice limity nepředpokládá, že by funkce byla definovaná v bodě, ve kterém se limita počítá (tj. v bodě a).

2. Zápis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

vyjadřuje dvě vlastnosti:

- ① Limita funkce v daném bodě existuje
- ② Hodnota této limity je rovna číslu L .



Příklad (Funkce není definovaná v bodě, ve kterém se počítá limita)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

Důkaz

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon. \quad (4)$$

Protože $x \neq 2$, tak platí (protože můžeme krátit)

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x - 2|.$$

Pokud zvolíme $\delta \leq \varepsilon$, pak platí (4).

Příklad (Funkce je definovaná v bodě, ve kterém se počítá limita)

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 5 = 1.$$

Důkaz

Zvolíme libovolné $\varepsilon > 0$. Protože

$$|3x - 5 - 1| < \varepsilon$$

$$|3x - 6| < \varepsilon$$

$$3|x - 2| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3},$$

tak stačí zvolit v definici limity $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Limita funkce

Definice 39 (Nevlastní limita ve vlastním bodě)

Nechť je funkce f definována v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

1

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

právě když pro každé číslo $N \in \mathbb{R}$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každý bod x z definičního oboru funkce f splňující $0 < |x - a| < \delta$ plyne, že $f(x) > N$

2

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

právě když pro každé číslo $N < 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každý bod x z definičního oboru funkce f splňující $0 < |x - a| < \delta$ plyne, že $f(x) < N$.

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Důkaz

Zvolme libovolné $N \in \mathbb{R}$. Pokud položíme $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}}$, pak platí, že pro

$$|x| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > N.$$

Limita funkce

Definice 40 (Vlastní limita v nevlastním bodě)

- 1 Necht' je funkce f definována v intervalu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

($L \in \mathbb{R}$) právě když pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje číslo $N > 0$ takové, že pro každý bod x z definičního oboru funkce f splňující $N < x$ plyne, že $|f(x) - L| < \epsilon$.

- 2 Necht' je funkce f definována v intervalu $(-\infty, A)$. Pak definujeme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

právě když pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje číslo $N < 0$ takové, že pro každý bod x z definičního oboru funkce f splňující $N > x$ plyne, že $|f(x) - L| < \epsilon$.

Nevlastní limita v nevlastním bodě

Definice 41

Nechť je funkce f definována v intervalu (A, ∞) , kde $A \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

právě když pro každé číslo $N \in \mathbb{R}$ existuje číslo $a > A$ takové, že pro každý bod x splňující $x > a$ plyne, že $f(x) > N$.

Poznámka

Obdobně se definují i další nevlastní limity v nevlastních bodech, tj.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Monodova křivka

Příklad (Monodova křivka-závislost rychlosti enzymatické reakce na koncentraci substrátu)

- S = koncentrace substrátu v enzymatické reakci,
- $v(S)$ = rychlost reakce,
- μ_{max} = maximální možná rychlost reakce,
- K_M = Michaelisova (polosaturační) konstanta,

$$v(S) = \frac{\mu_{max} S}{K_M + S}.$$

Pak platí

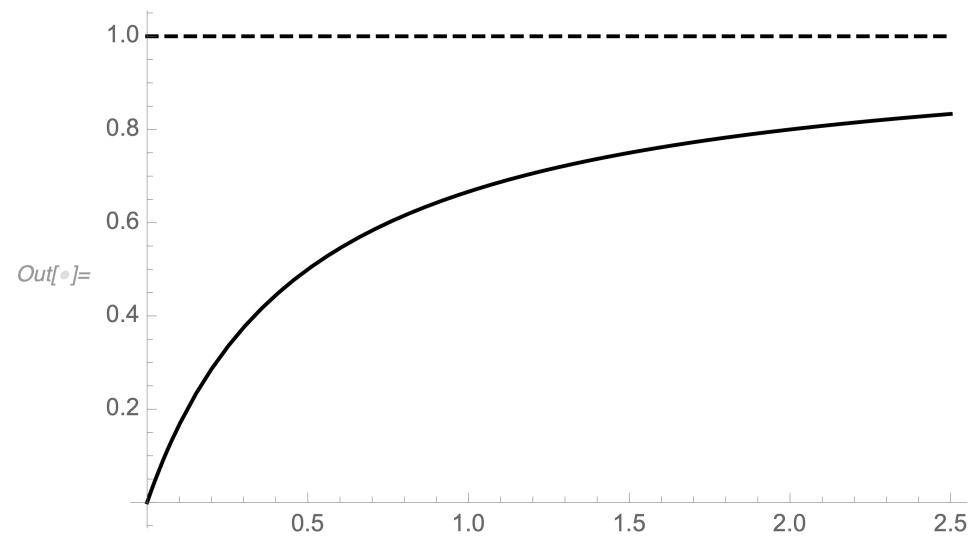
$$v(K_M) = \frac{\mu_{max}}{2}$$

a

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\mu_{max} S}{K_M + S} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\mu_{max}}{\frac{K_M}{S} + 1} = \mu_{max}$$

Monodova křivka

```
In[*]:= Plot[ $\left\{1, \frac{x}{0.5 + x}\right\}$ , {x, 0, 2.5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {{Black, Dashed}}
```



Limita funkce

Definice 42 (Jednostranná limita)

- 1 Necht' je funkce f definována v intervalu $(a - \Delta, a)$, $\Delta > 0$. Pak definujeme limitu zleva

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$$

právě když pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ ($\Delta > \delta$) takové, že pro každý bod $x \in (a - \delta, a)$ platí $|f(x) - L| < \epsilon$.

- 2 Necht' je funkce f definována v intervalu $(a, a + \Delta)$, $\Delta > 0$. Pak definujeme limitu zprava

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$$

právě když pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ ($\Delta > \delta$) takové, že pro každý bod $x \in (a, a + \delta)$ platí $|f(x) - L| < \epsilon$.

Poznámka

Obdobně se definují i jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty.$$

Příklad

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} = -1$$

Příklad

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} = -\infty$$

Existence a jednoznačnost limity

Věta 21 (Jednoznačnost limity)

- 1 *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*
- 2 *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu zleva (zprava).*

Důkaz

Důkaz provedeme pro jednoznačnost limity sporem. Předpokládejme, že existují dvě různé limity, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B, \quad A \neq B.$$

Položme $\varepsilon = |A - B| > 0$. Z existence limit plyne, že pro toto ε

$$\exists \delta_1 > 0, \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0, \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Položme

$$\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}.$$

Pak platí

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |A - B| \leq |A - f(x)| + |B - f(x)| < \varepsilon.$$

Obdrželi jsme spor s tím, že $\varepsilon = |A - B|$.

Existence limity

Věta 22 (Existence limity)

Platí, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ právě když

$$\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = L.$$

Předchozí věta říká, že limita funkce v daném bodě existuje právě tehdy, když



- 1 Existují obě dvě jednostranné limity
- 2 Obě dvě jednostranné limity si jsou rovny

Důkaz

1. Dokážeme, že pokud existuje limita funkce, pak existují i obě jednostranné limity. Předpokládejme tedy, že existuje limita funkce, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Odtud tedy plyne, že

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Poslední dva výrazy znamenají, že existují jednostranné limity a jsou rovny L .

2. Dokážeme, že pokud existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, pak existuje i limita funkce. Protože

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$$

tak podle definice jednostranné limity pro každé $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0, \text{ tak, že pro všechna } x \in (a, a + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 > 0, \text{ tak, že pro všechna } x \in (a - \delta_2, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

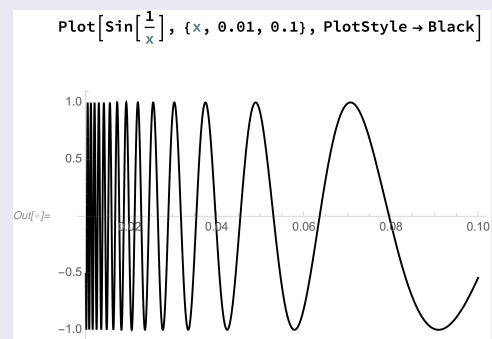
Položme $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$. Pak platí

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dokázali jsme, že existuje limita funkce f a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. □

Příklad (Limita neexistuje)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje}$$



Důkaz

Protože $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, tak pokud limita existuje, tak musí být v intervalu $[-1, 1]$.

① Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x} = 1$, tj. podle definice, zvolme $2 > \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$x \in (0, \delta) \Rightarrow \left| \sin \frac{1}{x} - 1 \right| < \varepsilon < 2$. Řešení rovnice $\sin \frac{1}{x} = -1$ jsou

$x_k = \frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$, tak v intervalu $(0, \delta)$ existují body x_k

takové, že $\left| \sin \frac{1}{x_k} - 1 \right| = |-2| = 2$. To je ve sporu s existencí limity.

② Pokud budeme předpokládat, že $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x} = -1$, tak je důkaz obdobný.

③ Předpokládejme sporem, že $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x} = L$ a $|L| < 1$. Zvolme $0 < \varepsilon < 1 - |L|$. Podle definice limity pro toto ε musí existovat $\delta > 0$, takové, že pro všechna $x \in (0, \delta)$ platí^a

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| - |L| \leq \left| \sin \frac{1}{x} - L \right| < \varepsilon < 1 - |L|$$

a tedy $\left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1$ pro všechna $x \in (0, \delta)$. To ovšem neplatí a tedy dostáváme opět spor s předpokladem, že limita existuje.

^aProtože platí $|A| - |B| \leq |A - B|$.

Asymptota funkce

Definice 43 (Asymptota)

Přímka $x = a$ se nazývá vertikální asymptota funkce $y = f(x)$, pokud platí jedna z následujících podmínek

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty,$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty.$$

Přímka $y = L$ se nazývá horizontální asymptota funkce $y = f(x)$, pokud platí jedna z následujících podmínek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$