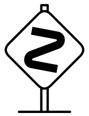
Přednáška 7: Limita funkce II

Algebraické operace s limitami

Věta 23

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$. *Pak platí*

1. $\lim_{x\to a} k = k,\ k \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L_1 \pm L_2$
4. $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = L_1 L_2$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ *pokud* $L_2 \neq 0$
6. $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L_1}$ *pokud* $L_1 > 0$.



Předchozí věta říká, že pokud existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$, pak existují i $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x))$, $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (pokud $L_2 \neq 0$), a $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)}$. Opačná implikace ale neplatí, tj. např. pokud existuje $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)$ pak nemusí existovat $\lim_{x\to a} f(x)$ nebo $\lim_{x\to a} g(x)$.

Důkaz

1. Dokážeme, že $\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=L_1+L_2$. Zvolíme si $\varepsilon>0$. Protože z předpokladů věty víme, že obě dvě limity vpravo existují, tak existuje $\delta_1>0$ a $\delta_2>0$ tak, že platí

$$0<|x-a|<\delta_1 \Longrightarrow |f(x)-L_1|<\varepsilon/2$$
$$0<|x-a|<\delta_2 \Longrightarrow |f(x)-L_2|<\varepsilon/2.$$

Pak pro $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ platí,

$$0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)+g(x)-L_1-L_2|<|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\varepsilon$$

a tedy $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=L_1+L_2$.

2. Dokážeme, že $\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\ \lim_{x\to a}g(x)=L_1L_2$. Zvolíme si $\varepsilon>0$ a nalezneme $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ a $\delta_3>0$ tak, aby platilo

$$0<|x-a|<\delta_1 \Longrightarrow |g(x)|<|L_2|+1$$
$$0<|x-a|<\delta_2 \Longrightarrow |f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)}$$
$$0<|x-a|<\delta_3 \Longrightarrow |g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2L_1|}$$

Pak pro $0<|x-a|<\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ platí

$$|f(x)g(x)-L_1L_2|=|f(x)g(x)-L_1g(x)+L_1g(x)-L_1L_2|=|g(x)(f(x)-L_1)+L_1(g(x)-L_2)|\le$$
$$|g(x)||(f(x)-L_1)|+|L_1||(g(x)-L_2)|\le(|L_2|+1)\frac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)}+|L_1|\frac{\varepsilon}{2|L_1|}=\varepsilon$$

Limita polynomiální a racionální funkce

Věta 24

1. *Je-li* $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$, *pak*
$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$
2. *Jsou-li* $p(x)$ *a* $q(x)$ *dva polynomy a* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *pak*
$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$
pokud $q(a) \neq 0$.

Poznámka

Funkce $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *kde* $p(x)$ *a* $q(x)$ *jsou polynomy, se nazývá* racionální (lomená) funkce*.*

Věta o sevření

Věta 25 (Věta o sevření)

1. *Jestliže* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *pro každé* x *v okolí bodu* x_0 *a*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L,$$
pak
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$
2. *Jestliže* $f(x) \le g(x)$ *pro každé* x *v okolí bodu* x_0 *a*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$
pak
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$
3. *Jestliže* $f(x) \ge g(x)$ *pro každé* x *v okolí bodu* x_0 *a*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$
pak
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty.$$

Důkaz Věty 25

Protože $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, tak podle definice pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_f > 0$ a $\delta_h > 0$ taková, že pro každé $x \in (x_0 - \delta_f) \cup (x_0 + \delta_f)$, $|f(x) - L| < \varepsilon$ a pro $x \in (x_0 - \delta_h) \cup (x_0 + \delta_h)$, $|h(x) - L| < \varepsilon$. Zvolme $\delta = \min(\delta_f, \delta_h)$. Pak pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ platí

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

a tedy $|g(x) - L| < \varepsilon$. Dokázali jsme, že $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.
Ostatní tvrzení Věty 25 se dokáží analogicky.

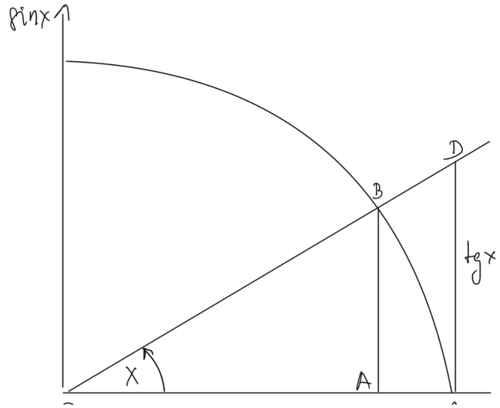
Věta 26

Nechť x je v radiánech. Pak

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pokud je úhel φ vyjádřený ve stupních, pak platí $\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi[^\circ]}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi\frac{\pi}{180}[Rad]}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi\frac{\pi}{180}[Rad]}{\varphi\frac{\pi}{180}}\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$. Platí totiž, že pokud je velikost úhlu ve stupních rovna φ, pak jeho velikost vyjádřená v radiánech je $\varphi\pi/180$.

Důkaz



Pro obsahy trojúhelníků P_{OAB}, P_{OCD} a kruhové výseče P_{OCB} platí

$$P_{OAB} < P_{OCB} < P_{OCD} \tag{5}$$

$$\frac{\cos x \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \tag{6}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \tag{7}$$

Podle věty o sevření, protože $\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, platí $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
Platí tedy, že $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Příklad

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}\,\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin x}{\cos x + 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 0$$

protože obě dvě limity vpravo existují.

Příklad

Z věty o sevření plyne

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Uvedenou limitu nelze spočítat použitím věty o limitě součinu funkcí, protože

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x},$$

poněvadž druhá z limit na pravé straně neexistuje!

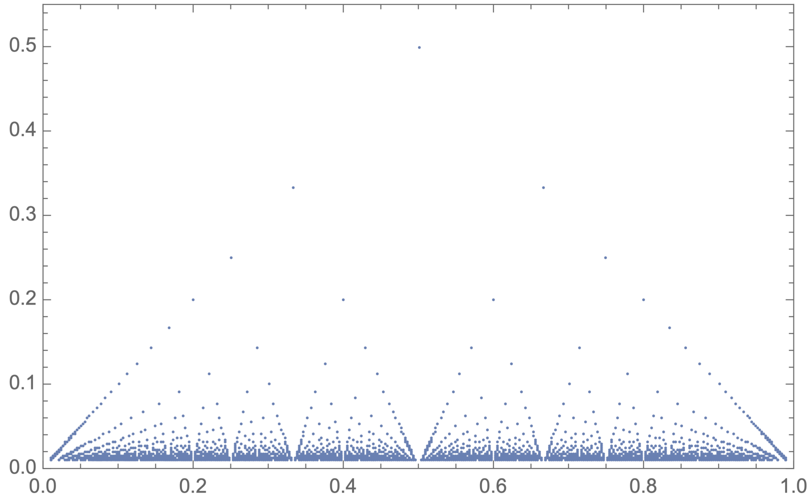
Riemannova funkce

Definice 44

Funkce

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{pro} \quad x = \frac{p}{q}, \quad (p, q \ \ \textit{nesoudělná}) \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x \ \ \textit{iracionální} \end{cases}$$

se nazývá Riemannova funkce.



Věta 28

Riemannova funkce $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má následující vlastnosti:*

1. *Je periodická s periodou 1, tj.* $R(x+1) = R(x)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$
2. *Pro každé* $a \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{x \to a} R(x) = 0.$$

Důkaz věty

1. Dokážeme, že je funkce R periodická, tj. $R(x+1) = R(x)$. To platí zřejmě pro všechny body x, které jsou iracionální (protože $1+x$ je také iracionální číslo). Pokud je x racionální, pak $x = \frac{p}{q}$ (p a q jsou nesoudělná). Pak také čísla $p+q$ a q jsou nesoudělná (dokažte). Platí tedy, $R(\frac{p}{q}+1) = R(\frac{p+q}{q}) = \frac{1}{q}$.
2. Dokážeme, že $\lim_{x\to a} R(x) = 0$. Protože je funkce 1-periodická, stačí se omezit na interval $[0,1]$ (v krajních bodech uvažujeme limitu zprava nebo limitu zleva). Podle definice limity funkce, zvolíme libovolně $\varepsilon > 0$ a dále zvolíme $n \in \mathbb{N}$ dostatečně veliké tak, aby platilo $\varepsilon > \frac{1}{n}$. Pak je množina racionálních čísel

$$M = \{x = \frac{p}{q} \mid 0 < \frac{p}{q} < 1, \quad q \leq n\}$$

konečná. Existuje tedy číslo $\delta > 0$ takové, že

$$M \cap \{x | a-\delta < x < a+\delta, \quad x \neq a\} = \emptyset.$$

Nechť $x \neq a$ a $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Pokud je x iracionální, je $R(x) = 0 < \varepsilon$. Pokud je $x = \frac{p}{q}$ racionální, pak $x \notin M$ a tedy $q > n$, tj. $\frac{1}{q} < \frac{1}{n}$ a $R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.