

Přednáška 8: Spojitost funkce

Spojítost funkce v bodě

Definice 45 (Spojítost v bodě)

- ❶ *Nechť funkce f je definována v intervalu $[a, b]$ a $x_0 \in (a, b)$. Pak říkáme, že funkce je spojitá v bodě x_0 pokud platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- ❷ *Pokud*

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

pak říkáme, že funkce f je spojitá v bodě a zprava.

- ❸ *Pokud*

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$$

pak říkáme, že funkce f je spojitá v bodě b zleva.

Spojitosť funkce v bodě

Definice spojitosti funkce v bodě x_0 říká, že

- 1 funkce je definovaná v bodě x_0
- 2 existuje limita (event. limita zprava, limita zleva) funkce v tomto bodě
- 3 tato limita se rovná funkční hodnotě

Pokud libovolná z výše uvedených podmínek neplatí, je funkce nespojitá v daném bodě.



Příklady

Příklad

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je nespojitá v bodě $x_0 = 0$, protože $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje.

Příklad

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je nespojitá v bodě $x_0 = 0$, protože $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje.

Příklad

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá v bodě $x_0 = 0$. To plyne z toho, že $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ a z věty o sevření.

Ekvivalentní definice spojitosti funkce

Z definice limity funkce plyne, že spojitost funkce v bodě lze definovat ekvivalentně také následujícím způsobem.

Definice 46 (Spojitosť funkce v bodě)

Nechť funkce f je definována v intervalu (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Pak říkáme, že funkce je spojitá v bodě x_0 pokud platí, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Spojítost funkce v intervalu

Definice 47 (Spojítost v intervalu)

- 1 *Nechť funkce f je definována v otevřeném intervalu (a, b) . Pak říkáme, že funkce je spojitá v intervalu (a, b) , pokud je spojitá v každém bodě intervalu (a, b) .*
- 2 *Pokud je funkce definována na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak říkáme, že je v tomto intervalu spojitá, je-li spojitá v každém vnitřním bodě a v bodě a (b) je spojitá zprava (zleva).*

Spojítost funkce

Věta 29

- ① Každý polynom je spojitá funkce v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.
- ② Každá racionálně lomená funkce je spojitá v bodech svého definičního oboru.

Důkaz

Důkaz plyne z Věty 24.

Spojitosť/nespojitosť Dirichletovy a Riemannovy funkce

Definice 48 (Dirichletova funkce)

Funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \end{cases}$$

se nazývá Dirichletova funkce.

Věta 30

- 1 Dirichletova funkce $D(x)$ je nespojitá v každém bodě.
- 2 Funkce $x D(x)$ je spojitá právě jenom v bodě 0 (tj. je nespojitá ve všech ostatních bodech).
- 3 Riemannova funkce $R(x)$ je spojitá v iracionálních bodech a nespojitá v racionálních bodech.

Důkaz

1. Dirichletova funkce D je nespojitá v libovolném bodě, protože neexistuje limita této funkce v žádném bodě. To plyne z toho, že podle Věty 8, jsou-li $a < b$ jsou dvě libovolná reálná čísla, pak v intervalu (a, b) existuje racionální i iracionální číslo.
2. Spojitost funkce $x D(x)$ v bodě $x = 0$ plyne z toho, že platí

$$-|x| \leq x D(x) \leq |x|.$$

Protože v bodě 0 jsou všechny tři funkce rovny 0 a dále platí, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0,$$

tak podle Věty 25 existuje i $\lim_{x \rightarrow 0} x D(x) = 0$ a tedy je tato funkce spojitá v bodě 0. V libovolném jiném bodě neexistuje limita funkce $x D(x)$ ², a tedy tato funkce není spojitá v žádném bodě různém od 0.

3. Podle Věty 28 platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ v libovolném bodě x_0 . Protože $R(x) = 0$ v iracionálních bodech, tak v těchto bodech platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0) = 0,$$

a tedy funkce R je spojitá v iracionálních bodech.

²Pokud je $x_0 \neq 0$, pak v libovolném okolí tohoto bodu existuje iracionální bod a pokud by existovala $\lim_{x \rightarrow x_0} x D(x)$, pak by musela být rovna 0. Zvolme si $\delta > 0$ okolí bodu x_0 takové, že $\delta < |x_0|/2$. Platí tedy, že v racionálních bodech v $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|x D(x)| = |x| > |x_0|/2 > 0$, a tedy limita neexistuje. 

Odstranitelná nespojitost

Definice 49

Nechť f je definovaná v prstencovém okolí bodu x_0 (tj., funkce nemusí být definovaná v bodě x_0). Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 odstranitelnou nespojitost. Funkce

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \ x \in D(f) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

je pak spojitým dodefinováním funkce f v bodě x_0 .

Příklad

Funkce

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{pro } x \neq 2 \\ 4 & \text{pro } x = 2 \end{cases}$$

je spojitým rozšířením funkce $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Spojitosť funkce

Věta 31

Nechť f a g jsou spojité funkce v bodě x_0 . Pak následující funkce jsou spojité v x_0

- 1 $cf, c \in \mathbb{R}$
- 2 $f + g$
- 3 fg
- 4 $\frac{f}{g}$ pokud $g(x_0) \neq 0$.

Důkaz

Důkaz plyne z Věty 23.

Limita složené funkce

Věta 32 (Věta o záměně funkce a limity)

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ a funkce f je definovaná v okolí bodu y_0 a je spojitá v bodě y_0 . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(y_0).$$



Předchozí věta neplatí bez předpokladu spojitosti funkce f , tj. k tomu, aby platilo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$ nestačí předpokládat, že existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ a $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$.

Příklad

Nechť $f(y) = y^2$ a $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, tj. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ a funkce f je spojitá v bodě 4. Podle Věty 32 tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)^2 = 16.$$

Příklady, kdy nelze Větu 32 použít

Příklad

Je-li $g(x) = 0.5x$ a

$$f(y) = \begin{cases} 3 & \text{pro } y \neq 1 \\ 0 & \text{pro } y = 1, \end{cases}$$

pak platí, že existuje $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1 = y_0$ a $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 3$. Ale $f(1) = 0$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = 3 \neq 0 = f(\lim_{x \rightarrow 2} g(x)) = f(1).$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = 2$$

Označme $f(y) = \frac{y^2 - 1}{y - 1}$ a $g(x) = x^2$, tj. $f(g(x)) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ a existuje $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 - 1}{y - 1} = 2$, ale $f(\lim_{x \rightarrow 1} g(x))$ není definováno, protože funkce f není definovaná v bodě $y = 1$, tj. není spojitá v tomto bodě. Nelze tedy pro výpočet této limity použít Větu 32.

Důkaz věty o limitě složené funkce

Důkaz

Zvolme podle definice limity funkce $\epsilon > 0$. Poněvadž f je spojitá funkce v y_0 , tak existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro $|y - y_0| < \delta_1$ je $|f(y) - f(y_0)| < \epsilon$.

Protože $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, tak k číslu δ_1 existuje $\delta > 0$ takové, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $|g(x) - y_0| < \delta_1$.

Dokázali jsme tedy, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $|f(g(x)) - f(y_0)| < \epsilon$, tj. podle definice je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(y_0)$.

Spojítost složené funkce

Věta 33

Nechť g je spojitá v bodě x_0 a f je spojitá v bodě $g(x_0)$. Pak je složená funkce $f(g(x))$ spojitá v bodě x_0 .

Důkaz

Z Věty 32 plyne, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(g(x_0))$.

Spojitosť inverzní funkce

Věta 34 (Spojitost inverzní funkce)

Nechť $f : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ je rostoucí nebo klesající funkce zobrazující interval (a, b) na interval (α, β) . Pak platí

- 1 funkce f je spojitá na intervalu (a, b)
- 2 inverzní funkce $f^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ je spojitá na intervalu (α, β) .

Předchozí věta o spojitosti inverzní funkce neplatí, pokud bychom předpokládali pouze, že funkce f je spojitá a existuje k ní inverzní funkce. Např. funkce



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{pro } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

je spojitá, inverzní funkce existuje, ale není spojitá v bodě 1.

Důkaz spojitosti inverzní funkce

- 1 Důkaz provedeme za předpokladu, že je funkce rostoucí (pokud je funkce klesající je důkaz analogický, rozmyslete si). Nejprve dokážeme, že funkce f je spojitá v každém bodě intervalu (a, b) . Necht' $x_0 \in (a, b)$ je libovolný bod a k němu zvolíme $\epsilon > 0$ takové, že $\alpha < f(x_0) - \epsilon < f(x_0) < f(x_0) + \epsilon < \beta$. Protože f je zobrazení na interval (α, β) , tak existují body x_- a x_+ v intervalu (a, b) tak, že $f(x_-) = f(x_0) - \epsilon$ a $f(x_+) = f(x_0) + \epsilon$. Necht' $\delta = \min\{x_0 - x_-, x_+ - x_0\}$. Je-li tedy $|x - x_0| < \delta$, je

$$f(x_0) - \epsilon = f(x_-) < f(x) < f(x_+) = f(x_0) + \epsilon,$$

tj. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Podle definice to znamená, že je funkce spojitá v bodě x_0 . Protože bod x_0 byl libovolný bod z intervalu (a, b) , dokázali jsme, že je funkce f spojitá v intervalu (a, b) .

- 2 Nyní dokážeme, že je inverzní funkce f^{-1} také spojitá v intervalu (α, β) . (Inverzní funkce existuje protože funkce f je monotonní). K tomu nám stačí dokázat, že je rostoucí, protože pak na ni aplikujeme první část tvrzení. Necht' $\alpha < y_1 < y_2 < \beta$. Pak platí

$$f(f^{-1}(y_1)) = y_1 < y_2 = f(f^{-1}(y_2))$$

a protože f je rostoucí funkce, tak musí platit, že $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, a tedy f^{-1} je rostoucí funkce.