

Přednáška 9: Extrémy funkce

Extrémy funkce

Definice 50 (Extrémy funkce)

- ① *Je-li $x_1 \in D(f)$ a $f(x_1) \geq f(x)$ pro každé $x \in D(f)$, pak číslo $M = f(x_1)$ se nazývá maximum funkce.*
- ② *Je-li $x_1 \in D(f)$ a $f(x_1) \leq f(x)$ pro každé $x \in D(f)$, pak číslo $m = f(x_1)$ se nazývá minimum funkce.*

Minimum a maximum se souhrnně nazývají extrémy funkce.

Příklady

Příklad

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

na intervalu $[-1, 1]$ nenabývá svého maxima. Není splněn předpoklad o spojitosti funkce.

Příklad

Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ nenabývá svého maxima ani minima na intervalu $(0, 1)$. Není splněn předpoklad o uzavřenosti intervalu na kterém se extrém hledá.

Bolzano–Weierstrassova věta

Věta 35 (Bolzano–Weierstrassova věta)

Z každé omezené posloupnosti čísel lze vybrat podposloupnost, která je konvergentní.

Důkaz Bolzano–Weierstrassovy věty

Důkaz

Označíme si posloupnost např. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Protože předpokládáme, že posloupnost je omezená, tak existují čísla $a_1 < b_1$ taková, že $a_1 < x_n < b_1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Interval $[a_1, b_1]$ rozpůlíme. Alespoň v jedné ze dvou polovin musí ležet nekonečný počet členů posloupnosti. Pokud existuje nekonečně mnoho členů posloupnosti v obou intervalech, zvolíme jeden z nich libovolně. Krajní body tohoto intervalu označíme $a_2 < b_2$ a vybereme všechny členy posloupnosti, které v tomto intervalu leží. Tento interval opět rozpůlíme a vybereme nekonečně mnoho členů posloupnosti, které v tomto intervalu leží. Takto vytvoříme soustavu do sebe vložených intervalů $[a_n, b_n]$ a posloupnost vybranou $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Přitom platí, že posloupnost krajních bodů intervalů a_n je neklesající, posloupnost b_n je nerostoucí, $|a_n - b_n|$ konverguje k nule a všechny členy vybrané podposloupnosti leží v intervalech $[a_n, b_n]$. Posloupnosti a_n i b_n jsou konvergentní (omezená a neklesající nebo nerostoucí posloupnost je konvergentní, viz. Věta 20). Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, tak také vybraná posloupnost $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje ke stejné limitě. □

Věta 36 (O nabývání maxima a minima)

- ① *Necht' f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b] \subset D(f)$. Funkce f je pak na intervalu $[a, b]$ shora i zdola omezená, tj. existují čísla m a M taková, že*

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b].$$

- ② *Necht' f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b] \subset D(f)$. Funkce f pak na tomto intervalu nabývá svého minima a maxima, tj. existují čísla x_1 a x_2 z intervalu $[a, b]$ taková, že*

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \text{pro každé } x \in [a, b]$$

$$f(x_2) \geq f(x) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

Hodnota $f(x_1)$ se pak označuje jako $\min_{x \in [a, b]} f$ a hodnota $f(x_2)$ se pak označuje jako $\max_{x \in [a, b]} f$.

Důkaz

- 1 Dokážeme, že funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$, tj. existuje $M > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ je $|f(x)| < M$. Důkaz provedeme sporem, tj. budeme předpokládat, že funkce není omezená. To znamená, že pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in [a, b]$ takové, že $|f(x_n)| > n$. Z Bolzano-Weierstrassovy věty (Věta 35) plyne, že protože posloupnost x_n je omezená, můžeme z ní vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k nějakému číslu x_0 z intervalu $[a, b]$. Platí tedy, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$, což je ve sporu s tím, že funkce f je spojitá v x_0 .
- 2 Necht' $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Dokážeme, že existuje $x_0 \in [a, b]$ tak, že $f(x_0) = M$. Předpokládejme sporem, že takové x_0 neexistuje, tj. platí, že pro všechna $x \in [a, b]$, $f(x) < M$. Definujeme funkci

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Tato funkce je spojitá v intervalu $[a, b]$ (jedná se o podíl dvou spojitých funkcí a $f(x) \neq M$ pro $x \in [a, b]$) a podle předchozího tvrzení je tedy omezená, tj. existuje $M_1 > 0$ tak, že $g(x) < M_1$. Odtud plyne, že

$$f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

pro všechna $x \in [a, b]$, což je ovšem ve sporu s tím, že M je supremum, tj. nejmenší horní omezení funkce f na intervalu $[a, b]$.



Bolzanova věta

Věta 37 (Bolzanova věta)

Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Je-li $c \in \mathbb{R}$ takový, že $\min\{f(a), f(b)\} < c < \max\{f(a), f(b)\}$ pak existuje bod $x_0 \in (a, b)$ takový, že

$$f(x_0) = c.$$

Poznámka

V anglosaské literatuře se Bolzanova věta obvykle nazývá "Intermediate value theorem".

Důležitým důsledkem Bolzanovy věty je následující tvrzení, které se týká řešitelnosti rovnic.

Věta 38

Nechť f je spojitá funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Důkaz Bolzanovy věty

Důkaz

Budeme předpokládat, že $f(a) < c < f(b)$. (Důkaz pro případ $f(a) > c > f(b)$ je analogický). Definujeme

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq c\}.$$

Množina S je neprázdná (obsahuje např. bod a) a omezená, a tedy existuje $\sup S$. Označíme $x_0 = \sup S$ a dokážeme, že $f(x_0) = c$. Důkaz provedeme sporem a to tak, že dokážeme, že neplatí ani $f(x_0) < c$, ani $f(x_0) > c$.

Předpokládejme, že $f(x_0) > c$. Protože f je spojitá v bodě x_0 , existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x \leq x_0$ je $f(x) > c$. Platí tedy, že $x_0 - \delta$ je horní závora pro množinu S , což je spor s tím, že x_0 je supremem množiny S .

Je-li $f(x_0) < c$ pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ je $f(x) < c$ a tedy x_0 není horní závora pro množinu S , což je spor s tím, že x_0 je supremem množiny S .

Existence řešení rovnice

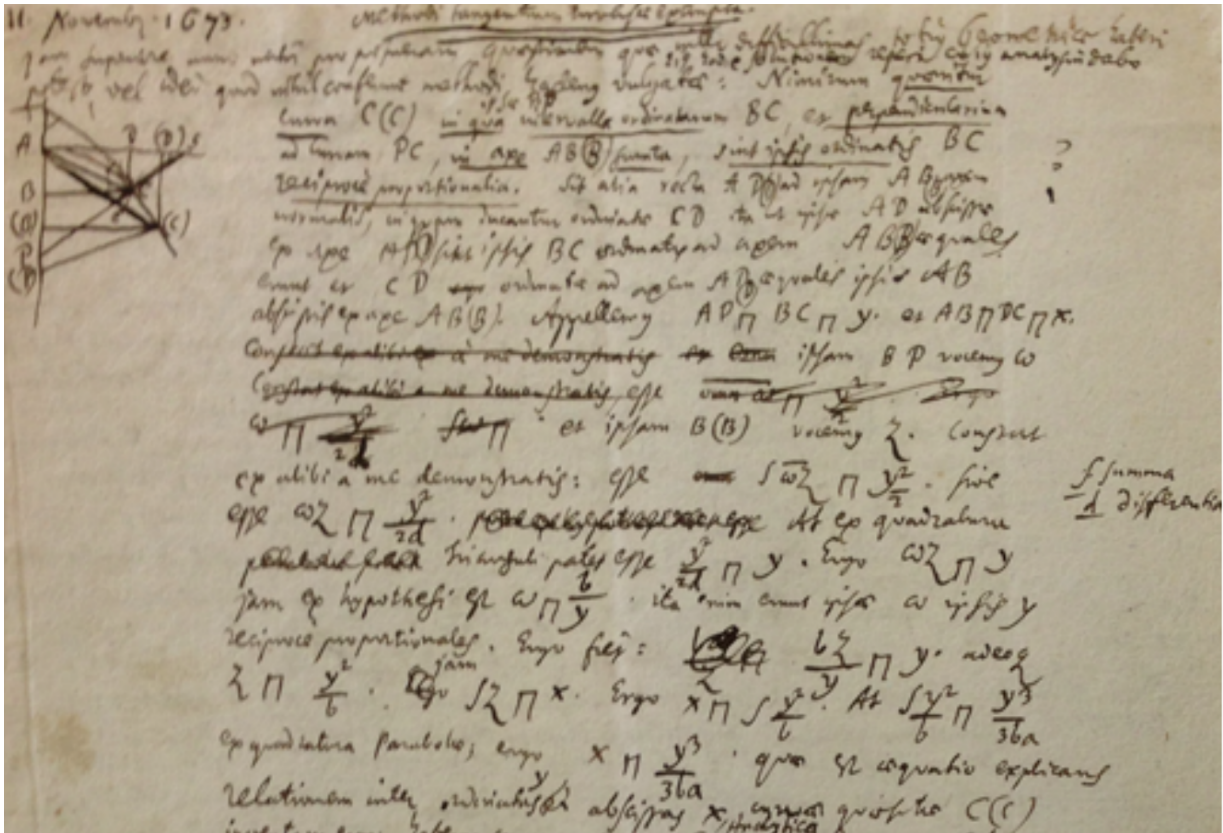
Příklad

Dokažte, že v intervalu $[0, 1]$ existuje řešení rovnice

$$P(x) := x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

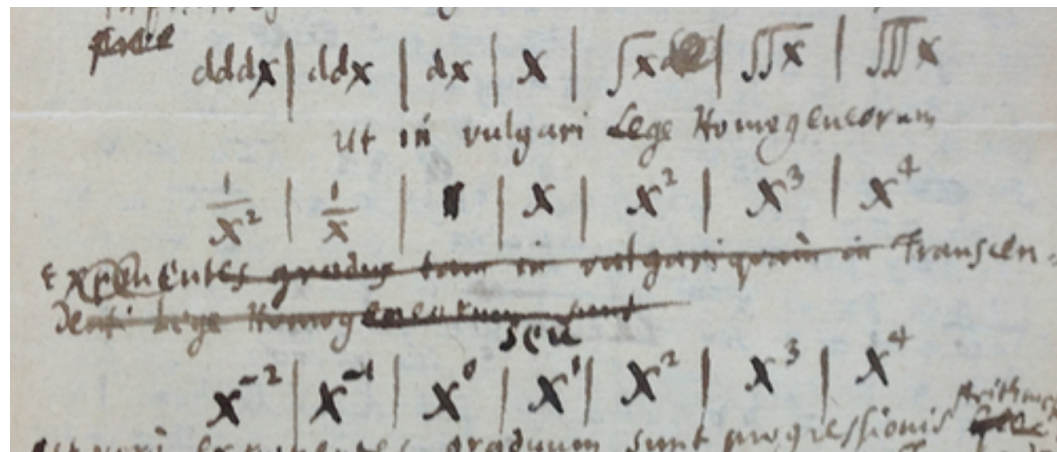
Protože $P(0) = -1$ a $P(1) = 2$ a funkce P je spojitá, tak z Bolzanovy věty plyne, že existuje na intervalu $[0, 1]$ řešení rovnice.

Diferenciální a integrální počet: G. W. Leibniz a I. Newton

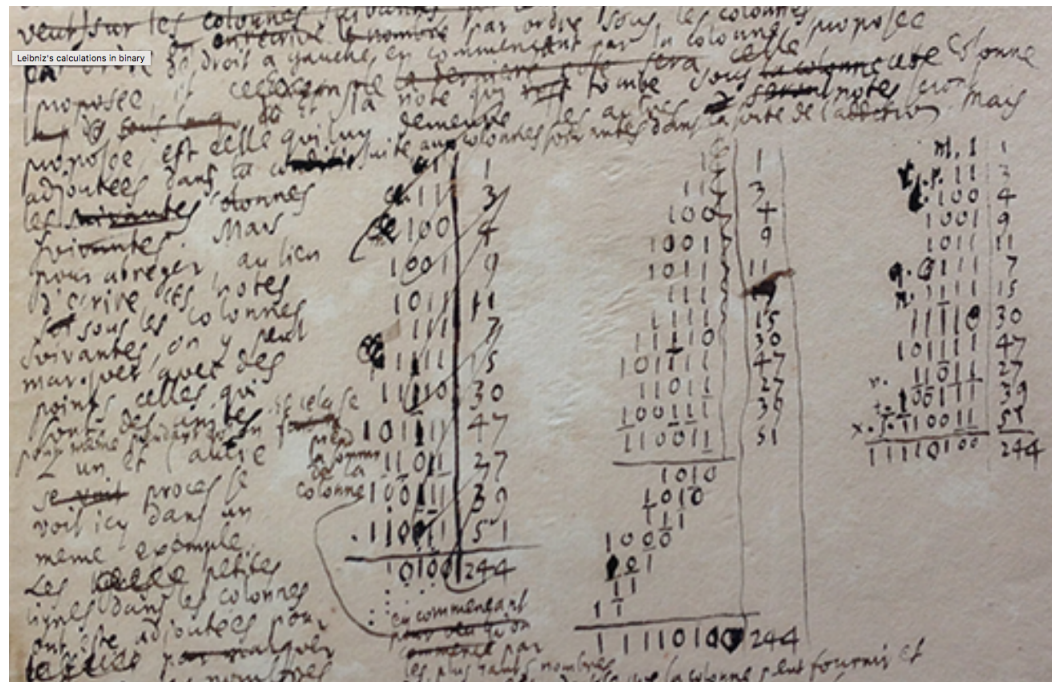


Leibnizův text z 11. listopadu, 1675, Leibnizův archiv, Hannover

Derivace funkce



Derivace funkce



Derivace funkce

Definice 51 (Derivace funkce v bodě)

Nechť funkce f je definována v okolí bodu x_0 . Pokud existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

pak se funkce f nazývá diferencovatelná v bodě x_0 . Tato limita se nazývá derivace funkce f v bodě x_0 a značí se $f'(x_0)$ nebo $\frac{df(x_0)}{dx}$ tj.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Poznámka

Derivaci je možné také definovat ekvivalentně takto

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Příklady

Příklad

Zderivujte $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 2x.$$

Příklad

Zderivujte $f(x) = \sqrt{x}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Všimněte si, že definiční obor f' je menší, než je definiční obor funkce f .

Příklad

Zderivujte $f(x) = |x|$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \\ \text{NDF} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$



Tečna ke grafu funkce

Definice 52

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ derivaci $f'(x_0)$. Přímka

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

se nazývá tečna ke grafu funkce f v bodě $x_0 \in D(f)$.

Příklad

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 1$.

Rovnice tečny je

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Protože $f'(x_0) = 2$ a $f(1) = 1$, tak

$$y(x) = 2x - 1.$$

Jednostranná derivace funkce

Definice 53 (Derivace funkce v bodě zprava)

Nechť funkce f je definována v pravém okolí bodu x_0 , tj. v nějakém intervalu $[x_0, b)$, $b > x_0$. Pokud existuje limita zprava

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

pak se funkce f nazývá diferencovatelná zprava v bodě x_0 a značí se $f'_+(x_0)$.

Definice 54 (Derivace funkce v bodě zleva)

Nechť funkce f je definována v levém okolí bodu x_0 , tj. v nějakém intervalu $(a, x_0]$, $a < x_0$. Pokud existuje limita zleva

$$\lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

pak se funkce f nazývá diferencovatelná zleva v bodě x_0 a značí se $f'_-(x_0)$.

Derivace funkce

Definice 55 (Derivace funkce)

Nechť je dána funkce f . Funkce f' se definuje následovně:

$$D(f') = \{x \in D(f) \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existuje v } \mathbb{R}\}$$

a

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Funkce f' se nazývá derivace funkce f .

Kdy funkce nemá derivaci v bodě

Při splnění jakékoliv z následujících podmínek není funkce diferencovatelná v bodě x_0 :

1. Funkce má v bodě x_0 vertikální asymptotu. Např. $\sqrt{x}$ v bodě $x = 0$.
2. Graf funkce f není v bodě x_0 "hladký". Např. $|x|$ v bodě $x = 0$.
3. Funkce f není spojitá v bodě x_0 .