

Příklady k procvičení

1. Ukažte (z definice), že platí:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0.5)^x = +\infty$

2. Vypočtete limity:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+1}{x^2+2x+1}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3+1}{x+x^3} \right)^3$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x-3}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{6x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{-\frac{1}{x}}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{2x+8}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + \sin x}{x^2}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{\frac{x}{2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0-} x^3 \cos \left(\frac{2}{x} \right)$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2+5} \right)^{x+1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - \sin(3x)}{x^2 + 2}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x}{1 + \ln x}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{2}{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 \arctan(5x)}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)$

3. Rozhodněte, zda jsou následující funkce spojité v bodě x_0 :

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x > 1, \\ 2x + \ln x & x \leq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+x}{|x|}, \quad x_0 = 0$$

Výsledky:

1. v definici limity stačí volit:

a) $\delta = \min\{|\log_2(1 - \varepsilon)|, \log_2(1 + \varepsilon)\};$

b) $\delta = \min\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, 2 + \sqrt{4 + \varepsilon}\};$

c) $N = \frac{3}{\varepsilon} + 1;$

d) $a = \log_{0.5} N$

Poznámka: značení viz definice z Přednášky 6

2. a) $-\infty$; b) neexistuje; c) 0; d) $+\infty$; e) 0; f) 5; g) 0; h) $\sqrt{\pi}$; i) 0; j) 8; k) e^3 ; l) e^{-10} ; m) $e^{\frac{3}{2}}$; n) 1; o) e; p) e^{-4}

3. funkce f_1 je spojitá v bodě x_0 ; funkce f_2 není spojitá v bodě x_0