

Přednáška 10: Derivace 2

Derivace funkce

Věta 41 (Derivace elementárních funkcí)

- 1 Pro $c \in \mathbb{R}$, $c' = 0$
- 2 Pro $n \in \mathbb{N}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$

Důkaz

Dosadíme do Definice 55 derivace příslušné funkce a určíme limity

1

$$c' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

2 S použitím binomické věty

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \dots + h^n) - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

Derivace funkce

Věta 42 (Algebraické operace s derivacemi)

Necht' funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě x_0 . Pak

- ❶ Pro $c \in \mathbb{R}$, $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$
- ❷ $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- ❸ $(f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- ❹ $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Důsledkem bodu 4 je

Věta 43 (Derivace elementárních funkcí)

- ❶ Pro $n \in \mathbb{N}$, $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

Důkaz

Z existence $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$ a z Věty 23 plyne, že platí

1

$$(cf(x_0))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x_0 + h) - cf(x_0)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = cf'(x_0).$$

2

$$\begin{aligned} (f(x_0) \pm g(x_0))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) \pm g(x_0 + h)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \pm \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) \pm g'(x_0) \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} (f(x_0)g(x_0))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))g(x_0 + h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{hg(x_0)g(x_0 + h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{hg(x_0)g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

Derivace funkce

Věta 44 (Derivace trigonometrických funkcí)

Platí

$$① \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$② \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$③ \quad \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$④ \quad \frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Důkaz

1

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\&= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\&= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x+h) \cos x - \sin x \cos(x+h)}{\cos(x) \cos(x+h)h}}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h \cos(x+h) \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Diferenciál funkce

Věta 45 (O lokální aproximaci funkce)

Necht' funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 . Pak existuje funkce $\varepsilon(h)$ definovaná v okolí bodu 0 a taková, že platí

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$$

a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0.$$

Definice 56

Lineární funkce

$$y(h) = f'(x_0)h$$

se nazývá diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

Poznámka

Diferenciál se často zapisuje jako $dy = f'(x_0)dx$. Diferenciál popisuje, jak se změní hodnota funkce při malé změně argumentu. To je inspirováno tím, že pro malé hodnoty nezávisle proměnné dx můžeme hodnotu $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ aproximovat hodnotou $dy = f'(x_0)dx$, tj. zapisujeme $f(x_0 + dx) - f(x_0) \sim dy = f'(x_0)dx$.

Důkaz Věty 45

Důkaz

Označme jako $E(h)$ chybu aproximace funkce f na okolí bodu x_0 pomocí lineární funkce $y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ jejíž graf je tečný ke grafu funkce f v bodě x_0 . Platí tedy

$$f(x_0 + h) = f'(x_0)h + f(x_0) + E(h),$$

tj.

$$E(h) = f(x_0 + h) - f'(x_0)h - f(x_0).$$

Protože

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h} = 0,$$

stačí definovat

$$\varepsilon(h) := \begin{cases} \frac{E(h)}{h} & \text{pro } h \neq 0 \\ 0 & \text{pro } h = 0. \end{cases}$$

Derivace složené funkce

Věta 46 (Derivace složené funkce)

Nechť funkce g je diferencovatelná v bodě x_0 a f je diferencovatelné v bodě $g(x_0)$. Pak je složená funkce $f(g(x))$ diferencovatelné v bodě x_0 a platí

$$\left(f(g(x_0))\right)' = f'(g(x_0)) g'(x_0).$$



Je zapotřebí rozlišovat mezi derivací složené funkce $f(g(x_0))'$ a derivací funkce f v bodě $g(x_0)$ obvykle zapisovanou ve tvaru $f'(g(x_0))$.

Derivace složené funkce

Poznámka

Jestliže funkce f závisí na proměnné y a proměnná y závisí na x , tj. funkce f závisí na x prostřednictvím funkce y , pak v Leibnizově značení se derivace složené funkce zapisuje jako

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}$$

resp.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(y(x))}{dy} \frac{dy(x)}{dx}$$

Toto značení vyjadřuje dobře to, že pokud např. automobil jede 4x rychleji než kolo, a kolo jede 3x rychleji než chodec, pak auto jede 12x rychleji než chodec. Skutečně, pokud $f(y) = 4y$ vyjadřuje polohu automobilu vůči poloze cyklisty y , a $y(x) = 3x$ vyjadřuje polohu cyklisty vůči poloze chodce x , pak $\frac{df}{dy} = 4$ a $\frac{dy}{dx} = 3$ a $\frac{df}{dx} = 12$.

Důkaz vzorce pro derivaci složené funkce

Důkaz

Podle věty o lokální aproximaci funkce existuje funkce ε_g taková, že $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_g(h) = 0$ a

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + \varepsilon_g(h)h.$$

Dále existuje funkce ε_f taková, že $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_f(h) = 0$ a protože funkce g je spojitá v bodě x_0 (viz. Věta 39), tak

$$\begin{aligned} f(g(x_0 + h)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) (g(x_0 + h) - g(x_0)) + \\ &\quad \varepsilon_f(g(x_0 + h) - g(x_0)) (g(x_0 + h) - g(x_0)). \end{aligned}$$

Z definice derivace

$$\begin{aligned} \left(f(g(x_0)) \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f'(g(x_0)) + \varepsilon_f(g(x_0 + h) - g(x_0))](g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f'(g(x_0)) + \varepsilon_f(g(x_0 + h) - g(x_0))][g'(x_0) + \varepsilon_g(h)]h}{h} = \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0). \end{aligned}$$

Derivace funkce

Věta 47 (Derivace inverzní funkce)

Necht' $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí nebo klesající funkce a $f'(x_0) \neq 0$ pro $x_0 \in (a, b)$. Pak inverzní funkce f^{-1} je diferencovatelná v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí vzorec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Poznámka

Vzorec pro derivaci inverzní funkce si můžeme lehce zapamatovat. Pokud předpokládáme, že inverzní funkce je diferencovatelná (Věta 47 toto ovšem nepředpokládá), tak z definice inverzní funkce a derivací složené funkce dostaneme

$$x = f^{-1}(f(x)), \quad x \in (a, b).$$

Derivací obou stran rovnosti dostáváme

$$1 = (f^{-1})'(f(x))f'(x)$$

a tedy

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Když označíme $y_0 = f(x_0)$, tak odtud dostaneme

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Důkaz Věty 47

Důkaz

Nechť $y_0 = f(x_0)$ a $y = f(x)$, tj. $x_0 = f^{-1}(y_0)$ a $x = f^{-1}(y)$. Podle Věty 34 je inverzní funkce spojitá a tedy pokud y konverguje k y_0 , tak x konverguje k x_0 , a tedy

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Derivace funkce

Věta 48 (Derivace exponenciální a logaritmické funkce)

Pro $a > 0$ platí

- ① $(e^x)' = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$
- ② $(a^x)' = a^x \ln a$ pro $x \in \mathbb{R}$
- ③ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ pro $x > 0$
- ④ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.

Důkaz $(e^x)' = e^x$

Důkaz

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Pro výpočet $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ provedeme substituci $t = e^h - 1$, tj. $h = \ln(1 + t)$, a tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + t)^{1/t}}.$$

Protože (viz. Poznámka pod Definicí 20)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

tak také

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e,$$

a tedy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Důkaz $(a^x)' = a^x \ln a$

Důkaz

Protože

$$a^x = e^{x \ln a},$$

tak podle bodu (1)

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

$$\text{Důkaz } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Důkaz

Použijeme Větu 47 o derivaci inverzní funkce. Označme $y = f(x) = a^x$, tj. $x = f^{-1}(y) = \log_a y$. Platí tedy

$$(f^{-1}(y))' = (\log_a y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Derivace cyklometrických funkcí

Věta 49 (Derivace cyklometrických funkcí)

Platí

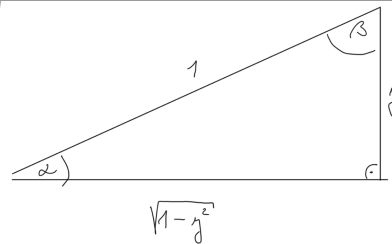
① $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pro* $x \in (-1, 1)$

② $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pro* $x \in (-1, 1)$

③ $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$

④ $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$

Důkaz



Protože (z obrázku) $\sin \alpha = y$, tj. $\alpha = \sin^{-1} y$, a tedy $\cos \alpha = \cos(\sin^{-1} y) = \sqrt{1 - y^2}$. Označme $x = \sin^{-1} y$ a tedy $y = \sin x$. Podle Věty 47 o derivaci inverzní funkce platí

$$(\sin^{-1} y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Obdobně

$$(\cos^{-1} y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = -\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin(\cos^{-1} y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$(\tan^{-1} y)' = \frac{1}{\tan x'} = -\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{1}{1 + (\tan x)^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Lokální extrémy funkce

Definice 59 (Lokální extrémy funkce)

- ➊ Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pak $f(x_0)$ se nazývá lokální maximum funkce f
- ➋ Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pak $f(x_0)$ se nazývá lokální minimum funkce f
- ➌ Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x_0) > f(x)$ pro $0 < |x - x_0| < \delta$, pak $f(x_0)$ se nazývá ostré lokální maximum funkce f
- ➍ Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x_0) < f(x)$ pro $0 < |x - x_0| < \delta$, pak $f(x_0)$ se nazývá ostré lokální minimum funkce f .

Příklad

Riemannova funkce $R(x)$ má na intervalu $(0, 1)$

- ➊ maximum 0.5 v bodě $x_0 = 0.5$
- ➋ ostré lokální maximum v každém racionálním bodě
- ➌ minimum 0 v každém iracionálním bodě

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému funkce

Věta 50 (Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému funkce)

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0 a $f(x_0)$ je bodem lokálního extrému, pak platí $f'(x_0) = 0$.



Větu nelze obrátit, tj. podmínka $f'(x_0) = 0$ je podmínkou nutnou ale není podmínkou postačující pro existenci lokálního extrému v bodě x_0 .

Důkaz

Budeme předpokládat, že v bodě x_0 má funkce lokální maximum (důkaz v případě lokálního minima je analogický), tj. existuje $h > 0$ takové, že

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ pro } x \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Protože platí

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 \text{ pro } x_0 + h > x > x_0 \\ \geq 0 \text{ pro } x_0 - h < x < x_0, \end{cases}$$

tak

$$\lim_{x \rightarrow x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Protože předpokládáme existenci derivace funkce, tak musí platit, že limita zleva se rovná limitě zprava, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$