

Příklady k procvičení

1. Určete $f'(x)$, je-li

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 10$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x}$

c) $f(x) = 3 \sin x - \cos x$

d) $f(x) = 4^x + 4 \ln x$

e) $f(x) = \sqrt{x} \arctan(3x)$

f) $f(x) = \sin(2x) \log_2 \left(\frac{x}{2} \right)$

g) $f(x) = \frac{e^{3x} \cot x}{2}$

h) $f(x) = \frac{1 - 2x}{9x + 1}$

i) $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{2^x}$

j) $f(x) = \frac{4x}{\log x}$

k) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \cosh x}{\sinh x}$

l) $f(x) = \arctan(x^2) + \sin^3 x$

m) $f(x) = \sin(3^x)$

n) $f(x) = 3^{\cos x}$

o) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

p) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{7x - x^3}$

q) $f(x) = \ln(\ln(6 - x))$

r) $f(x) = \arccos \left(\frac{1}{\cot x} \right)$

2. Určete $f'(x)$, je-li

$$f(x) = |-\ln(x + 2)|$$

3. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě x_0 . Graf funkce, tečnu a normálu načrtněte do jednoho obrázku.

a) $f(x) = 1 - x^2, \quad x_0 = -1$

b) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = e$

c) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}, \quad x_0 = 2$

d) $f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad x_0 = 0$

e) $f(x) = 1 - \sin x, \quad x_0 = \pi$

4. Najděte stacionární body funkce f :

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \ln \left(\frac{x + 1}{1 - x} \right)$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) - 4 \arctan(x - 2)$

5. Hmotný bod se pohybuje po přímce (ose x) a závislost jeho polohy na čase je dána rovnicí $x(t) = 3t^2 + 4t$. Určete rychlost hmotného bodu v čase $t = 2$. Kdy je zrychlení hmotného bodu nulové?

6. Hmotný bod koná netlumený kmitavý pohyb a jeho poloha v čase t je dána rovnicí $y(t) = 4 \cos(3t)$. Určete závislost rychlosti hmotného bodu na čase t . Kdy je rychlost hmotného bodu nulová?

Výsledky:

1. a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$; b) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{2}{3x^2}$; c) $f'(x) = 3\cos x + \sin x$;
 d) $f'(x) = 4^x \ln 4 + \frac{4}{x}$; e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan(3x) + 3\sqrt{x} \frac{1}{1+9x^2}$;
 f) $f'(x) = 2\cos(2x) \log_2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(2x) \frac{1}{x \cdot \ln 2}$; g) $f'(x) = \frac{3}{2}e^{3x} \cot x - \frac{e^{3x}}{2\sin^2 x}$;
 h) $f'(x) = \frac{-2(9x+1) - (1-2x) \cdot 9}{(9x+1)^2}$; i) $f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2^x - \arcsin x \cdot 2^x \ln 2}{4^x}$;
 j) $f'(x) = \frac{4\log x - \frac{4}{\ln 10}}{\log^2 x}$; k) $f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \cosh x + \sqrt[4]{x} \sinh x\right] \sinh x - \sqrt[4]{x} \cosh^2 x}{\sinh^2 x}$;
 l) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} + 3\sin^2 x \cdot \cos x$; m) $f'(x) = \cos(3^x) \cdot 3^x \ln 3$; n) $f'(x) = -3^{\cos x} \ln 3 \sin x$;
 o) $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; p) $f'(x) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{7x-x^3}} \cdot (7-3x^2)$;
 q) $f'(x) = \frac{1}{\ln(6-x)} \cdot \frac{1}{6-x} \cdot (-1)$;
 r) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\cot x}\right)^2}} \left(\frac{-1}{\cot^2 x}\right) \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$
2. $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, & x \in (-2, -1) \\ \nexists & x = -1 \\ \frac{1}{x+2}, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}$
3. a) $t: y = 2x + 2, n: y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$; b) $t: y = \frac{x}{e}, n: y = -ex + e^2 + 1$; c) $t: y = -2x + 5, n: y = \frac{x}{2}$; d) $t: y = -\frac{1}{2}x + 1, n: y = 2x + 1$; e) $t: y = x - \pi + 1, n: y = -x + \pi + 1$
4. a) $x_1 = -1, x_2 = 2$; b) $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$; c) f nemá žádné stacionární body; d) $x = 4$
5. $v(2) = 16$, h.b. se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem (zrychlení je konstantní a nenulové v každém čase t)
6. $v(t) = -12\sin(3t), v(t) = 0$ pro $t = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$