

Přednáška 12: Derivace vyšších řádů, funkce konvexní a konkávní

Derivace vyšších řádů

Definice 61 (Druhá derivace a derivace vyšších řádů)

Nechť je dána funkce f . Druhá derivace funkce f se definuje následovně:

$$D(f'') = \{x \in D(f') \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \text{ existuje}\}$$

a

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Obdobně se definují i derivace vyšších řádů. Derivace n –tého řádu funkce f se obvykle značí $f^{(n)}$, nebo $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Diferencovatelná funkce, která není dvakrát diferencovatelná

Příklad

Necht'

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{pokud } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{pokud } x \geq 0. \end{cases}$$

Pak je funkce f diferencovatelná v každém bodě a její derivace je

$$f'(x) = |x|$$

Funkce f' není diferencovatelná v bodě $x_0 = 0$, tj. funkce f není dvakrát diferencovatelná.

Funkce konvexní a konkávní a inflexní bod

Definice 62 (Funkce konvexní a konkávní)

Necht' je dána diferencovatelná funkce $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je konvexní (konkávní) v intervalu (a, b) pokud platí, že $f'(x)$ je rostoucí (klesající) funkce v intervalu (a, b) .

Definice 63 (Inflexní bod)

Bod, ve kterém se funkce konvexní mění na funkci konkávní (nebo naopak) se nazývá inflexní bod.

Funkce konvexní a konkávní

Poznámka

Konvexitu lze definovat i pro funkce, které nejsou všude diferencovatelné. V takovém případě se konvexita funkce definuje tak, že pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí, že úsečka s krajními body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ leží celá v množině

$$Epi(f) = \{[x, y] \mid x \in D(f), y \geq f(x)\}.$$

$Epi(f)$ se nazývá nadgraf funkce.

Poznámka

Předchozí poznámka říká, že množina $Epi(f)$ je konvexní množina. Konvexní množina je taková, že pro každé dva body ležící v této množině leží i celá úsečka spojující tyto dva body v té množině.

Funkce konvexní a konkávní

Věta 60

Je-li funkce f konvexní (konkávní) v intervalu (a, b) pak pro libovolný bod $x_0 \in (a, b)$ platí, že graf funkce f leží nad (pod) tečnou ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Důkaz

Důkaz

Nechť funkce f je konvexní, tj. funkce f' je rostoucí na intervalu (a, b) . Podle Věty o střední hodnotě (Věta 52) platí, že pro libovolné x , $x_0 < x < b$ existuje bod c , $x_0 < c < x$ takový, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Protože f' je rostoucí, tak

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

tj.

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Protože $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ je rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, tak graf funkce f leží nad tečnou.

Je-li $x < x_0$, tak existuje bod c , $x < c < x_0$ tak, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

protože $f'(c) < f'(x_0)$. Platí tedy, že graf funkce f pro $x < x_0$ leží nad tečnou. $\square$

Věta 61

Nechť je funkce $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrát diferencovatelná v intervalu (a, b) .

- 1 Pokud $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) v intervalu (a, b) , pak je funkce konvexní (konkávní) v intervalu (a, b) .
- 2 Pokud je funkce f konvexní (konkávní), pak $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$)
- 3 Pokud má funkce f v bodě x_0 inflexní bod, pak $f''(x_0) = 0$.



Jestliže $f''(x_0) = 0$ pak bod x_0 nemusí být inflexním bodem, tj. podmínka $f''(x_0) = 0$ je pouze nutnou, ale nikoliv postačující podmínkou pro to, aby bod x_0 byl inflexním bodem funkce.

Důkaz

Důkaz

- ① Protože $f''(x) > 0$, tak je podle Věty 54 funkce f' rostoucí a tedy podle Definice 62 se jedná o konvexní funkci.
- ② Je-li funkce f konvexní a dvakrát diferencovatelná, tak podle Definice 62 platí, že f' je rostoucí funkce a tedy podle Věty 54 je $f''(x) \geq 0$.
- ③ V inflexním bodě se mění konvexita na konkavitu (nebo obráceně), tj. v bodě x_0 se mění znaménko funkce f'' a tedy $f''(x_0) = 0$.

Nalezení lokálních extrémů funkce s využitím druhé derivace funkce

Věta 62

Nechť funkce $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť $f'(x_0) = 0$ $\forall x_0 \in (a, b)$. Pak platí:

- 1 Je-li $f''(x_0) > 0$ pak má funkce v bodě x_0 lokální minimum.*
- 2 Je-li $f''(x_0) < 0$ pak má funkce v bodě x_0 lokální maximum.*

Důkaz

Důkaz

Předpokládejme, že $f''(x_0) > 0$ (případ $f''(x_0) < 0$ je analogický), tj. podle definice derivace

$$0 < f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro $0 < h < \delta$ platí $f'(x_0 + h) > 0$ a pro $-\delta < h < 0$ platí $f'(x_0 + h) < 0$. Podle Věty 55 má funkce f v bodě x_0 lokální minimum.

Aplikace derivace: Přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb

Definice 65

Uvažujme přímočarý pohyb. Necht' funkce $s(t)$ popisuje ujetou vzdálenost do času t . Pak definujeme

- 1 Průměrnou rychlost na časovém intervalu $[0, T]$: $\bar{v} = \frac{s(T) - s(0)}{T}$
- 2 Okamžitou rychlost v čase $t \in (0, T)$: $v(t) = s'(t)$
- 3 Zrychlení v čase $t \in (0, T)$: $a(t) = s''(t)$.

Aplikace derivace: Přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb

Příklad

Auto vyjede v čase 0 z bodu $s(0)$ a po dobu t_1 se pohybuje se zrychlením $a > 0$. Pak se do doby t_2 pohybuje s konstantní rychlostí a následně začne brzdit se zrychlením $-a$. Určete závislost ujeté dráhy $s(t)$ a rychlosti $v(t)$ na čase.

- 1 V časovém intervalu $[0, t_1]$ je rychlost auta $v'(t) = a$, tj. $v(t) = at + c$, kde c je rychlost auta v čase $t = 0$. Vzhledem k tomu, že předpokládáme, že auto na začátku stálo, tak $c = 0$ a rovnice rychlosti auta je $v(t) = at$.

Pro ujetou dráhu platí $s'(t) = v(t) = at$, tj. $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$, kde c je ujetá dráha v čase $t = 0$, což je 0, protože auto vyjíždí z počátku.

Ujetá dráha je tedy $s(t) = \frac{1}{2}at^2$.

- 2 V časovém intervalu $[t_1, t_2]$ je rychlost auta konstantní, tj. $v'(t) = 0$ a $v(t) = c$, kde c je rychlost auta v čase t_1 , tj. $c = v(t_1) = at_1$. Rychlost auta je tedy na tomto intervalu $v(t) = at_1$.

Pro ujetou dráhu platí $s'(t) = at_1$, tj. $s(t) = at_1 t + c$, kde c je ujetá dráha v čase t_1 , což je $s(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2$. Platí tedy

$$c = s(t_1) - at_1 t_1 = \frac{1}{2}at_1^2 - at_1^2 = -\frac{1}{2}at_1^2.$$

Ujetá dráha je tedy na druhém úseku $s(t) = at_1 t - \frac{1}{2}at_1^2$.

- 3 Pro $t > t_2$ je rychlost auta $v'(t) = -a$, tj. $v(t) = -at + c$, kde c je rychlost auta v čase t_2 . Vzhledem k tomu, že auto v čase t_2 se pohybovalo rychlostí $v(t_2) = at_1$, tak $c = v(t_2) + at_2 = a(t_1 + t_2)$. Rychlost auta na třetí úseku je $v(t) = -at + a(t_1 + t_2)$. Odtud určíme čas, ve kterém dojde k zastavení auta, tj. $v(T) = 0$ pro $T = t_1 + t_2$. Doba pohybu auta je tedy $t_1 + t_2$.

Pro ujetou dráhu platí $s'(t) = v(t) = -at + a(t_1 + t_2)$, tj. $s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + a(t_1 + t_2)t + c$, kde c je ujetá dráha v čase t_2 . Platí

$$c = s(t_2) - \frac{1}{2}at_2^2 = at_1 t_2 - \frac{1}{2}at_1^2 - \frac{1}{2}at_2^2 = -\frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2) \text{ a tedy ujetá dráha ve třetím úseku je } s(t) = \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2).$$

Celková ujetá dráha za dobu $T = t_1 + t_2$ (tj. do zastavení auta) je tedy

$$s(T) = \frac{1}{2}a(t_1 + t_2)^2 - \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2) = at_1 t_2.$$

2. Newtonův zákon

Newtonův zákon: Jestliže na těleso působí síla $F(t)$, pak se těleso pohybuje se zrychlením $a(t)$, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa m , tj.

$$F(t) = ma(t) = mv'(t) = ms''(t)$$

Příklad

Na těleso působí konstantní síla F . Určete závislost jeho polohy na čase.

Podle 2. Newtonova zákona platí $s''(t) = v'(t) = \frac{F}{m}$. Platí tedy $v(t) = \frac{F}{m}t + c$.

Jestliže předpokládáme, že počáteční rychlost je $v(0) = 0$, tak $c = 0$, tj. těleso se pohybuje rychlostí $v(t) = \frac{F}{m}t$. Protože $s'(t) = v(t) = \frac{F}{m}t$, tak $s(t) = \frac{F}{2m}t^2 + c$. Pokud předpokládáme, že na začátku bylo těleso v počátku, tj. $s(0) = 0$, tak $c = 0$. Poloha tělesa je tedy popsána rovnicí $s(t) = \frac{F}{2m}t^2$.

Poznámka

Jestliže známá síla závisí např. na poloze tělesa, tj. $F(s(t))$, pak dostáváme diferenciální rovnici

$$F(s(t)) = ms''(t),$$

kde funkce s , tj. poloha tělesa je neznámá. Diferenciálním rovnicím se věnuje předmět UMB/587 Úvod do diferenciálních rovnic.

Periodický pohyb: Netlumené harmonické kmity

Hookův zákon:

$$F(t) = -kx(t)$$

kde x značí výchylku pružiny z klidové polohy a konstanta k popisuje tuhost spirály.
Na základě 2. Newtonova zákona platí

$$mx''(t) = -kx(t)$$

popisuje kmitání pružiny. Tato úloha představuje diferenciální rovnici (více informací v předmětu UMB/587 Úvod do diferenciálních rovnic). Řešením jsou netlumené kmity

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha)$$

kde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a α je tzv. fázové posunutí.

Aplikace derivace: Exponenciální růst populace

Uvažujme populaci jedinců o početnosti $x(t)$ v čase t . Předpokládejme, že za jednotku času, tj. v časovém intervalu $[t, t + 1]$ se narodí $b(t)$ jedinců a zemře $d(t)$ jedinců. Velikost populace v čase $t + 1$ tedy bude

$$x(t + 1) = x(t) + b(t) - d(t).$$

Pokud budeme uvažovat jiný časový krok $1 > \Delta > 0$, tak bude platit

$$x(t + \Delta) = x(t) + (b(t) - d(t))\Delta.$$

Odtud

$$\frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta} = b(t) - d(t)$$

a limitním předchodem pro $\Delta \rightarrow 0$ obdržíme

$$x'(t) = b(t) - d(t).$$

Jestliže si označíme $r(t) = \frac{b(t) - d(t)}{x(t)}$, tj. $r(t)$ je tzv. specifická (tj. vztažená na jedince) růstová rychlost populace, pak dostáváme diferenciální rovnici

$$x'(t) = r(t)x(t).$$

Aplikace derivace: Exponenciální růst populace

V případě, že specifická růstová rychlost nezávisí na čase, tj. $r(t) = r$, dostáváme diferenciální rovnici exponenciálního růstu

$$x'(t) = rx(t).$$

Jestliže máme zadánu počáteční velikost populace,

$$x(0) = C$$

pak platí:

Věta 65

Funkce $x(t) = Ce^{rt}$ je jediným řešením diferenciální rovnice

$$x'(t) = rx(t), \quad x(0) = C.$$

Důkaz

- 1 Protože $x'(t) = Cre^{rt}$, dosazením do diferenciální rovnice vidíme, že rovnost je splněna pro všechna $t \in \mathbb{R}$.
- 2 Předpokládejme, že existují dvě různá řešení $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a označme $h(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$. Pak platí

$$h'(t) = \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{y^2(t)} = \frac{rx(t)y(t) - rx(t)y(t)}{y^2(t)} = 0.$$

Platí tedy, že funkce h je konstantní. Protože $h(0) = 1$, tak $h(t) = 1$ a tedy $x(t) = y(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Chemická reakční kinetika Michaelis-Mentenové



- S —substrát
- E —enzym
- X —meziprodukt
- P —finální produkt

Časový průběh změn koncentrací je možné popsat pomocí diferenciálních rovnic

$$E'(t) = -k_1 E(t)S(t) + k_{-1}X(t) + k_2X(t)$$

$$S'(t) = -k_1 E(t)S(t) + k_{-1}X(t)$$

$$X'(t) = k_1 E(t)S(t) - k_{-1}X(t) - k_2X(t)$$

$$P'(t) = k_2X(t).$$

Leonor Michaelis a Maud Menten z těchto rovnic odvodili rychlost vzniku finálního produktu v závislosti na koncentraci substrátu

$$v = V_{max} \frac{S}{K_M + S},$$

kde $V_{max} = k_2 E_0$ a $K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$, E_0 je počáteční koncentrace enzymu.