

Přednáška 11: Věta o střední hodnotě a L'Hopitalovo pravidlo

## Rolleova věta

### Věta 51 (Rolleova)

*Je-li funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá v intervalu  $[a, b]$  a diferencovatelná v každém bodě  $a < x < b$  a  $f(a) = f(b)$ , pak existuje bod  $x_0 \in (a, b)$  takový, že*

$$f'(x_0) = 0.$$

### Příklad

*Funkce  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , která není diferencovatelná v bodech  $x = \pm 1$ , splňuje předpoklady Rolleovy věty na intervalu  $[-1, 1]$ .*

### Příklad

*Funkce  $f(x) = |x|$  nesplňuje předpoklady Rolleovy věty na intervalu  $[-1, 1]$ .*

### Příklad

*Funkce  $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$  nesplňuje předpoklady Rolleovy věty na intervalu  $[-1, 1]$ .*

## Důkaz

### Důkaz

*Jsou dvě možnosti.*

- ① *Funkce  $f$  je konstantní, tj. v každém bodě je  $f'(x) = 0$  a věta je dokázaná.*
- ② *Funkce není konstantní. Protože je spojitá na uzavřeném intervalu, podle Věty 36 nabývá na intervalu maxima a minima. Maximum nebo minimum musí tedy být různé od hodnoty  $f(a) = f(b)$  a tedy maxima a minima je nabýváno v nějakém vnitřním bodě  $x_0$  intervalu  $(a, b)$ . Protože funkce je diferencovatelná, tak  $f'(x_0) = 0$  (Věta 50).*

## Příklad: Jednoznačnost řešení algebraické rovnice

### Příklad

*Dokažte, že rovnice  $6x^3 + x^2 + x - 5 = 0$  má v intervalu  $[0, 1]$  právě jedno řešení. Označme  $f(x) = 6x^3 + x^2 + x - 5$ . Protože  $f(0) = -5$  a  $f(1) = 3$ , tj.  $f(0)f(1) < 0$  a funkce je spojitá, tak podle Bolzano-Weierstrassovy věty platí, že existuje řešení na intervalu  $[0, 1]$ .*

*Dokážeme, že toto řešení je jediné. Předpokládejme sporem, že existují dvě různá řešení  $x_1 \neq x_2$ ,  $0 < x_1 < x_2 < 1$ . Platí tedy  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , a tedy podle věty o střední hodnotě platí, že existuje  $c \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 < c < x_2$  takové, že  $f'(c) = 0$ . Protože*

$$f'(x) = 18x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ pro } x \in [0, 1],$$

*tak dostáváme spor s předpokladem existence dvou různých řešení.*

## Věta o střední hodnotě

### Věta 52 (O střední hodnotě)

*Je-li funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá v intervalu  $[a, b]$  a diferencovatelná v  $(a, b)$ , pak existuje bod  $x_0 \in (a, b)$  takový, že*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

## Důkaz

### Důkaz

*Definujeme funkci*

$$g(x) = f(x) - \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

*Protože funkce  $g$  je spojitá a  $g(a) = g(b) = 0$ , tak podle Rolleovy věty 51 existuje bod  $x_0 \in (a, b)$  takový, že platí*

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

*a tedy*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

## Aplikace věty o střední hodnotě

### Věta 53

- 1 Je-li  $f'(x) = 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je konstantní na intervalu  $(a, b)$ .
- 2 Jestliže pro funkce  $f$  a  $g$  platí, že  $f'(x) = g'(x)$  pro  $x \in (a, b)$ , pak je  $f(x) - g(x)$  konstantní v intervalu  $(a, b)$ .

## Důkaz

### Důkaz

- ① Aplikujeme Větu 52 na interval  $[a, x]$  pro  $x \leq b$ . Existuje tedy  $c \in (a, x)$  tak, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0,$$

a tedy  $f(x) = f(a)$ .

- ② Definujeme funkci  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Platí tedy, že  $h'(x) = 0$  pro  $x \in (a, b)$ . Podle první části věty, je tedy funkce  $h$  konstantní.

### Věta 54

*Nechť  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencovatelná v každém bodě  $x \in (a, b)$ . Pak platí:*

- *Je-li  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) v každém bodě  $x \in (a, b)$ , pak je funkce  $f$  rostoucí (klesající) v intervalu  $(a, b)$ .*
- *Je-li  $f(x)$  rostoucí (klesající) v  $(a, b)$ , pak  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) v intervalu  $(a, b)$ .*



Pokud je funkce  $f$  rostoucí v intervalu  $(a, b)$ , pak neplatí že  $f'(x) > 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ , viz. např. funkce  $f(x) = x^3$ , pro kterou  $f'(0) = 0$ .

## Důkaz

### Důkaz

- 1 Necht'  $a < x_1 < x_2 < b$ . Podle Věty o střední hodnotě 52 existuje  $x_1 < c < x_2$  takové, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0,$$

a tedy  $f(x_2) > f(x_1)$ , tj. funkce  $f$  je rostoucí.

- 2 Je-li  $f$  rostoucí v intervalu  $(a, b)$ , tak platí

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \text{ pro } h > 0 \quad (8)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \text{ pro } h < 0. \quad (9)$$

Protože existuje, derivace funkce  $f$ , tak musí platit, že

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

## Průběh funkce

### Definice 60 (Kritický bod funkce)

*Bod  $x_0 \in D(f)$  se nazývá kritickým bodem funkce  $f$ , pokud platí jedna ze dvou podmínek:*

- *funkce  $f$  není diferencovatelná v bodě  $x_0$*
- *$f'(x_0) = 0$ .*

## Lokální extrémy funkce pomocí první derivace

### Věta 55

Nechť  $x_0 \in (a, b)$  a necht' je funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá v  $(a, b)$  a diferencovatelná v každém bodě intervalu  $(a, b)$  s možnou výjimkou bodu  $x_0$ . Pak platí:

- 1 Pokud existuje číslo  $\delta > 0$  tak, že v intervalu  $(x_0 - \delta, x_0)$  je  $f'(x) > 0$  a v intervalu  $(x_0, x_0 + \delta)$  je  $f'(x) < 0$  pak má funkce v bodě  $x_0$  lokální maximum.
- 2 Pokud existuje číslo  $\delta > 0$  tak, že v intervalu  $(x_0 - \delta, x_0)$  je  $f'(x) < 0$  a v intervalu  $(x_0, x_0 + \delta)$  je  $f'(x) > 0$  pak má funkce v bodě  $x_0$  lokální minimum.

## Důkaz

### Důkaz

*Nechť existuje číslo  $\delta > 0$  tak, že v intervalu  $(x_0 - \delta, x_0)$  je  $f'(x) > 0$  a v intervalu  $(x_0, x_0 + \delta)$  je  $f'(x) < 0$ . Podle Věty 54 je tedy funkce na intervalu  $(x_0 - \delta, x_0)$  rostoucí a na intervalu  $(x_0, x_0 + \delta)$  je klesající. Protože je funkce  $f$  spojitá, tak na intervalu  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  nabývá svého maxima, tj. maximum funkce na tomto intervalu je nabýváno v bodě  $x_0$ .*

## Postup nalezení extrémů funkce na intervalu $[a, b]$ s využitím první derivace funkce

- 1 Nalezneme kritické body funkce  $f$  na intervalu  $(a, b)$ .
- 2 Určíme hodnoty funkce  $f$  v kritických bodech a v krajních bodech  $a$  a  $b$ . Největší (nejmenší) z těchto hodnot je maximum (minimum) funkce.
- 3 Určíme intervaly, ve kterých je funkce rostoucí/klesající
- 4 V kritických bodech určíme, zda-li se jedná o lokální maximum nebo lokální minimum. V bodech lokálního maxima derivace funkce mění znaménko z  $+$  na  $-$ , v bodech lokálního minima derivace funkce mění znaménko z  $-$  na  $+$ .

## Zobecněná (Cauchyova) věta o střední hodnotě

### Věta 57 (Zobecněná věta o střední hodnotě)

*Nechť funkce  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité v intervalu  $[a, b]$  a diferencovatelné v  $(a, b)$ . Pak existuje bod  $c \in (a, b)$  takový, že*

$$f'(c) (g(b) - g(a)) = g'(c) (f(b) - f(a)).$$

### Poznámka

*Pokud platí, že  $g(a) \neq g(b)$  a  $g'(c) \neq 0$ , pak lze tvrzení věty zapsat jako*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

## Důkaz

### Důkaz

*Definujeme funkci*

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

*Protože je funkce  $h$  spojitá a  $h(a) = h(b) = 0$ . Podle Rolleovy věty existuje  $a < c < b$  tak, že  $h'(c) = 0$ . Protože*

$$h'(c) = g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a)) = 0,$$

*tj.*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

## L'Hopitalovo pravidlo

### Věta 58 (L'Hopitalovo pravidlo)

Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou diferencovatelné na intervalu  $(a, b)$  a  $g'(x) \neq 0$  pro  $x \in (a, b)$ . Necht' bud'

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow b-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow b-} |g(x)| = \infty.$$

Dále necht' platí bud'

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Další případy, pro které platí L'Hopitalovo pravidlo

- 1 jednostranné limity nahradíme limitou (pokud limita existuje)
- 2  $b = \infty$
- 3 Limitu zleva v bodě  $b$  je nahrazena limitou zprava v bodě  $a$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow b-}$  nahradíme všude ve Větě 58  $\lim_{x \rightarrow a+}$  přičemž připouštíme i  $a = -\infty$

## Příklady

Příklad (Správné použití l'Hopitalova pravidla)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Příklad (Limita pro kterou nelze použít l'Hopitalovo pravidlo)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin x}{x}$$

*Pokud bychom použili l'Hopitalovo pravidlo, pak po derivaci čitatele a jmenovatele dostáváme*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{1} = \text{limita neexistuje,}$$

*a tedy nejsou splněny předpoklady Věty 58. Limitu tedy nelze určit pomocí l'Hopitalova pravidla. Platí*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin x}{x} = 1.$$

## Příklady

### Příklad (Správné použití l'Hopitalova pravidla)

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x},$$

*pokud  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x$  existuje. Pro výpočet  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x$  použijeme l'Hopitalovo pravidlo*

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0.$$

*Platí tedy*

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x} = 1.$$

## Příklady

### Věta 59

*Pro každé  $p > 0$  a  $n \in \mathbb{N}$  platí*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-px} = 0.$$

### Poznámka

*Předchozí věta říká, že exponenciála se záporným exponentem klesá k nule rychleji než libovolná mocnina  $x^n$  roste do nekonečna.*

### Důkaz

*Protože  $x^n e^{-px} = \frac{x^n}{e^{px}}$ , tak můžeme použít l'Hopitalovo pravidlo. L'Hopitalovo pravidlo použijeme opakovaně  $n$ -krát a dostaneme*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{px}} = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p} \dots \frac{3}{p} \frac{2}{p} \frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{px}} = 0.$$

## Důkaz Věty 58

Důkaz provedeme pro případ, že  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ . Podle definice limity funkce pro libovolné  $\epsilon > 0$  existuje  $x_0 \in (a, b)$  tak, že

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \epsilon \quad \text{pro} \quad x_0 < c < b. \quad (10)$$

Z věty 57 o zobecněné střední hodnotě plyne, že pokud  $x_0 < x < t < b$  pak existuje  $c \in (x, t)$  tak, že

$$[g(t) - g(x)]f'(c) = [f(t) - f(x)]g'(c). \quad (11)$$

Poněvadž  $g' \neq 0$  v  $(a, b)$ , tak  $g$  je buď rostoucí nebo klesající a tedy  $g(x) - g(t) \neq 0$  pro  $x \neq t \in (a, b)$ . Odtud plyne, že rovnice  $g(x) = 0$  má v intervalu  $(a, b)$  maximálně jedno řešení. Můžeme tedy vybrat  $x_0$  v (10) tak, aby  $g(x) \neq 0$  pro  $x \in [x_0, b)$ . Rovnici (11) tedy můžeme přepsat do tvaru

$$G(t) := \frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad t > x$$

a tedy (10) implikuje

$$|G(t) - L| < \epsilon \quad \text{pro} \quad x, t \in [x_0, b), \quad x < t. \quad (12)$$

Z předpokladu  $\lim_{t \rightarrow b-} f(t) = \lim_{t \rightarrow b-} g(t) = 0$ , plyne, že

$$\lim_{t \rightarrow b-} G(t) = \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (13)$$

Poněvadž

$$|G(t) - L| < \epsilon \quad \text{pro} \quad x_0 < x < t < b,$$

tak z (12) a (13) plyne, že

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \epsilon$$

pro všechna  $x \in (x_0, b)$ , a tedy  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ .

...

Nyní větu dokážeme za předpokladu  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) \pm \infty$ . Vybereme opět  $x_0$  tak, aby platila (10) a  $g \neq 0$  v  $[x_0, b)$ . Ze zobecněné věty o střední hodnotě kde položíme  $t = x_0$  dostaneme

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - L \right| < \epsilon \quad \text{pro } x_0 < x < b. \quad (14)$$

Protože  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \pm \infty$ , tak existuje  $x_1 > x_0$  takové, že  $f(x) \neq 0$  a  $f(x) \neq f(x_0)$  pro  $x_1 < x < b$  a tedy funkce

$$u(x) = \frac{1 - g(x_0)/g(x)}{1 - f(x_0)/f(x)}$$

je nenulová pro  $x_1 < x < b$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow b-} u(x) = 1. \quad (15)$$

Protože

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - f(x_0)/f(x)}{1 - g(x_0)/g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)u(x)},$$

tak z (14) plyne, že

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)u(x)} - L \right| < \epsilon \quad \text{tj.} \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - Lu(x) \right| < \epsilon |u(x)| \quad \text{pro } x_1 < x < b.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - Lu(x) \right| + |Lu(x) - L| \leq \epsilon |u(x)| + |L| |u(x) - 1|. \quad (16)$$

Z (15) plyne, že existuje bod  $x_2 \in (x_1, b)$  takový, že

$$|u(x) - 1| < \epsilon \quad \text{a tedy} \quad |u(x)| < 1 + \epsilon \quad \text{pro } x_2 < x < b.$$

Odtud dostaneme

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon(1 + \epsilon) + |L|\epsilon \quad \text{pro } x_2 < x < b,$$

tj.  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .