Příklady k procvičení

1. Vyšetřete průběh funkce[1]

   a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$

   b) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + 2x^2 - 1$

   c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

   d) $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{-4x}$

   e) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$

   f) $f(x) = x - \ln(x^2 - 9)$

   g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

   h) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$

2. Uveďte příklad funkce (tj. napište předpis) s danými vlastnostmi:

   a) $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$ a f má v bodě $x = 0$ lokální extrém;

   b) $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$ a f nemá v bodě $x = 0$ lokální extrém;

   c) $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ a f má v bodě $x = 0$ lokální extrém;

   d) $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ a f nemá v bodě $x = 0$ lokální extrém;

   e) $f'(0) \neq 0$, $f''(0) > 0$ a f má v bodě $x = 0$ lokální extrém;

   f) $f'(0)$ neexistuje a f má v bodě $x = 0$ lokální extrém;

   g) $f(1) = 1$ a $f'(1) = -2$;

   Pokud taková funkce neexistuje, zdůvodněte.

3. Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí:

   a) $f(0) = 3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) < 0$, $f(2) = 2$, $f'(2) = -1$, $f''(2) = 0$, $f(4) = 1$, $f'(4) = 0$ a $f''(4) > 0$;

   b) $f'(x) > 0$ pro $x > 2$, $f''(x) > 0$ pro $x > 2$, $f'(x) < 0$ pro $x < 2$ a $f''(x) < 0$ pro $x < 2$. Může být taková funkce hladká (tj. existuje $f'(2)$)?

[1] Určete $D(f)$ a limity ve všech jeho krajních bodech, intervaly monotonie a lokální extrémy, intervaly křivosti (u příkladů e) a h) nemusíte) a obor hodnot $H(f)$.

Výsledky:

1. Ke kontrole grafů použijte např. Wolfram Alpha. Stručné výsledky níže. Ručně psané řešení příkladu h) ve zvláštním souboru. Dotazy na `zahram05@prf.jcu.cz`

   a) $D(f) = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, minima v $x = -2$ a $x = 2$, lokální maximum v $x = 0$, inflexní body $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $H(f) = [-12, +\infty)$

   b) $D(f) = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, stacionární body $x = 0$ a $x = 2$, minimum v $x = 0$, inflexní body $x = \frac{2}{3}$ a $x = 2$, $H(f) = [-1, +\infty)$

   c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = -\infty$, lokální maximum v $x = -1$, lokální minimum v $x = 1$, konkávní na $(-\infty, 0)$, konvexní na $(0, +\infty)$, $H(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, asymptota $y = x$

   d) $D(f) = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, stacionární body $x = 0$ a $x = \frac{3}{4}$, maximum v $x = \frac{3}{4}$, inflexní body $x = 0$, $x = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$, $H(f) = (-\infty, \frac{27}{64}\mathrm{e}^{-3}]$

   e) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x) = \lim\limits_{x\to3+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x) = \lim\limits_{x\to3-} f(x) = 0$, lokální maximum v $x = 2$, $H(f) = (0, \frac{1}{\mathrm{e}}] \cup (1, +\infty)$

   f) $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-3-} f(x) = \lim\limits_{x\to3+} f(x) = +\infty$, lokální minimum v $x = 1 + \sqrt{10}$, $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in D(f)$, $H(f) = \mathbb{R}$

   g) $D(f) = (0, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = -\infty$, maximum v $x = \mathrm{e}^2$, inflexní bod $x = \mathrm{e}^{8/3}$, $H(f) = (-\infty, \frac{2}{\mathrm{e}}]$

2. a) $f(x) = x^2$; b) neexistuje; c) $f(x) = x^4$; d) $f(x) = x^3$; e) neexistuje; f) $f(x) = |x|$; g) $f(x) = -2x + 3$

3. Dotazy na `zahram05@prf.jcu.cz`