

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojního inženýrství

Ivan Švarc

ZÁKLADY AUTOMATIZACE

Učební texty pro kombinovanou formu bakalářského studia

Určeno pro bakalářské studium:

Obor studia: 23-70-7 – Aplikovaná informatika a řízení

předmět: **Automatizace a regulace**

Obor studia: 23-24-7 – Stavba strojů a zařízení

předmět: **Základy automatizace a regulace**

Tato publikace je určena posluchačům kombinovaného bakalářského studia pro předmět Automatizace a regulace, který je v osnovách bakalářského oboru Inženýrská informatika a řízení a pro předmět Základy automatizace a regulace, který je v osnovách bakalářského oboru Stavební stroje.

Současně je doporučen všem posluchačům bakalářského studia na Fakultě strojního inženýrství, kteří si zapisují tyto předměty v normální formě bakalářského studia a konečně všem zájemcům o automatizaci. Rád bych ještě podotkl, že ve větším rozsahu jsou základy automatizace a jmenovitě základy automatického řízení v publikaci **Švarc, I.: Automatizace – Automatické řízení**, Akademické nakladatelství CERM,s.r.o. Brno, březen 2002, která je určena pro předmět Automatizace. Ten je ve studijních programech všech magisterských oborů na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně.

V Brně, říjen 2002.

Autor

© Ivan Švarc, 2002

ISBN

OBSAH

1.	ÚVOD	4
	<i>Kontrolní otázky</i>	9
2.	LOGICKÉ ŘÍZENÍ	9
2.1	Logické funkce	9
2.2	Booleova algebra	12
2.3	Vyjádření booleovských funkcí	15
2.4	Minimalizace logických funkcí	17
2.5	Realizace logických funkcí prvky NAND a NOR	19
2.6	Logické řídicí obvody	21
2.7	Programovatelné automaty	26
	<i>Kontrolní otázky</i>	29
3.	SPOJITÉ LINEÁRNÍ ŘÍZENÍ	30
3.1	Úvod	30
3.2	Laplaceova transformace	32
3.2.1	Přímá a zpětná transformace	32
3.2.2	Hlavní věty transformace	34
3.3	Statické a dynamické vlastnosti regulačních členů	35
3.4	Diferenciální rovnice systému a přenos	36
3.5	Impulsní funkce a charakteristika	39
3.6	Přechodová funkce a charakteristika	40
3.7	Frekvenční přenos	44
3.8	Frekvenční charakteristika v komplexní rovině	46
3.9	Dopravní zpoždění	49
3.10	Bloková algebra	52
3.11	Regulátory – základy, dynamické vlastnosti	58
3.12	Regulátory – konstrukční principy, použití	63
3.13	Stabilita regulačních obvodů	67
3.14	Kritéria stability	70
3.14.1	Hurwitzovo kritérium	71
3.14.2	Routh-Schurovo kritérium	72
3.14.3	Michajlov-Leonhardovo kritérium	74
3.14.4	Nyquistovo kritérium	75
3.15	Nastavení regulátorů metodou Ziegler-Nichols	76
	<i>Kontrolní otázky</i>	79
4.	DISKRÉTNÍ ŘÍZENÍ	81
4.1	Diskrétní regulační obvod	81
4.2	Z – transformace	83
4.3	Diferenční rovnice	87
4.4	Matematický popis diskretních členů	90
4.5	Číslicové regulátory	94
4.6	Stabilita diskretních obvodů	96
	<i>Kontrolní otázky</i>	101
	LITERATURA	102

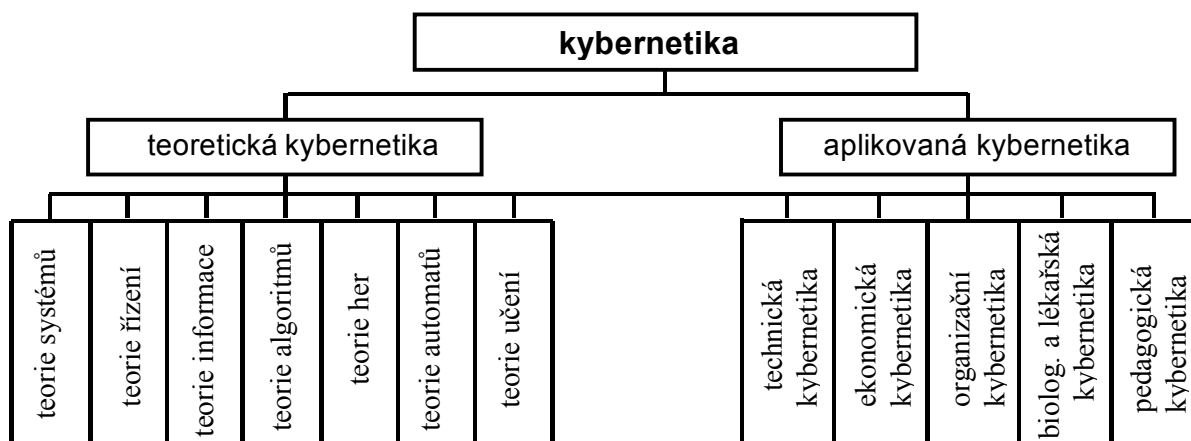
1. ÚVOD

Všude kolem nás vidíme snahu o neustálé zvyšování produktivity práce. Úkolem inženýra v tomto procesu je hledat nové pracovní postupy s minimální spotřebou času a nákladů. Jednotlivé pracovní úkony musí být co nejkratší a nejjednodušší, aby vyžadovaly minimum lidských sil. K tomu všemu musí přispívat především automatizace výrobních procesů.

K automatizaci vede snaha člověka osvobodit se nejen od fyzické činnosti, ale i od jednotvárné a unavující činnosti duševní. Činnost člověka přebírají automaty, počítače a prvky umělé inteligence. Tento poměrně složitý proces, při němž lidská řídicí činnost při výrobě i mimo výrobní proces je nahrazována činností různých přístrojů a zařízení je nazývána **automatizací**.

V průběhu vývoje společnosti se člověk nejprve podle svých schopností, možností a zájmů začal osvobozovat od namáhavé a opakující se fyzické práce (mechanizace – např. přechod z ručního na strojní obrábění). Později pak, s dalším rozvojem techniky a nárůstem nároků na řídicí činnost, přistoupil i k osvobozování od často již i velmi náročné a rovněž namáhavé řídicí duševní práce (automatizace – např. přechod ze strojního obrábění s lidskou obsluhou na číslicově řízené obráběcí stroje). Postupně jsou tak vytvářeny řídicí systémy buď plně automatické (bez jakékoliv účasti člověka na řízení), nebo více či méně automatizované, kde člověk do jinak automaticky řízeného procesu zasahuje způsobem, který je spíše závislý na charakteru řízeného procesu (např. volí nebo potvrzuje další uplatňovaný způsob řízení, modifikuje způsob řízení podle okamžitého průběhu řízeného procesu apod.).

Řízení je tedy neoddělitelným základem automatizace. A teoretickou disciplínou, která se zabývá řízením je vědní obor zvaný **kybernetika**. Za jejího zakladatele je považován americký matematik Norbert Wiener, který jako první zpracoval teorii zpětnovazebních systémů řízení pro účely protiletectvé obrany. Tuto teorii zobecnil pro všechny druhy technických a biologických systémů. Shrnul ji ve své proslulé knize Kybernetika neboli řízení a sdělování v živých organismech a strojích (Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machines). Tato kniha vyšla v roce 1948 a autora proslavila jako zakladatele kybernetiky. Většina definic kybernetiky vychází z Wienerovy definice, který ji definoval jako „vědu o řízení a sdělování v živých organismech a strojích“. Nedostatkem této definice je, že nedoceňuje systémový přístup při řízení a jako objekty zkoumání zahrnuje pouze živé organismy a stroje. Nezahrnuje tedy další poměrně velmi důležité objekty, z dnešního hlediska nabývající ještě na



Obr. 1.1

důležitosti, zkoumané dnešní kybernetikou, jako jsou objekty společenské, ekonomické a z technických systémů, dnes tak různorodých, se omezuje jen na stroje. Ani informační hledisko této definice není úplné, protože se omezuje jen na sdělování čili na přenos informací a neuvažuje dnes tak důležité procesy uchování a zpracování informace.

Kybernetika je věda, která zkoumá obecné vlastnosti a zákonitosti řízení v biologických, technických a společenských systémech. Jako každá věda musí také kybernetika disponovat teoretickým základem a tento aplikovat na jednotlivé vědní oblasti. Tímto rozlišením dělíme kybernetiku na **teoretickou a aplikovanou kybernetiku** – obr. 1.1.

Z dílčích částí teoretické kybernetiky nás bude v dalším zajímat především **teorie řízení**, která se zabývá zkoumáním obecných vlastností a zákonitostí řízení. Při řídicích procesech hraje významnou úlohu také informační aspekt a ten je předmětem **kybernetické teorie informace**. Zde se jedná o získávání, přenos, zpracování, ukládání a využívání informací z hlediska řízení. Týmiž informačními procesy, bez zřetele k těmto speciálním souvislostem s řídicími systémy se zabývá vlastní teorie informace. Protože všechny kybernetické děje probíhají uvnitř systémů, využívá kybernetika také poznatků obecné **teorie systémů**, která zkoumá obecné vlastnosti a zákonitosti informačních systémů. Kybernetická teorie systémů se zabývá systémy, v nichž se uskutečňují řídicí procesy. Uvedené dílčí teorie jsou teoretickými nástroji **teoretické kybernetiky**, které mají vztah k automatizaci. Tyto teorie jsou samostatné vědní disciplíny a nás bude z hlediska automatizace zajímat především teorie řízení. Většinou ji uvádíme jako **teorii automatického řízení**, čímž zdůrazňujeme, že se jedná o řízení technických zařízení (angl. Automatic Control), protože řízení společenské (angl. Management) se spíš označuje bez přívlastku pouze jako teorie řízení.

Předmět kybernetiky lze zkoumat např. v biologických, technických a společenských systémech. Z tohoto hlediska praktického využití je možno v rámci **aplikované kybernetiky** rozlišovat **technickou kybernetiku, biologickou kybernetiku, pedagogickou kybernetiku, vojenskou kybernetiku** atd. V každém z těchto odvětví aplikované kybernetiky se vždy přednostně využívá určitých aspektů teoretické kybernetiky. Tak např. v současné době hrají v technické kybernetice významnou úlohu teorie řízení (regulace), teorie systémů a teorie informace.

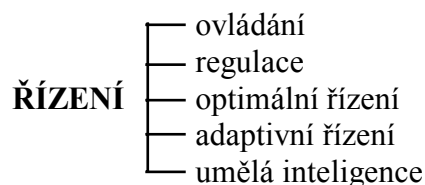
Základem automatizace je řízení. **Řízení je cílené působení na řízený objekt tak, aby se dosáhlo určitého předepsaného cíle.**

Podle toho, jak řízení provádíme, rozlišujeme řízení **ruční a automatické**. Typickým příkladem je řízení letadla člověkem a autopilotem.

U automatického řízení rozlišujeme **přímé řízení**, u kterého řídicí proces probíhá bez přívodu energie (regulace výšky hladiny odvozená od síly plováku) a **nepřímé řízení** s přívodem energie, což je dnes běžné a bude v dalším rozváděno.

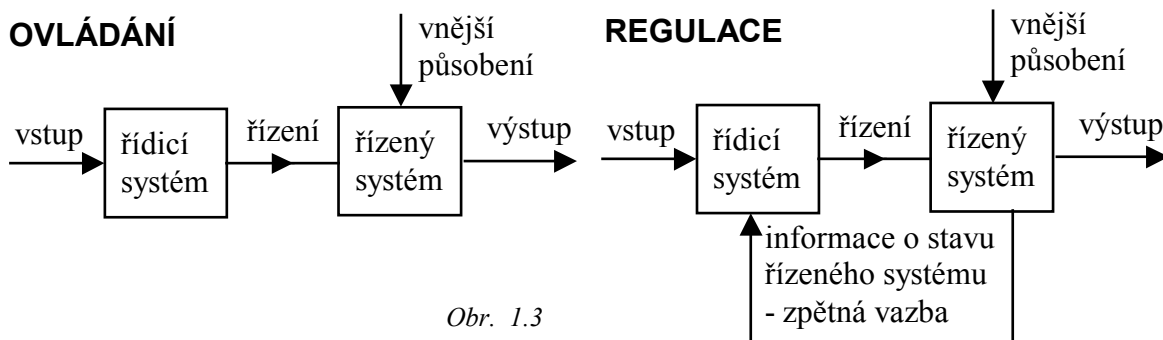
Důležitým hlediskem pro dělení řízení je zda výsledek řízení je anebo není zpětně kontrolován – zda je či není zpětná vazba při řízení. Podle toho rozlišujeme **ovládání, regulaci a vyšší formy řízení** (obr. 1.2):

- **ovládání** je řízení bez zpětné kontroly – bez zpětné vazby;
- **regulace** je řízení se zpětnou vazbou. Regulace je udržování určité fyzikální veličiny na konstantní hodnotě nebo jinak podle nějakého pravidla se měnící hodnotě. Během regulace se zjišťují hodnoty této veličiny a srovnávají se s hodnotou, kterou má mít. Podle zjištěných



Obr. 1.2

odchylek se zasahuje do regulačního procesu v tom smyslu, aby se odchylky odstranily.



Obr. 1.3

Rozdíl mezi oběma druhy řízení – ovládáním a regulací – je na obr. 1.3;

- **vyšší formy řízení.** Sem patří **optimální řízení, adaptivní řízení, učení a umělá inteligence.**

optimální řízení je takové, kdy systém dosáhne požadovaných vlastností např. při minimu vynaložené energie, tedy s maximální účinností, nebo naopak v nejkratším čase. Systém je přitom schopen vyhledat nejvýhodnější působení a dosáhnout tak co nejlepšího chování celého systému v daných omezujících podmínkách;

adaptivní řízení je takové, kdy systém je schopen měnit svou strukturu tedy i své parametry tak, aby proces řízení probíhal stále optimálně, a to i při změnách parametrů řízeného objektu;

jestliže je adaptivní systém schopen ukládat přijaté informace do paměti a později v téže nebo podobné situaci znovu využívat získaných zkušeností, lze jej nazvat učícím systémem a proces řízení tohoto systému je **učení**;

nejvyšším stupněm řízení je řízení systémy s **umělou inteligencí**. Umělá inteligence je vlastnost uměle vytvořeného systému, který má schopnost rozpoznávat předměty, jevy, analyzovat vztahy mezi nimi a tak si vytvářet modely okolí, dělat účelná rozhodnutí a předvídat jejich důsledky, řešit problémy včetně objevování nových zákonitostí a zdokonalování své činnosti.

Automatické řízení lze technicky uskutečnit několika způsoby, které se podstatně liší principem působení řídicího systému na řízený systém. Z tohoto hlediska rozdělujeme automatické řízení na

- **logické**
- **spojité**
- **diskrétní**
- **fuzzy**

Logické řízení využívá k řízení dvouhodnotových veličin. Jejich působení je takové, že jsou vždy jen dvě možnosti – ventil je otevřen / zavřen, vypínač je sepnut / vypnut, atd. Podobně i informace o stavu objektu jsou dvouhodnotové veličiny – hladina je nad / pod minimální hodnotou, teplota je nad / pod 18°C, atd. Dvouhodnotové veličiny jsou formálně vyjadřovány hodnotami 0 a 1. Jsou analogické s proměnnými výrokové logiky, a proto jsou vztahy mezi proměnnými nazývány logické funkce a řídicí obvody pracující na tomto principu jsou logické řídicí obvody.

Spojité řízení je tam, kde jak akční zásah je spojitě nastavován, tak i údaje o řízeném systému jsou měřeny jako veličiny spojitě proměnné v čase. Spojitý řídicí systém vytváří (na

rozdíle od diskretního systému) nepřetržitou vazbu mezi vstupy a výstupy. Všechny veličiny spojitěho systému jsou spojitě proměnné v čase, žádná z nich není ani dvouhodnotová ani diskretní.

Diskretní řízení je dnes důsledkem nasazení počítačů jako regulátorů i když jeho počátky byly při řízení spojitých systémů, diskretně měřených (řízení polohy letadla, měřené radiolokátorem). U řídicích počítačů, které ani nedovedou zpracovávat spojitý signál, je nutný spojitý signál převádět na diskretní. Diskretní řídicí systém vytváří vztah mezi vstupy a výstupy jako vztah mezi posloupnostmi impulsů, snímaných v časovém sledu daném tzv. vzorkovací periodou. Mezi okamžiky vzorkování není regulovaná veličina měřena a ani akční veličina není upravena. Tato vzorkovací perioda je tím kratší, čím rychlejší je řízený proces.

Zatímco spojitě řízení je v dnešní době spíše na ústupu, můžeme realizovat logické a diskretní řízení na jednom a totéž **programovatelném automatu**. Na druhé straně diskretní řízení realizované s velmi krátkou periodou vzorkování může být přibližně shodné se spojitým.

U **fuzzy řízení** není základem řízený systém a jeho model, ale pozornost je zaměřena na člověka (tzv. experta), který umí systém řídit, ale přitom nemá pojem o klasickém matematickém modelu řízeného systému. Takový člověk pak soustavu řídí na základě pravidel typu „jestliže hladina klesá, otevři trochu přívod vody“.

Fuzzy regulátor musí nejprve přiřadit zvoleným vstupním veličinám jazykovou hodnotu. To se provede nejlépe pomocí tzv. funkce příslušnosti – bývají voleny obvykle ve tvaru lichoběžníka či trojúhelníka. Tato etapa je označována jako fuzzifikace. V dalším kroku určí fuzzy regulátor na základě znalostí experta slovní hodnoty akčních veličin (např. regulační odchylka je záporná malá). Nakonec převede slovní vyjádření na konkrétní číselné hodnoty veličin – tzv. defuzzifikaci.

Toto řízení je vhodné pro řízení systémů, které nedovedeme popsat, ale které dovedeme řídit. Je možné určit hodnotu výstupu, aniž známe vzorec mezi vstupem a výstupem.

Závěrem tohoto úvodu zdůrazněme ještě systémový přístup k automatizaci. Řešení problémů automatizace zasahuje do různých oborů a je nutno je řešit současně, komplexně. Vyjmenujme aspoň některé problémy, které se řeší při zavádění automatizace:

- problém rozhodování o účelnosti automatizace v dané oblasti
- řešení technické záležitosti automatizace
- řešení použitých technických prostředků automatizace
- nasazení počítačů a otázky programového vybavení těchto počítačů
- sociální a ekonomické aspekty automatizace
- působení automatizace na životní prostředíatd.

Člověk, zabývající se automatizací musí mít alespoň základní znalosti z automatického řízení, z prostředků automatického řízení, musí vědět něco o simulaci systémů, musí znát základy práce s počítači, znát základy měřicí techniky, základy elektroniky a elektrotechniky a ještě spoustu dalších věcí.

Jen s těmito znalostmi je možné přistupovat k zavádění automatizace na různých pracovištích a dosáhnout toho, aby prostředky vynaložené na zavádění automatizace byly vynaloženy efektivně a aby přínosy z automatizace byly efektivní.

Kontrolní otázky

1. Podejte charakteristiku mechanizace a automatizace.
2. Čím se zabývá věda kybernetika?
3. Rozdělení kybernetiky.
4. Definujte pojem řízení.
5. Jak dělíme řízení podle toho, zda je či není přítomna zpětná vazba?
6. Jak dělíme řízení z technického hlediska přenosu informace?
7. Čím je charakterizováno logické řízení?
8. Podejte charakteristiku spojitého řízení.
9. Podejte charakteristiku diskrétního řízení (kdy mluvíme o diskrétním řízení?).
10. Co je to fuzzy řízení?

2. LOGICKÉ ŘÍZENÍ

Logické řízení je cílená činnost, při níž se logickým obvodem zpracovávají informace o řízeném procesu a podle nich ovládají příslušná zařízení tak, aby se dosáhlo předepsaného cíle.

Logický obvod je fyzikální systém, který lze charakterizovat logickými prvky propojenými mezi sebou logickými (dvouhodnotovými) veličinami.

2.1 Logické funkce

Spojitě veličiny, které jsou popsány spojitými proměnnými, mohou nabývat nekonečného počtu hodnot. V této kapitole se budeme zabývat **logickými veličinami** nebo **logickými proměnnými**, které mohou nabývat konečného počtu hodnot. Na nich je založena **logická algebra**, tj. soustava pravidel, určených k popisu vztahů mezi logickými proměnnými. Tato pravidla popisují nejčastěji **logické operace** – vlastní úkony logické algebry.

Zvláštním druhem logických proměnných jsou **dvouhodnotové proměnné** – **dvouhodnotové veličiny**, nabývající pouze dvou možných hodnot, nejčastěji označované jako 0 a 1. To jsou také nejčastěji se vyskytující logické veličiny v technice: napětí není – napětí je, součástka není zmagnetována – součástka je zmagnetována, vrták není zlomen – vrták je zlomen, motor neběží – motor běží atd. Logická algebra, založená na dvouhodnotových veličinách se také nazývá **Booleova algebra** (G.Boole, 1815 – 1864, irský matematik). Vedle této algebry ale je na dvouhodnotových logických veličinách založena i jiná algebra, s kterou se rovněž v příštích kapitolách seznámíme. V dalším budeme zaměňovat pojmy dvouhodnotový a logický ve smyslu dvouhodnotový (logická funkce = dvouhodnotová funkce, logický obvod = dvouhodnotový obvod ...).

Logickou funkci

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

definujeme jako přiřazení hodnot 0 a 1 **logické** (dvouhodnotové) **proměnné** y ke kombinacím hodnot **nezávislých logických proměnných** $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Logické funkce mohou být funkce jedné proměnné

$$y = f(x) \quad (2.2)$$

funkce dvou proměnných

$$y = f(x_1, x_2) \quad (2.3)$$

a funkce tří a obecně více proměnných – rovnice (2.1).

Nejjednodušší případ jsou logické funkce jedné proměnné. Jsou v podstatě čtyři a jejich pravdivostní tabulky (tento pojem bude blíže vysvětlen později) jsou v tab. 2.1. První funkce

y	x	y	x	y	x	y	x
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
<i>falsum</i>		<i>negace</i>		<i>asefce</i>		<i>verum</i>	

Tab. 2.1

Logické funkce jedné proměnné

je pro libovolné x rovna 0 a nazývá se **falsum**. Druhá má vždy opačnou hodnotu y než x a nazývá se **negace**. Je poměrně důležitá a má speciální označení

$$y = \bar{x} \quad (2.4)$$

(čti *non x*). Třetí funkce má pro y vždy stejnou hodnotu jako je x a nazývá se aserce (opakování). Čtvrtá funkce má y stále rovno 1 pro všechna x a nazývá se verum. Avšak praktický význam má pouze jedna funkce ze čtyř funkcí jedné proměnné a tou je **negace** a ta patří k nedůležitějším logickým funkcím.

Nyní se budeme zabývat logickými funkcemi dvou proměnných. Je jich celkem 16, jak je

1.falsum nulová fce	2.konjunkce log.součin	3.inhibice	4.aserce opakování	5.inhibice	6.aserce opakování	7.dilema	8.disjunkce log.součet
y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1
0 1 0	0 1 0	1 1 0	1 1 0	0 1 0	0 1 0	1 1 0	1 1 0
0 1 1	1 1 1	0 1 1	1 1 1	0 1 1	1 1 1	0 1 1	1 1 1
9.negace log.součtu	10.ekvivalence	11.negace	12.implikace	13.negace	14.implikace	15.negace log.součinu	16.verum jedn.funkce
y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2	y x_1 x_2
1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0
0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1
0 1 0	0 1 0	1 1 0	1 1 0	0 1 0	0 1 0	1 1 0	1 1 0
0 1 1	1 1 1	0 1 1	1 1 1	0 1 1	1 1 1	0 1 1	1 1 1

Tab. 2.2

Logické funkce dvou proměnných

vidět z tab. 2.2. Všech 16 funkcí se opět nepoužívá, používají se běžně pouze čtyři a to:

- konjunkce (logický součin) – č.2
- disjunkce (logický součet) – č.8
- negace logického součtu (NOR) – č.9
- negace logického součinu (NAND) – č.15

Přitom se na funkci negace budeme dále dívat jako na funkci jedné proměnné, neboť jsme si všimli, že u funkcí dvou proměnných se jednalo vždy o negaci pouze jedné z nich.

Pokud nás zajímají funkce tří a více proměnných, opakují se funkce dvou proměnných, rozšířené na tři a více proměnných a to nám při znalosti funkcí dvou proměnných nebude dělat potíže.

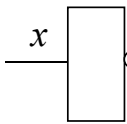
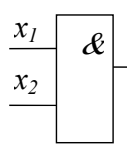
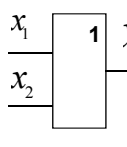
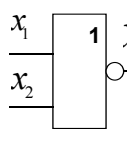
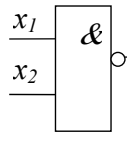
V tab. 2.3 máme shrnuty funkce, které budeme v dalším používat. Je to **negace**, jako funkce jedné proměnné a **konjunkce**, **disjunkce**, **NOR** a **NAND** jako funkce dvou proměnných (s tím, že všechny tyto funkce lze bez potíží – jak uvidíme – rozšířit na tři a více proměnných). Ještě si řekneme základní charakteristiky čtyř základních funkcí dvou proměnných.

Konjunkce (logický součin – **AND** z angl.) je charakterizována tím, že funkční hodnota y nabývá jedničky pouze tehdy, když obě proměnné x_1 , x_2 (obecně všechny proměnné) jsou jedničky.

Disjunkce (logický součet – **OR** z angl.) je charakterizována tím, že funkční hodnota y nabývá jedničky tehdy, když alespoň jedna z proměnných x_1 , x_2 (obecně ze všech proměnných) je jednička.

Negace logického součtu (NOR, negace disjunkce – někdy též Pierceova funkce) je charakterizována tím, že funkční hodnota y je jednička, když žádná z proměnných x_1 , x_2 (obecně když žádná z proměnných) není jednička.

Negace logického součinu (NAND, negace konjunkce – někdy též Shefferova funkce) je charakterizována tím, že funkční hodnota y nabývá jedničky tehdy, když proměnné x_1, x_2 (obecně všechny proměnné) nejsou současně jedničky.

název funkce	synonymní název	algebraický zápis	schémat.značka	pravdiv. tabulka															
negace	NON	$y = \bar{x}$		<table><tr><th>y</th><th>x</th></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	y	x	1	0	0	1									
y	x																		
1	0																		
0	1																		
konjunkce	logický součin AND	$y = x_1 \cdot x_2$		<table><tr><th>y</th><th>x₁</th><th>x₂</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	y	x ₁	x ₂	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
y	x ₁	x ₂																	
0	0	0																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	1	1																	
disjunkce	logický součet OR	$y = x_1 \vee x_2$		<table><tr><th>y</th><th>x₁</th><th>x₂</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	y	x ₁	x ₂	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
y	x ₁	x ₂																	
0	0	0																	
1	0	1																	
1	1	0																	
1	1	1																	
negace disjunkce	NOR	$y = \overline{x_1 \vee x_2}$		<table><tr><th>y</th><th>x₁</th><th>x₂</th></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	y	x ₁	x ₂	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
y	x ₁	x ₂																	
1	0	0																	
0	0	1																	
0	1	0																	
0	1	1																	
negace konjunkce	NAND	$y = \overline{x_1 \cdot x_2}$		<table><tr><th>y</th><th>x₁</th><th>x₂</th></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	y	x ₁	x ₂	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
y	x ₁	x ₂																	
1	0	0																	
1	0	1																	
1	1	0																	
0	1	1																	

Tab. 2.3.

Základní logické funkce a jejich vyjádření

Logické funkce můžeme vyjádřit

Booleovými funkcemi – to je **negací, konjunkcí a disjunkcí**

funkcemi NAND – stačí jediná funkce

funkcemi NOR – opět stačí jediná funkce

Podle toho, které vyjádření zvolíme, mluvíme o Booleově algebře, NAND algebře nebo NOR algebře.

Základní je vyjádření Booleovými funkcemi – pro vyjádření logické funkce potřebujeme tři základní funkce a při realizaci této funkce potřebujeme tři druhy logických prvků. Pokud se rozhodneme pro vyjádření logické funkce základní funkcí NAND nebo funkcí NOR, vystačíme s jedním druhem základní funkce a při realizaci potřebujeme pouze jeden druh logických prvků.

2.2 Booleova algebra

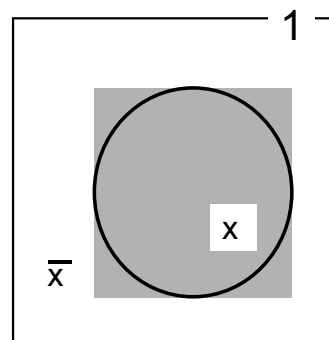
Používá tři základní funkce a to negaci, konjunkci a disjunkci. Základním požadavkem je každou logickou funkci minimalizovat, to je vyjádřit ji co nejmenším počtem základních logických funkcí. Tím se při realizaci spotřebuje nejmenší počet logických prvků a technická realizace vyjde nejjednodušší a neekonomičtější (a tím také se zvýší její spolehlivost).

Logické funkce můžeme znázorňovat pomocí Vennových diagramů, známých z množinového počtu. Jsou názorné, a proto je použijeme pro znázornění logických funkcí a pro operace s nimi a ujasníme si na nich platnost základních pravidel Booleovy algebry.

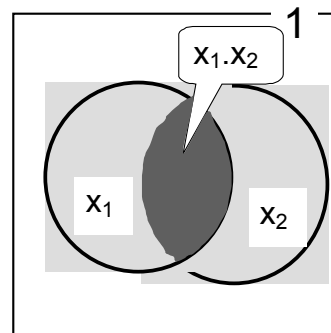
Obdélník na obr. 2.1 představuje universální množinu, universum a přiřadíme mu hodnotu logické jedničky. Množina x (proti běžnému zvyku zde budeme označovat množiny malým písmenem) je dána vnitřními body uzavřené křivky. Prvky nepatřící do množiny x vyjadřují funkci negace $\bar{x}$ a představují body vně křivky.

Na obr. 2.2 je znázorněna množina představující funkci logického součinu $x_1 \cdot x_2$, která obsahuje prvky jak množiny x_1 tak i množiny x_2 současně a je to průnik obou těchto množin. Naopak na obr. 2.3 je znázorněna množina, sjednocující obě množiny x_1 , x_2 , obsahující prvky buď z množiny x_1 nebo z množiny x_2 a tato množina je sjednocení obou množin a představuje funkci logického součtu $x_1 \vee x_2$.

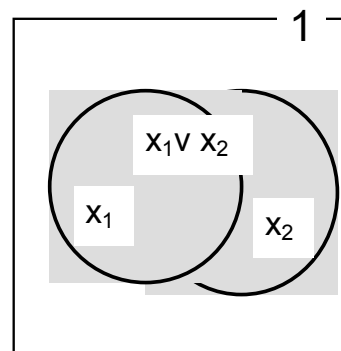
K zjednodušování čili k minimalizaci logických funkcí používáme základní pravidla Booleovy algebry, se kterými se teď seznámíme.



Obr. 2.1 Negace



Obr. 2.2 Log.součin



Obr. 2.3 Log.součet

vyloučení třetí

$$x \vee \bar{x} = 1 \quad (2.5)$$

logický rozpor

$$x \cdot \bar{x} = 0 \quad (2.6)$$

dvojitá negace

$$\bar{\bar{x}} = x \quad (2.7)$$

opakování

$$x \vee x = x$$

$$x \cdot x = x \quad (2.8)$$

Tyto čtyři zákony jsou logické a snadno si je představíme podíváme-li se na diagram na obr. 2.1. Leží-li něco uvnitř kruhu, má příslušná proměnná hodnotu x . Mimo kruh má hodnotu $\bar{x}$. Pokud něco leží buď uvnitř kruhu anebo vně kruhu, leží to v universu a logická proměnná této funkce má hodnotu 1 (zákon vyloučení třetího): $x \vee \bar{x} = 1$.

Aby něco leželo současně v kruhu a vně kruhu není možné a logická proměnná, která vyjadřuje hodnotu této funkce nabývá hodnoty 0 (zákon logického rozporu): $x \cdot \bar{x} = 0$.

Jestliže je hodnota logické proměnné uvnitř kruhu rovna x , je mimo kruh rovna $\bar{x}$. Ale mimo tuto oblast má hodnotu $\bar{\bar{x}}$ a to je opět hodnota proměnné v kruhu, a tedy je rovna x (zákon dvojitá negace): $\bar{\bar{x}} = x$.

Jestliže něco leží v kruhu nebo v kruhu, pak to leží samozřejmě v kruhu. Podobně leží-li něco v kruhu a současně v kruhu, zase to nemůže ležet jinde než v kruhu (zákony opakování).

Nyní si uvedeme zbývající zákony Booleovy algebry. Jejich pochopení je pro další práci velmi důležité. Umožňují nám pracovat s algebraickými výrazy, upravovat je a minimalizovat. Grafické objasnění některých typických z těchto zákonů je na obr. 2.4. Tam jsou uvedeny Vennovy diagramy, které umožňují pochopení zákonů Booleovy algebry.

$$\text{komutativní zákony} \quad \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \quad (2.9)$$

$$\text{asociativní zákony} \quad \mathbf{x}_1 \vee (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_1 (\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \quad (2.10)$$

$$\text{distributivní zákony} \quad \mathbf{x}_1 (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_3) \quad (2.11)$$

$$\text{absorpční zákony} \quad \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 \quad (2.12)$$

$$\text{neutrálnost } 0 \text{ a } 1 \quad 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \cdot 1 = \mathbf{x} \quad (2.13)$$

$$\text{agresivnost } 0 \text{ a } 1 \quad 1 \vee \mathbf{x} = 1 \quad \mathbf{x} \cdot 0 = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{De Morganovy zákony} \quad \overline{\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2} = \overline{\mathbf{x}_1} \cdot \overline{\mathbf{x}_2} \quad \overline{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2} = \overline{\mathbf{x}_1} \vee \overline{\mathbf{x}_2} \quad (2.15)$$

De Morganovy zákony jsou velmi důležité, uplatní se zejména v budoucím převádění Booleovy algebry na NAND nebo NOR algebru. Budeme je používat ve tvaru, který z rovnic (2.15) dostaneme negací (obě rovnice (2.15) – negace levé strany rovná se negace pravé strany) :

$$\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \overline{\overline{\mathbf{x}_1} \cdot \overline{\mathbf{x}_2}} \quad \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \overline{\overline{\mathbf{x}_1} \vee \overline{\mathbf{x}_2}} \quad (2.16)$$

Napišme si tyto rovnice ještě jednou, (např. pro tři proměnné, které označíme a, b, c), poněvadž je budeme v budoucnu velmi často používat:

$$\boxed{a \vee b \vee c = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}}} \quad \boxed{a \cdot b \cdot c = \overline{\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}}} \quad (2.17)$$

V dalším se budeme zabývat minimalizací logických funkcí. Nejjednodušší je použití těchto pravidel Booleovy algebry a úprava výrazů tak dlouho, dokud nedostaneme nejkratší výraz. Většinou je to však příliš pracná metoda, zvláště když se jedná o složitější výrazy, ani vždycy nedostaneme minimální tvar, protože nevíme, kdy je nejkratší, kdy je minimální. Hodně zde záleží na praxi a technické dovednosti. Proto se obvykle minimalizace neprovádí tímto způsobem, ale většinou použitím Karnaughovy mapy (bude vysvětleno v dalším).

Příklad 2.1: Minimalizujte logickou funkci $y = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$

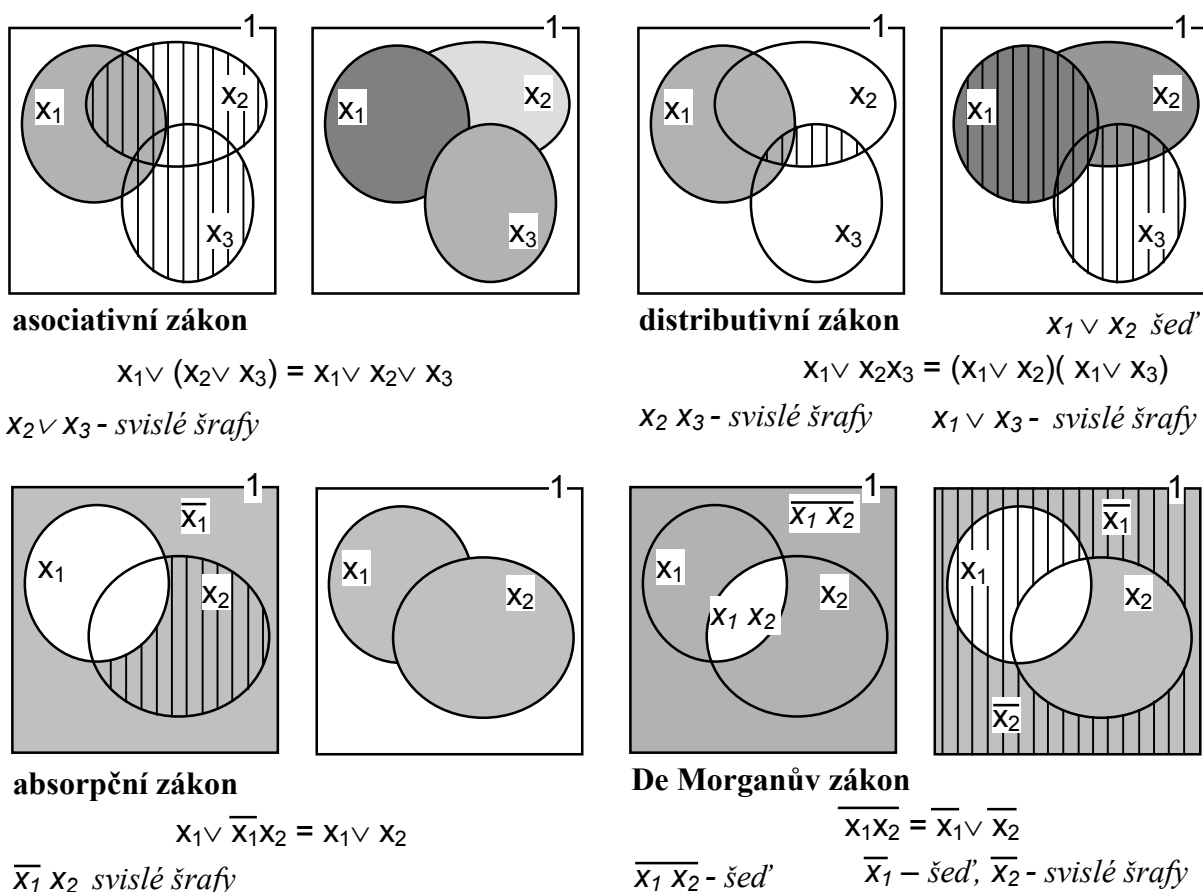
Řešení: Z 2. a 3. členu vytkneme $x_1 \bar{x}_2$ a z 4. a 5. členu vytkneme $x_1 x_2$

$$y = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) =$$

Výrazy v závorkách jsou podle zákona vyloučeného třetího (2.5) rovny jedné. Potom z 2. a 3. členu vytkneme x_1 a výraz v závorce je ze stejného důvodu opět roven jedné.

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 (\bar{x}_2 \vee x_2) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 = x_1 \vee x_2 x_3$$

Použili jsme absorpční zákon (2.12), podle kterého je $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2$ a tím jsme dostali konečný výsledek.



Obr. 2.4 Grafické zdůvodnění zákonů logické algebry

Příklad 2.2: Minimalizujte logickou funkci $y = \overline{x_1 x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_3 x_4} \vee \overline{x_2 x_3 x_4}$

Řešení: Podle De Morganova zákona (2.15) převedeme negaci logických součinů na součet negací

$$y = x_1(\overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) =$$

Výraz v první závorce roznásobíme, zbylé dvě závorky není potřeba uvádět.

$$= x_1 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} = (x_1 \vee 1) \overline{x_3} \vee (x_1 \vee 1) \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} =$$

Podle zákona agresivnosti 0 a 1 (2.14) $1 \vee x = 1$ jsou výrazy v závorkách rovny jednotce. Podle zákona opakování (2.8) je $x \vee x = x$ a tedy

$$= \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

Výsledný vztah jsme opět dostali aplikací již vzpomínaného De Morganova zákona (2.15).

Příklad 2.3: Minimalizujte logickou funkci $y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$

Řešení: Tento a následující příklad je už bez bližšího komentáře. Hlavně zde používáme absorpční zákon (2.12) $x_1 \vee \overline{x_1} x_2 = x_1 \vee x_2$

$$\begin{aligned} y &= \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 (\overline{x_3} \vee x_3) = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 (\overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_2) = \\ &= \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 (\overline{x_3} \vee x_2) = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 = x_2 (\overline{x_1} \overline{x_3} \vee x_1) \vee x_1 \overline{x_3} = x_2 (\overline{x_3} \vee x_1) \vee x_1 \overline{x_3} \end{aligned}$$

Příklad 2.4: Minimalizujte logickou funkci $y = \overline{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2}$

Řešení: Použití De Morganových zákonů, v závěru použit zákon logického rozporu (2.6) $x \cdot \bar{x} = 0$
 $y = \overline{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2} = \overline{x_1 x_2} \cdot \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2) = \bar{x}_1 x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_1 \vee \bar{x}_2 x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_1$

2.3 Vyjádření Booleových funkcí

Pomineme-li slovní zadání, pak nejčastěji používané prostředky pro vyjádření Booleových funkcí jsou

-pravdivostní tabulka
 -algebraický výraz

-Karnaughova mapa (eventuálně jiné mapy)
 -blokové schéma

Základní formou popisu logické funkce je popis pravdivostní tabulkou, se kterou jsme se již setkali. Do tabulky se zapíší všechny možné kombinace hodnot nezávisle proměnných, pro které je funkce definovaná a jim odpovídající funkční hodnota (hodnota závisle proměnné). Je zvykem psát pořadí kombinací nezávisle proměnných po sobě v dvojkové soustavě.

y	x ₁	x ₂	x ₃
0	0	0	0
0	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Tab. 2.4

Příkladem je pravdivostní tabulka v tab. 2.4. Můžeme si jako příklad představit žárovku, která má dva stavy, svítí a nesvítí. Nechť je zapínána a zhasínána třemi dvoupolohovými přepínači x_1, x_2, x_3 , každý z nich o dvou stavech 0 a 1. Z daného zapojení můžeme vysledovat, při jaké kombinaci stavů přepínačů žárovka svítí anebo nesvítí. Přiřadíme-li stavu $y=1$ stav, kdy žárovka svítí a $y=0$, kdy nesvítí, můžeme funkci zapojení žárovky a přepínačů popsat pravdivostní tabulkou tab. 2.4.

Nyní si ukažme, jak přecházíme od pravdivostní tabulky k algebraickému zápisu logické funkce. Každou logickou funkci můžeme algebraicky vyjádřit jako logický součet logických součinů. V pravdivostní tabulce postupujeme po řádcích a uvažujeme pouze ty, ve kterých funkční hodnota y nabývá hodnoty 1. Každému takovému řádku odpovídá jeden součtový člen, který má tolik činitelů v součinu, kolik je vstupních logických proměnných. Vstupní proměnná, která má v příslušném řádku hodnotu 1 je zastoupena přímo, která má hodnotu 0, je zastoupena svou negací. Celá logická funkce je potom vyjádřena logickým součtem takových výrazů, pro které má závisle proměnná jednotkovou hodnotu.

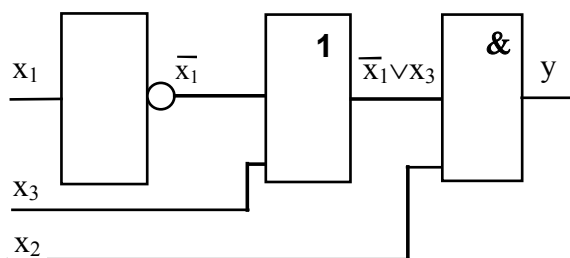
Tak funkce daná tabulkou tab. 2.4 bude vyjádřena algebraickým výrazem

$$y = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Tento výraz jistě dovedeme upravit a zjednodušit. Ale tomuto tvaru logické funkce, který sestává z logického součtu logických součinů základních nezávisle proměnných, se říká **úplná normální disjunktivní forma** (ÚNDF). Je to jedno z důležitých vyjádření Booleových funkcí a je základem pro popis logické funkce Karnaughovou mapou. Ke Karnaughovým mapám se dostaneme brzy, ale zatím ještě tento výraz upravíme – použijeme pravidlo opakování (2.8)

$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 :$$

$$\begin{aligned} y &= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee (x_1 \vee \bar{x}_1) x_2 x_3 = \\ &= \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 = (\bar{x}_1 \vee x_3) x_2 \end{aligned}$$



Obr. 2.5 Blokové schéma

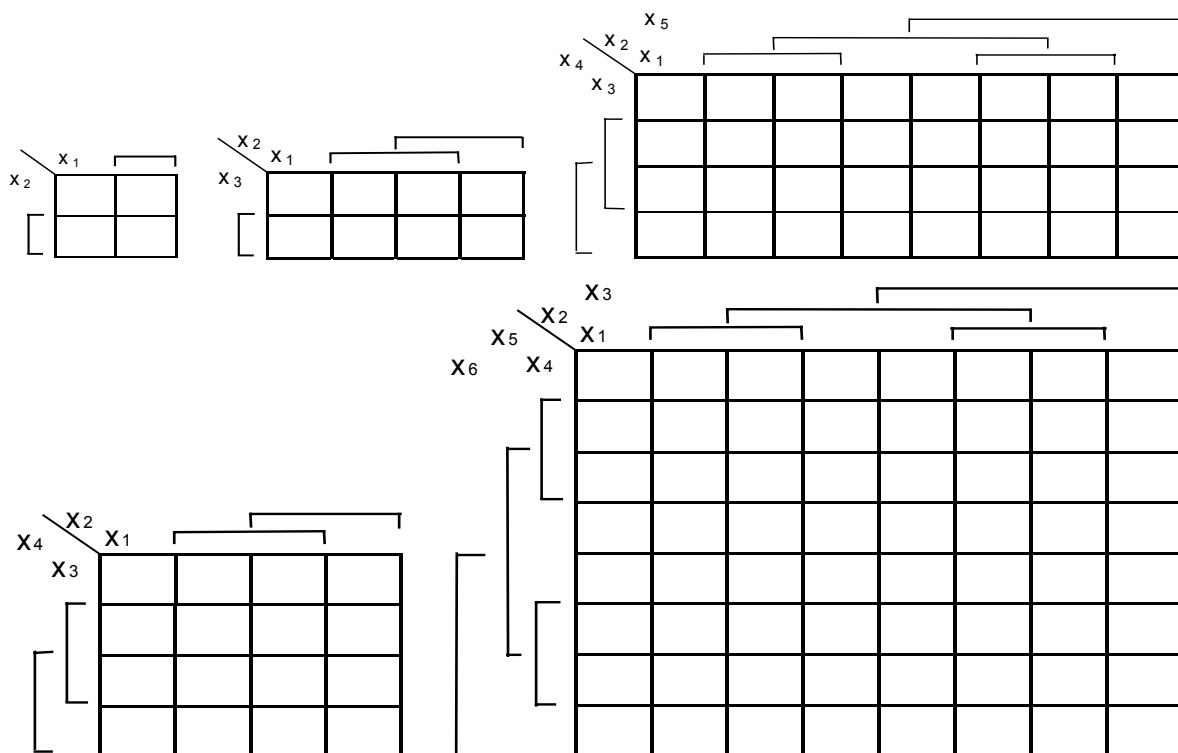
K tomuto výrazu nakresleme blokové schéma. V tab. 2.3 jsme měli uvedeny schematické značky pro jednotlivé logické funkce. Předpokládáme Booleovu algebru a uvažujeme tři funkce: konjunkci, disjunkci a negaci. Schéma odpovídající tomuto výrazu je na obr. 2.5.

Ted' už zbývá se seznámit s posledním druhem vyjádření Booleových funkcí a to Karnaughovými mapami (M. Karnaugh,

*1924, americký matematik). Tyto slouží nejenom k jejich vyjádření, ale především k jejich minimalizaci. Ale tu zatím neuvažujme a mluvmé pouze o vyjádření logických funkcí Karnaughovými mapami.

Mapa je tabulka, která má tolik políček, kolik je kombinací proměnných vyšetřované funkce. Funkci s n proměnnými tedy vyjadřujeme mapou s 2^n políčky. Každé políčko odpovídá jedné z možných kombinací a zapisujeme do něj odpovídající funkční hodnotu. Podle kódu, kterým přiřazujeme políčka jednotlivým kombinacím proměnných, rozlišujeme různé mapy. Nejznámější je Karnaughova mapa. **U ní se sousední políčka od sebe liší hodnotou jediné proměnné.** Na obr. 2.6 je jako příklad uvedena Karnaughova mapa pro logickou funkci tří proměnných podle tab. 2.4. Budeme se držet nejčastějšího způsobu značení map, podle kterého **řádky nebo sloupce, ve**

Obr. 2.6 Karnaughova mapa



Obr. 2.7 Karnaughovy mapy pro logické funkce dvou až šesti proměnných

kterých je příslušná proměnná rovna jednotce, označujeme vedle mapy svislou nebo vodorovnou čarou, ke které přepíšeme jméno příslušné logické proměnné. V řádcích nebo sloupcích, které nejsou takto označeny, je příslušná logická proměnná rovna nule. Je možno si všimnout, že mapa dodržuje pravidlo Karnaughových map, podle kterého se sousední políčka liší změnou hodnoty jediné proměnné. Zapsání funkce do mapy je jednoduché a spočívá v přepsání funkčních hodnot do příslušných políček. Nulu jako funkční hodnotu nepíšeme. Vycházet můžeme jak z pravdivostní tabulky, tak z algebraického výrazu, který je ve tvaru úplné normální disjunktční formy.

Karnaughovy mapy logických funkcí dvou až šesti proměnných jsou uvedeny na obr. 2.7.

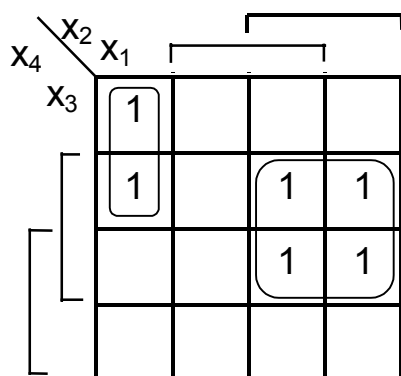
2.4 Minimalizace logických funkcí

K dané logické funkci existuje několik různých tvarů. Všechny jsou matematicky rovnocenné, protože představují stejnou funkční závislost i když mohou být tvarově značně odlišné. Nejsou však rovnocenné z hlediska technického a ekonomického. Pro technickou realizaci je nutno vždy funkci upravit do nejjednoduššího tvaru – minimalizovat ji. Minimalizací funkce dosáhneme toho, že při její realizaci budeme potřebovat nejmenší počet logických prvků (negací, konjunkcí, disjunkcí). Tím se logický obvod stane jednoduchým, samozřejmě také levnějším z hlediska ekonomického a spolehlivějším.

Pro minimalizaci existuje řada metod. S jednou z nich jsme se již seznámili. Je to **algebraická minimalizace**. Logickou funkci zjednodušujeme aplikací různých pravidel Booleovy algebry až na minimální výraz. Metoda je značně pracná, nikdy si nejsme stoprocentně jisti, že daný výraz je už ten minimální. Naprosto se nehodí pro složitější funkce více proměnných.

Druhá metoda minimalizace je použití **Karnaughovy mapy**. Zatím jsme se seznámili s Karnaughovými mapami jako nástrojem pro vyjádření neboli pro popis funkce. Ale jejich hlavní význam je právě aplikace pro minimalizaci logických funkcí. To je umožněno základní vlastností Karnaughovy mapy a to, že se dvě sousední políčka mapy liší v hodnotě pouze jedné proměnné.

Minimalizace pomocí Karnaughovy mapy bude spočívat v opačném postupu než při sestavování mapy, a to nalezením algebraického tvaru funkce, zadané mapou. Budeme postupovat tak, že sousední políčka mapy, která obsahují jednotku jako funkční hodnotu, budeme sdružovat do dvojic, čtveřic, osmic, šestnáctic atd. Podle Karnaughovy mapy na obr. 2.8 zjistíme, že při zakroužkování dvou sousedních jedniček je odpovídající algebraická funkce



Obr. 2.8 Minimalizace

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 (\bar{x}_3 \vee x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

Uvažujeme-li zakroužkované čtyři sousední jedničky, odpovídá jim funkce

$$y = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = (x_1 \vee \bar{x}_1) x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee (x_1 \vee \bar{x}_1) x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 (\bar{x}_4 \vee x_4) = x_2 x_3$$

V odpovídající logické funkci chybí ta hodnota, která v příslušné dvojici, čtveřici, osmici, ... mění svoji hodnotu. V prvním případě to byla proměnná x_1 , v druhém případě u

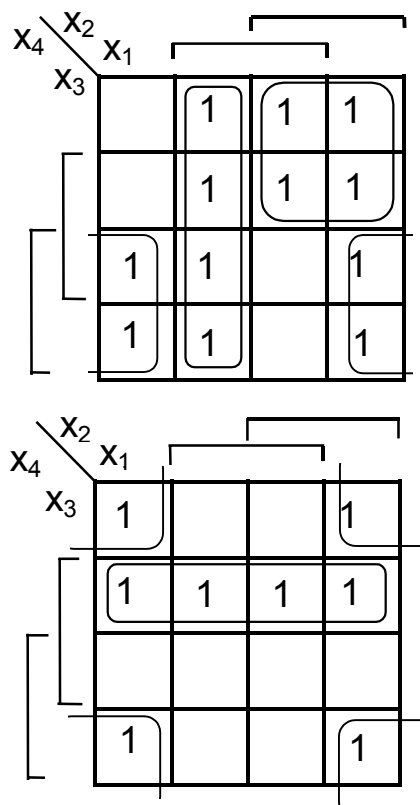
čtyřech sousedních políček jsou to proměnné x_1, x_4 . Byly to samozřejmě ty proměnné, které byly v závorce ve smyslu proměnná nebo její negace a tato závorka se rovnala jedničce podle zákona vyloučeného třetího. A to bylo zapříčiněno vlastností Karnaughovy mapy, že se dvě sousední políčka liší pouze v hodnotě jedné proměnné.

Sloučením dvou sousedních jednotkových políček vyloučíme jednu proměnnou, sloučením čtyř políček vyloučíme dvě proměnné, sloučením osmi políček tři proměnné atd. Teď zbývá ještě říci, co rozumíme pojmem sousední políčka v Karnaughově mapě, což je poněkud složitější, než se jeví na první pohled.

Sousednost políček v Karnaughově mapě.

Sousedními jsou např. i políčka na protilehlých okrajích mapy. Snad pomůže představa, že mapu „srolujeme“, že bude levý okraj sousedit s pravým a současně dolní s horním. Dvojice mohou být svislé i vodorovné. Čtveřice mohou být dvě a dvě jedničky pod sebou, ale také vodorovně čtyři jedničky vedle sebe anebo svisle pod sebou. Osmice mohou být 1 krát 8 vodorovně či svisle, 2 krát čtyři vodorovně či svisle, ... Dále nesmíme zapomenout na rohové čtveřice, osmice apod.

Příklady všech těchto čtveřic jsou na obr. 2.9.



Obr. 2.9 Sousednost

Základní pravidla pro minimalizaci logických funkcí Karnaughovými mapami – jak provést seskupení jedniček v mapě do izolovaných jedniček, dvojic, čtveřic, ...

- Všechny jedničky v mapě musí být zakroužkovány, žádnou nesmíme vynechat
- Každá jednička se může při kroužkování vzít několikrát, může být součástí dvojice, čtveřice, ... (to umožňuje zákon opakování $x \vee x \vee x \vee \dots = x$)
- Přednost mají ... osmice před čtveřicemi, čtveřice před dvojicemi a dvojice před izolovanými jedničkami
- V rámci pravidla podle kterého žádnou jedničku nesmíme vynechat, se snažíme o co nejmenší počet smyček

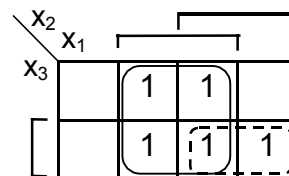
Příklad 2.5: Karnaughovou mapou minimalizujte logickou funkci z příkladu 2.1

$$y = \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3$$

Řešení: Nakreslíme Karnaughovu mapu pro tři proměnné – obr. 2.10 a napíšeme jedničky do příslušných políček. Zakroužkujeme jednoznačně jednu čtveřici a jednu dvojici. Výsledek

$$y = x_2x_3 \vee x_1$$

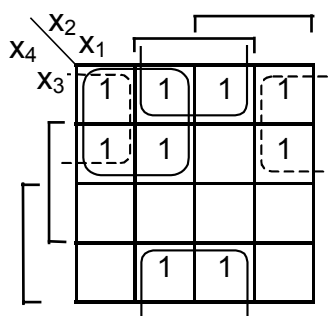
je ve shodě s řešením příkladu 2.1.



Obr. 2.10

Příklad 2.6: Minimalizujte logickou funkci čtyř proměnných danou pravdivostní tabulkou uvedenou v tab. 2.5.

Řešení: Na obr. 2.11 je nakreslena příslušná Karnaughova mapa. Podle jednoho z pravidel minimalizace mají přednost čtveřice před dvojicemi a dvojice před izolovanými jedničkami. Proto se jako nejlepší řešení jeví zakreslit tři čtveřice jak je vidět z obrázku. Odpovídající logická funkce pak je



Obr. 2.11

$$y = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4$$

Poznámka: Při řešení praktických úloh se často stává, že logická funkce je definována pouze v některých kombinacích vstupních proměnných, zatím co na funkčních hodnotách zbývajících kombinací nezáleží. Jsou to tzv. neurčené stavy. Mimo stavy, kdy na funkční hodnotě nezáleží, jsou to také kombinace vstupních proměnných, které se z nějakých důvodů nemohou vyskytnout (jsou fyzikálně nedostupné, nebo „zakázané“). Hodnota v neurčeném stavu může být dodefinována libovolně. Odpovídající čtvereček

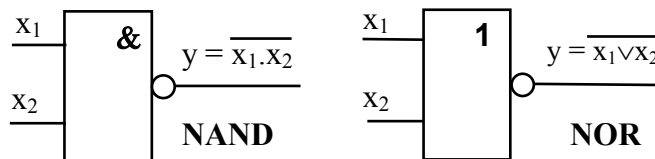
v Karnaughově mapě při minimalizaci označíme x a můžeme pak ho nahradit 1 nebo 0 , co je v daném okamžiku výhodnější, abychom získali minimální tvar.

y	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	1	1

Tab. 2.5

2.5 Realizace logických funkcí prvky NAND a NOR

Při navrhování logických obvodů se často používají prvky NAND (negace logického součinu) a NOR (negace logického součtu), protože tyto prvky jsou snadno dostupné v širokém sortimentu a snadno se realizují. Výhodou oproti Booleovým prvkům je, že k realizaci používáme pouze jeden druh prvků, a to buď NAND anebo NOR.



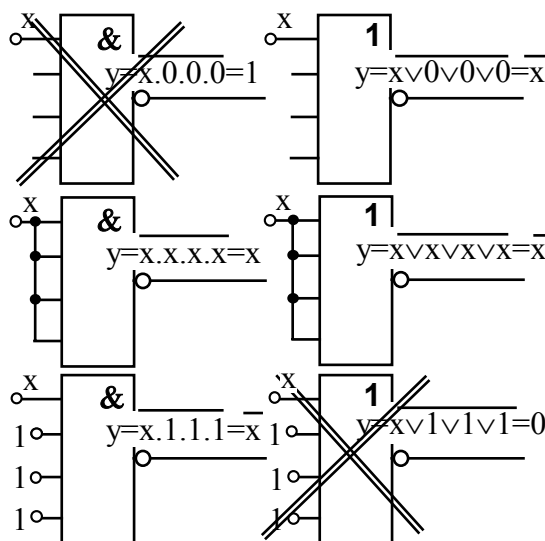
Obr. 2.12 Prvky NAND a NOR

Nejdříve si podle obr. 2.12 ujasněme funkci těchto prvků a které logické funkce realizují. To je z předcházejícího kontextu a z obrázku jasné.

Nyní si ještě řekněme, jak se realizuje logická funkce negace pomocí prvku NAND nebo NOR. Většinou mají prvky NAND a NOR tři nebo čtyři vstupy. Při realizaci můžeme volné vstupy

1. ponechat volné (což je totožné jako připojit logickou 0)
2. všechny spojit (proletovat) s jedním vstupem na který přivádíme x
3. připojit na ně logickou hodnotu 1

Podle obr. 2.13 vidíme, že při vytváření negace z prvků NAND je možné použít varianty 2 a 3, tedy propojit všechny vstupy anebo připojit na ně hodnotu 1 , ale nesmíme je ponechat



Obr. 2.13 Realizace negace prvky NAND a NOR

volné. Při vytváření negace z prvků NOR můžeme použít varianty 1 a 2, tedy ponechat nepoužité vstupy volné anebo je propojit, ale nesmíme na ně připojit hodnotu 1.

A nyní už na konkrétním příkladu ukážeme realizaci logického obvodu buď prvky NAND nebo prvky NOR.

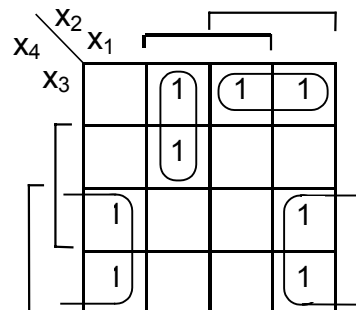
y	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	0	1
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	1	1

Tab. 2.6

Příklad 2.7: Navrhněte realizaci logické funkce, dané pravdivostní tabulkou tab. 2.6

- Booleovými prvky
- prvky NAND
- prvky NOR

Řešení: Nejdříve danou logickou funkci pomocí Karnaughovy mapy minimalizujeme. Karnaughova mapa je na obr. 2.14. Podle pravidel minimalizace zakroužkujeme jednu čtveřici a dvě dvojice. Tím dostáváme minimalizovanou logickou funkci vyjádřenou Booleovými prvky



Obr. 2.14

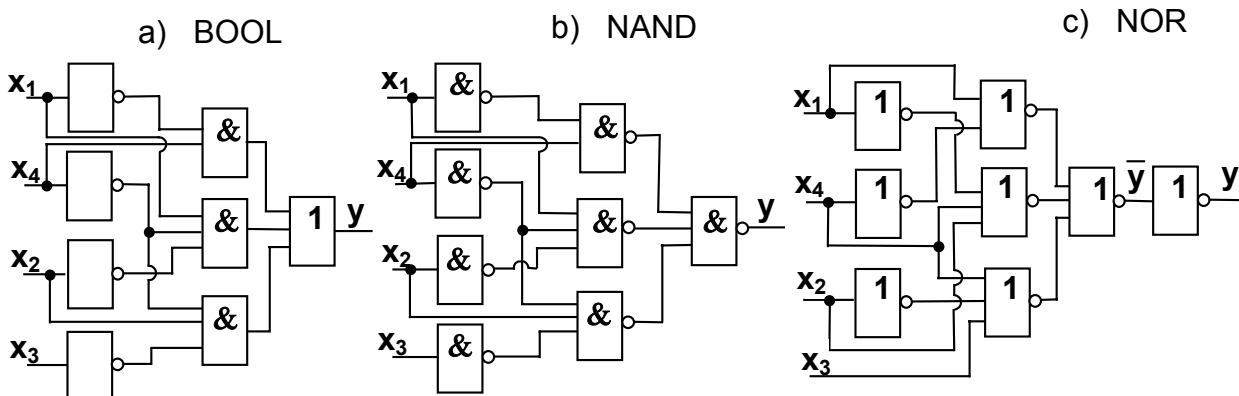
$$a) y = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_4$$

Z této funkce přímo nakreslíme blokové logické schéma pro realizaci Booleovými prvky – je na obr. 2.15a. Pak tuto funkci převedeme pomocí De Morganových zákonů (2.17) na funkci vhodnou pro realizaci prvky NAND nebo prvky NOR.

$$b) y = \overline{\bar{x}_1 x_4 \cdot x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \cdot x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4}$$

$$c) y = \overline{x_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4} \quad \bar{y} = \overline{x_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4} \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4$$

Prvním z těchto zákonů provedeme převod na realizaci prvky NAND a druhým z nich na realizaci prvky NOR. Ovšem prvky NOR není možné realizovat logickou funkcí $y = a \vee b \vee c$, ale musíme celou rovnici (pravou i levou stranu) negovat $\bar{y} = \overline{a \vee b \vee c}$ a pokud pak chceme y na výstupu, musíme zařadit negaci. Bloková schémata na obr. 2.15 ukazují již zmíněnou realizaci Booleovými prvky na obr. 2.15a, prvky NAND na obr. 2.15b a prvky NOR na obr. 2.15c. Z obr. 2.15 si můžeme udělat také představu o tom, kolik prvků je na jednotlivé realizace zapo-



Obr. 2.15

třebí. V případě Booleových prvků by bylo potřeba 4 negátorů, 3 součtových členů a 1

součinu, tj. celkem 8 prvků. V případě realizace prvky NAND by bylo zapotřebí 8 prvků NAND, v případě realizace prvky NOR bude potřebí 8 prvků NOR. Tedy v úhrnu potřebujeme pro jednotlivé realizace stejný počet prvků, výhodou u prvků NAND a NOR je, že využíváme prvky stejného typu.

2.6 Logické řídicí obvody

Na praktických příkladech si ukážeme využití logických obvodů v automatizaci. Logické obvody rozdělujeme podle chování na

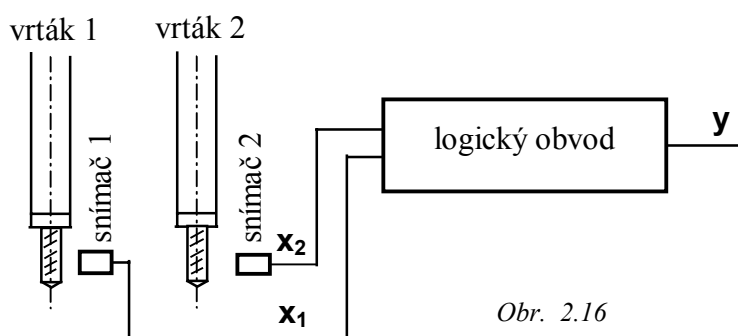
- kombinační
- sekvenční (a tyto ještě na synchronní a asynchronní)

U **kombinačních obvodů** jsou funkční hodnoty jednoznačně určeny kombinacemi hodnot vstupních proměnných. To byly obvody, o kterých jsme dosud mluvili. U **sekvenčních obvodů** jsou funkční hodnoty určeny nejen kombinacemi hodnot vstupních proměnných, ale také jejich časově předcházejícími kombinacemi hodnot. Tyto předcházející hodnoty jsou v sekvenčních obvodech uchovávány do následujícího okamžiku v paměťové části obvodu. U **synchronních** sekvenčních obvodů je každá změna vstupních a výstupních proměnných řízena synchronizačními impulsy, které zajišťují stejné okamžiky změn všech proměnných. V **asynchronních** sekvenčních obvodech tomu tak není a změny jsou odvozeny od změn vstupních proměnných.

V dalším zůstaneme u kombinačních logických obvodů a teprve v posledním příkladu bude demonstrován jednoduchý sekvenční obvod, ale pouze v tom smyslu, abychom si udělali představu o tom, co sekvenční obvod je. Jinak problematika sekvenčních obvodů zůstane mimo oblast této publikace.

Příklad 2.8: Zlomení vrtáků.

Navrhněte logický obvod, který vysílá signál v případě poruchy, kdy dojde ke zlomení jednoho nebo obou vrtáků – obr. 2.16. U každého vrtáku jsou umístěny snímače, které vysílají trvale signál, dojde-li ke zlomení vrtáku.



Obr. 2.16

Řešení: Zavedeme hodnoty jednotlivých logických proměnných

$x_1 = \begin{matrix} 1 & \text{vrták 1 je zlomen} \\ 0 & \text{není zlomen} \end{matrix}$
 $x_2 = \begin{matrix} 0 & \text{vrták 2 je zlomen} \\ 0 & \text{není zlomen} \end{matrix}$
 $y = \begin{matrix} 1 & \text{vznikla porucha} \\ 0 & \text{bez závad} \end{matrix}$

y	x ₁	x ₂
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Pravdivostní tabulka tab. 2.7 odpovídá logické funkci

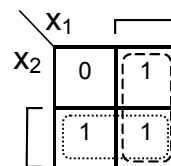
$$y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$$

Tuto funkci minimalizujeme

$$y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_1) x_2 \vee x_1 (\bar{x}_2 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$$

Tab. 2.7

Také jsme mohli provést minimalizaci použitím Karnaughovy mapy znázorněné na obr. 2.17. V každém případě se dostaneme k funkci logického součtu (disjunkce), která se realizuje jedním logickým prvkem, a tím je disjunkce.

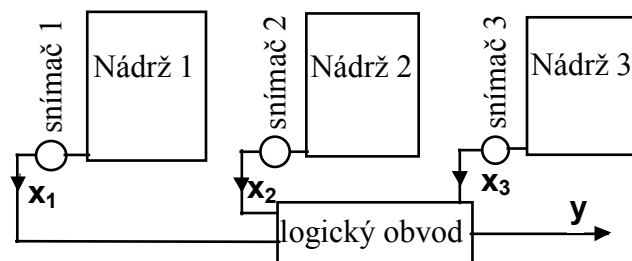


Obr. 2.17

Příklad 2.9: V dílně jsou tři nádrže provozního oleje – obr. 2.18. Jestliže dvě z nich jsou prázdné, musí se rozsvítit nápis DOPLNIT OLEJ!, aby obsluha provedla doplnění. Navrhněte příslušný logický obvod, sestavený

- z Booleových prvků
- z prvků NAND
- z prvků NOR.

Řešení: Nejdříve si zavedme proměnné, které budeme dále používat



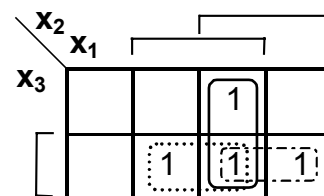
Obr. 2.18

y	x ₁	x ₂	x ₃
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Tab. 2.8

$x_{1,2,3} = \begin{cases} 1 & \text{příslušná nádrž je prázdná} \\ 0 & \text{není prázdná} \end{cases}$
 $y = \begin{cases} 1 & \text{svítí DOPLNIT OLEJ!} \\ 0 & \text{nesvítí} \end{cases}$

Sestavíme pravdivostní tabulku tab. 2.8 a podle ní sestavíme Karnaughovu mapu – je na obr. 2.19. Na Karnaughově mapě zakroužkujeme tři dvojice. Tím je dána logická funkce pro realizaci Booleovými prvky. Tuto pak známým způsobem převedeme na realizaci prvky

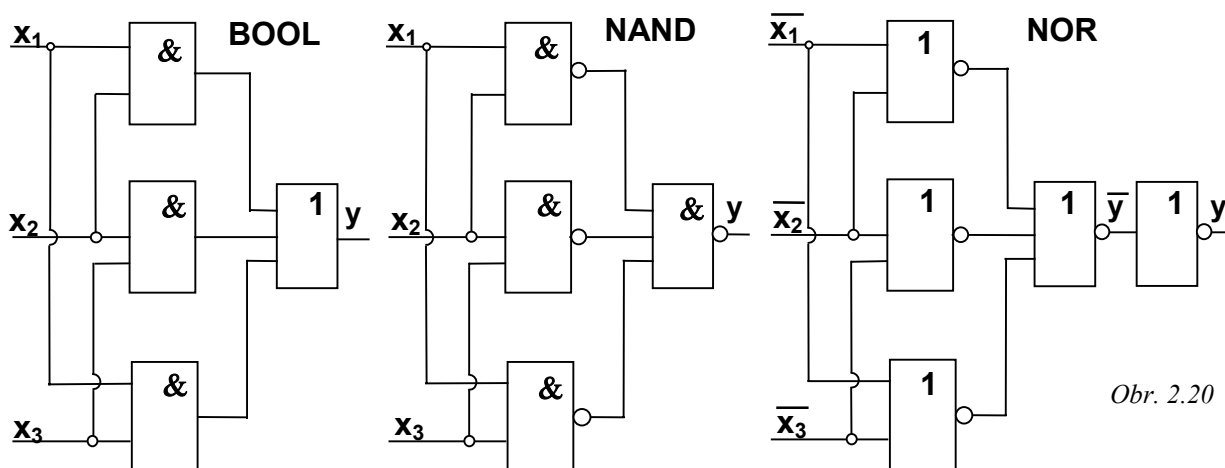


Obr. 2.19

NAND a NOR.

- Booleovy prvky: $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$
- prvky NAND: $y = \overline{\overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_1x_3} \cdot \overline{x_2x_3}}$
- prvky NOR: $\overline{y} = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}}$

Bloková schémata pro všechny tři realizace jsou na následujícím obr. 2.20. Poznamenejme ještě,

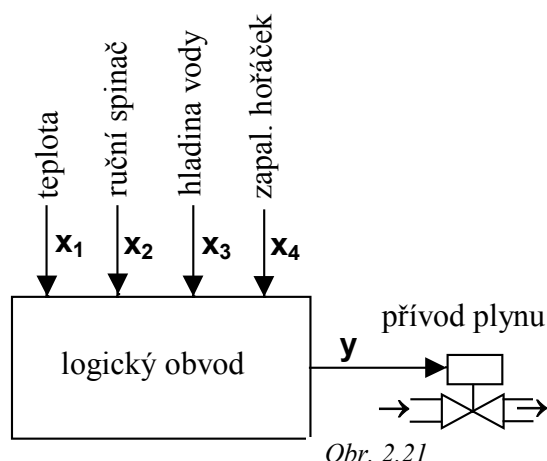


Obr. 2.20

že u realizace prvky NOR nebyla provedena negace vstupních proměnných – nutno ji provést anebo to zařídit opačnou funkcí snímačů.

Příklad 2.10: Automatika kotle pro vytápění rodinného domku má otevírat přívod plynu do kotle, když venkovní teplota klesne pod 15° anebo je sepnut ruční spínač a samozřejmě když je voda v kotli nad minimální hodnotou a hoří zapalovací hořáček – obr. 2.21. Navrhněte logický obvod, sestavený

- z Booleových prvků
- z prvků NAND
- z prvků NOR.



Řešení: Zavedme si jednotlivé vstupní logické proměnné x_1, x_2, x_3, x_4 a výstupní logickou proměnnou y následovně

x_1	1	teplota < 15°	x_2	1	zapnuto	x_3	1	voda nad min	x_4	1	hoří	y	1	plyn otevřen
	0	teplota ≥ 15°		0	vypnuto		0	voda pod min		0	nehoří		0	plyn zavřen

y	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Tab. 2.9

Nejdříve sestavíme pravdivostní tabulku tab. 2.9. Logickou funkci, kterou z ní získáme, můžeme malou úpravou eventuálně Karnaughovou mapou minimalizovat. Mapa se zde jeví skoro zbytečná. Dokonce by bylo možné si troufnout na sestavení logické funkce přímou úvahou, bez sestavování pravdivostní tabulky. Pokud si ale nejsme stoprocentně jisti, je lépe pravdivostní tabulku sestavit. Tuto funkci pak snadno známým způsobem je možno převést také na funkce pro realizace prvky NAND a prvky NOR. Tato realizace je nakreslena na obr. 2.22.

- Logická funkce pro realizaci Booleovskými prvky:

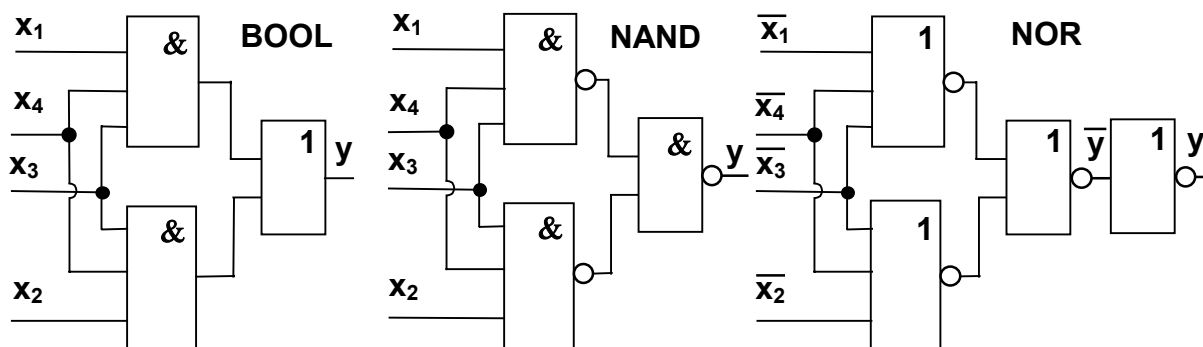
$$y = \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$$

- Logická funkce pro realizaci prvky NAND:

$$y = \overline{\overline{x_1 x_3 x_4} \cdot \overline{x_2 x_3 x_4}}$$

- Logická funkce pro realizaci prvky NOR:

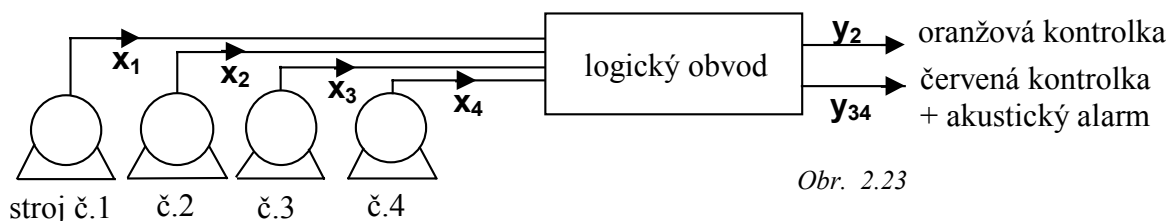
$$\bar{y} = \overline{\overline{\bar{x}_1} \vee \bar{x}_3} \vee \overline{\overline{\bar{x}_4} \vee \bar{x}_2} \vee \overline{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_4}$$



Obr. 2.22

Při realizaci prvky NOR (obr. 2.22 vpravo) se vychází z negací vstupních veličin. Tato negace by se musela nejdříve skutečně provést anebo zapojit opačně snímače.

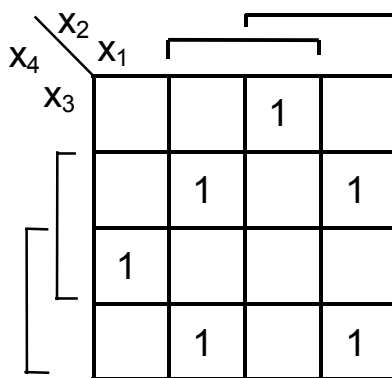
Příklad 2.11: V závodě mohou ze čtyř energeticky náročných strojů běžet pouze dva současně – obr. 2.23. Operátor má na panelu jednak oranžovou kontrolku, která se rozsvítí, když běží dva tyto stroje a jednak červenou kontrolku doplněnou akustickým alarmem, která svítí a houká když běží tři nebo čtyři z těchto strojů. Navrhněte logický obvod, který zajistí tyto funkce. Příklad ukazuje možnost spojení několika logických obvodů do jednoho celku.



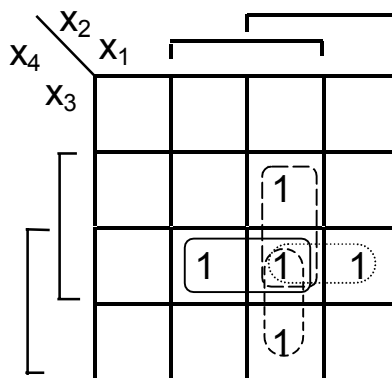
Obr. 2.23

y_2	y_{34}	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1

Tab. 2.10



Obr. 2.24



Obr. 2.25

Řešení: Nejdříve si definujeme jednotlivé vstupní i výstupní logické proměnné:

$x_{1,2,3,4}$	1	běží	y_2	1	svítí	y_{34}	1	houká+alarm
	0	neběží		0	nesvítí		0	nehouká

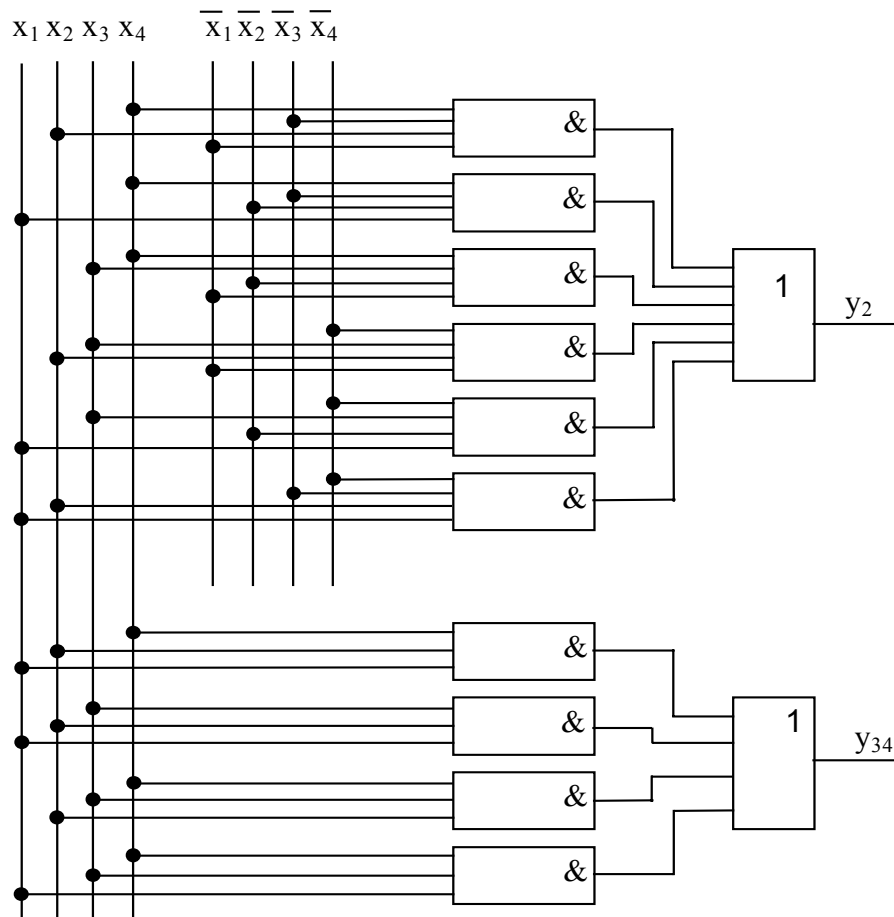
Proměnné x_1, x_2, x_3, x_4 udávají, zda-li příslušný stroj běží nebo je mimo provoz. Proměnná y_2 představuje současný běh dvou strojů a udává, svítí-li oranžová kontrolka či ne. Proměnná y_{34} představuje současný běh tří anebo čtyř strojů a udává, zda-li svítí červená kontrolka a houká alarm či ne.

Pravdivostní tabulka tab. 2.10 je pro obě logické funkce a z této tabulky řešení vychází. Následná minimalizace obou logických funkcí je provedena Karnaughovými mapami – mapa pro y_2 je na obr. 2.24 a mapa pro y_{34} je na obr. 2.25.

Minimalizace Karnaughovými mapami (funkci y_2 nelze jak je vidět minimalizovat) vede na logické funkce y_2 a y_{34} a příslušné blokové schéma je na obr. 2.26.

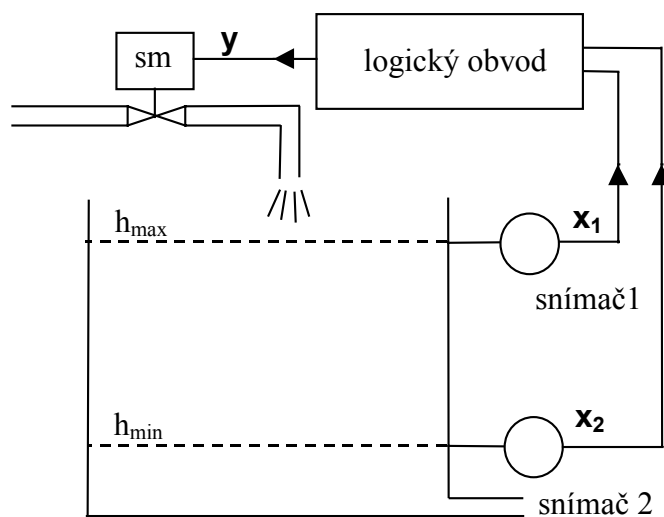
$$y_2 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

$$y_{34} = x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4$$



Obr. 2.26

Příklad 2.12: Podle obr. 2.27 se musí hladina vody v nádrži udržovat v rozmezí h_{max} a h_{min} . Snímače signalizují dosažení těchto úrovní. Když hladina klesne pod h_{min} , servomotor (sm) otevře ventil přítoku vody. Když hladina stoupne nad h_{max} , servomotor zavře ventil přívodu vody. V rozmezí hladin h_{min} a h_{max} je ventil otevřený, když hladina předtím byla pod h_{min} a uzavřený, když hladina předtím byla nad h_{max} . Navrhněte logický obvod, který tuto funkci zabezpečí.



Obr.2.27

Řešení: Definujme si vstupní i výstupní logické proměnné následujícím způsobem

$x_1 = \begin{matrix} 1 & \text{hladina pod max} \\ 0 & \text{hladina nad max} \end{matrix}$
 $x_2 = \begin{matrix} 1 & \text{hladina pod min} \\ 0 & \text{hladina nad min} \end{matrix}$
 $y = \begin{matrix} 1 & \text{ventil otevřen} \\ 0 & \text{ventil zavřen} \end{matrix}$

$y(k)$	x_1	x_2
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	1	0

Tab. 2.11

Při sestavování pravdivostní tabulky tab. 2.11 už nemůžeme postupovat jako v předcházejících příkladech a psát jednotlivé kombinace vstupních hodnot

v pořadí dvojkové soustavy. Naopak musíme vycházet z časového sledu činnosti zařízení. Jako výchozí stav volíme takový, kdy hladina je nad maximální hodnotou ($x_1=0, x_2=0$). Ventil je pochopitelně zavřen ($y=0$) a hladina klesá. Jakmile se dostane do úrovně mezi h_{min} a h_{max} ($x_1=1, x_2=0$), zůstane ventil zavřen ($y=0$), neboť hladina předtím byla (viz zadání) nad h_{max} . Když potom hladina klesne pod h_{min} ($x_1=1, x_2=1$), ventil se otevře ($y=1$) a hladina stoupá a opět se dostane mezi úrovně h_{min} a h_{max} ($x_1=1, x_2=0$). Tentokrát ale zůstane (viz zadání) ventil otevřen ($y=1$). Podotkněme, že stav $x_1=0, x_2=1$ není evidentně možný. Dále si ujasněme, že pokud vyjdeme z jiného výchozího stavu, dojdeme ke stejným výsledkům.

Z pravdivostní tabulky tab. 2.11 vidíme, že dvěma řádkům se stejnou kombinací vstupních veličin odpovídá různá hodnota výstupní veličiny y . A to je právě typické pro sekvenční obvody. **Stejné kombinaci vstupních hodnot odpovídá různá hodnota výstupní veličiny. Jedná se zde tedy o sekvenční logický obvod. Výstupní veličina závisí nejen na kombinaci vstupních hodnot, ale též na jejich časovém sledu.**

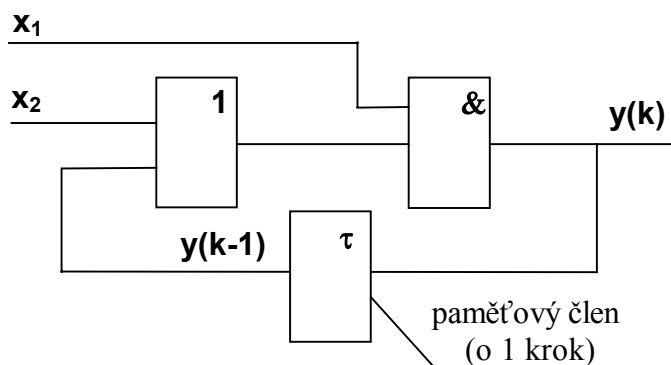
V našem případě je $y=0$ nebo 1 podle toho, jestli předtím byla hladina nad max (tam bylo $x_1=0, x_2=0$ a v důsledku toho tam bylo $y=0$) anebo pod min (tam bylo $x_1=1, x_2=1$ a v důsledku toho tam bylo $y=1$).

Sekvenční logickou funkci sestavíme podle tab. 2.11 tak, že v ní figuruje výstupní logická hodnota $y(k)$ v kroku k a stejná logická proměnná $y(k-1)$ v kroku $k-1$

$$y(k) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 y(k-1) = x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2 y(k-1)) = x_1 (x_2 \vee y(k-1))$$

K realizaci sekvenční logické funkce $y(k)$ nevystačíme se základními logickými Booleovými prvky, ani s prvky NAND a NOR, ale musíme mít paměť pro zapamatování hodnoty $y(k-1)$ pro jeden krok. V podstatě se jako paměť používá bistabilní klopný obvod. Blokové logické schéma s použitím paměti, která si stále pamatuje předcházející hodnotu je na obr. 2.28.

O sekvenčních logických obvodech by se samozřejmě dalo mluvit hodně a hodně a v podstatě je to dosti důležitá kapitola, v praxi se hodně tyto obvody vyskytují. Bohužel to přesahuje rámec této učebnice.



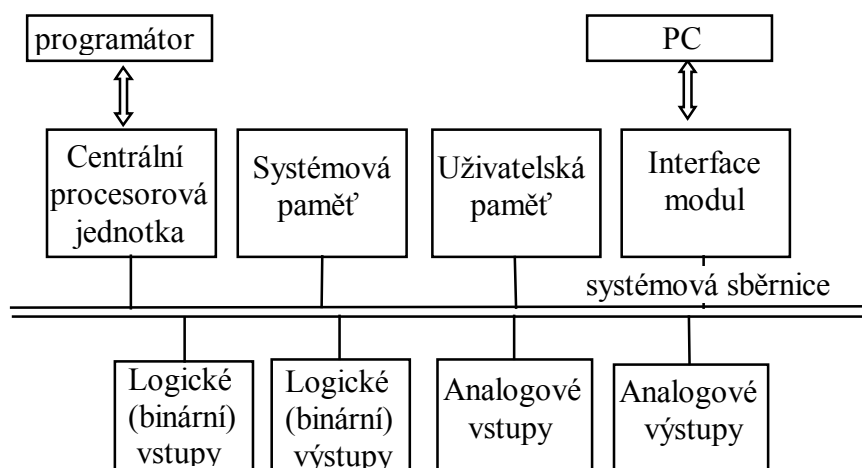
Obr. 2.28

2.7 Programovatelné automaty

Programovatelné automaty jsou **programovatelné řídicí systémy** umožňující řízení průmyslových a technologických systémů a procesů, u starších typů a u menších systémů specializované na úlohy převážně logického typu. Jsou známy pod označením PLC (Programmable Logic Controller). Menší typy bývají řešeny jako kompaktní celky, větší se zásadně konstruují jako modulární.

V automatizační technice se programovatelné automaty používají zhruba od r.1970. Původně byly určeny pro řízení strojů, jako náhrada za pevnou reléovou logiku. Postupně se jejich možnosti rozšiřovaly a dnes se s nimi můžeme setkat v nejrůznějších oborech, kde mnohdy vytlačují dříve používané přístroje. Jsou to nejenom tradiční strojírenské výrobní technologie včetně manipulační a dopravní techniky, ale i energetika (regulace v elektrárnách, v kotelnách

v klimatizačních jednotkách i chladicích zařízeních). Uplatnění mají programovatelné automaty rovněž i v chemických výrobnách, farmacii, v zemědělských výrobnách atd.



Obr. 2.29

Velkou předností programovatelných automatů je jejich univerzálnost. Již patří minulosti, že PLC řešily jen logické úlohy, zatímco k řízení spojitých veličin se používají spojitý PID regulátory.

Programem PLC lze řešit i jinak velmi obtížné úlohy, kde jsou vazby mezi regulací různých veličin (např. teploty a vlhkosti), lze jím optimalizovat technologický proces a přizpůsobovat jej měnícím se podmínkám. Některé PLC mají zabudovanou i

fuzzy logiku, a tím se rozšíří možnosti jejich použití i do dalších odvětví, např. do diagnostiky a zabezpečovací techniky.

Vnitřní struktura PLC je znázorněna na obr. 2.29. Pokud se jedná o modulární provedení, má pochopitelně variabilní počet vstupních i výstupních jednotek i dalších zařízení. Funkční bloky jsou propojeny prostřednictvím jedné nebo dvou sběrnic. Modulové jednotky běžně osazované v PLC jsou centrální procesorová jednotka, systémová paměť, uživatelská paměť, interface umožňující spojení s PC a množství modulů pro analogové, digitální a binární (logické) vstupy. Skutečnou sestavu volí uživatel tak, aby programovatelný automat co nejlépe vyhovoval řešeným úlohám. V krajních případech může mít PLC dvouhodnotové vstupy a výstupy a být vystavěn jako čistě binární (logický) systém anebo naopak může být koncipován jako analogový.

Na **binární (dvouhodnotové) vstupy** se připojují tlačítka, přepínače, koncové spínače a jiné snímače s dvouhodnotovým charakterem signálu (např. dvouhodnotové snímače tlaku, teploty nebo hladiny). **Binární výstupy** jsou určeny k buzení cívek relé, stykačů, elektromagnetických spojek, pneumatických a hydraulických převodníků, k ovládání signálů, ale i ke stupňovitému řízení pohonů a frekvenčních měničů.

Analogové vstupní a výstupní moduly zprostředkují kontakt programovatelného automatu se spojitým prostředím. K **analogovým vstupům** lze připojit například snímače teploty (obvykle odporové, polovodičové nebo termočlánky), snímače tlaku, vlhkosti, hladiny ale i většinu inteligentních přístrojů s analogovými výstupy. Prostřednictvím **analogových výstupů** lze ovládat spojitý servopohony a frekvenční měniče, ale třeba i ručkové měřicí přístroje a jiné spojitě ovládané akční členy.

Centrální procesorová jednotka dává programovatelnému automatu inteligenci. Realizuje soubor instrukcí a systémových služeb, zajišťuje i základní komunikační funkce s vlastními i vzdálenými moduly, s nadřazeným systémem a s programovacím přístrojem. Obsahuje mikroprocesor a řadič, zaměřený na rychlé provádění instrukcí.

Paměťový prostor, který centrální procesorová jednotka poskytuje uživateli, je rozdělen na dvě části. První část je **systémová paměť**, kde jsou uživatelské registry, čítače a časovače,

komunikační, časové a jiné systémové proměnné. Druhá část slouží pro uložení uživatelského programu (PLC programu) a během vykonávání programu se nemění. Nazývá se **uživatelská paměť**.

Protože programovatelné automaty byly původně určeny k realizaci logických úloh a k náhradě pevné logiky, nechybějí v žádném PLC instrukce pro základní logické operace (operace logického součtu a součinu, negace, instrukce pro realizaci paměťových funkcí a klopných obvodů, pro zápis výsledku nebo mezivýsledku na adresované místo). V **souboru instrukcí PLC** nechybí ani instrukce pro aritmetiku a operace s čísly.

Některé PLC poskytují i velmi výkonné instrukce pro komplexní operace, např. pro realizaci regulátorů a jejich automatického seřizování, pro fuzzy logiku a fuzzy regulaci, pro operace s daty a datovými strukturami, pro realizaci ucelených funkčních bloků apod. Tyto **specializované instrukce** usnadňují programování (nabízejí již hotové ucelené funkce) a současně zvyšují výkon PLC.

Výkonnost programovatelného automatu se nejčastěji posuzuje podle doby vykonání instrukcí. Obvykle jsou v řádu μs /instrukci, u malých systému 10 μs /instrukci.

K **programování PLC** existují specializované jazyky, původně navržené pro realizaci logických funkcí. Jazyky u různých výrobců jsou sice podobné, ale ne stejné. Není možná přenositelnost programů mezi PLC různých výrobců. Tato existuje jen u systémů stejného výrobce.

- **jazyk mnemokódů** je obdobou assembleru u počítačů a je také strojově orientován. To znamená, že každé instrukci PLC systému odpovídá stejně pojmenovaný příkaz jazyka. Tyto jazyky jsou často používány, zejména profesionálními programátory.
- **jazyk kontaktních (reléových) schémat** je grafický. Program se zobrazuje ve formě schémat používaných při práci s reléovými a kontaktními prvky. Jazyk je výhodný při programování nejjednodušších logických operací a v případech, kdy s ním pracují lidé, kteří neznají tradiční počítačové programování.
- **jazyk logických schémat** je opět grafický. Základní logické operace popisuje obdélníkovými značkami. Své značky mají i ucelené funkční bloky. Vychází vstříc uživatelům, zvyklým na kreslení logických schémat.
- **jazyk strukturovaného textu** je obdobou vyšších programovacích jazyků pro PC (např. Pascalu nebo C). Umožňuje úsporný a názorný zápis algoritmů.

Programovací a vývojové prostředky. K zadání a ladění uživatelského programu slouží programovací přístroje. Tradičně byly řešeny jako specializované přístroje v kufříkovém nebo příručním provedení. V současné době se pro komfortní programování používají výhradně počítače standardu PC.

Programovací přístroje (vývojové systémy, vývojová prostředí) umožňují zápis programu, jeho opravy, překlad ze zdrojové formy do kódu PLC a ladění programu s reálným PLC. Některé vývojové systémy dovolují i přenos programu z PLC do programovacího přístroje a jeho zpětné přeložení.

Pro úplnost uvedme, že na našem trhu je možno se nejčastěji setkat s programovatelnými automaty těchto nejvýznamnějších světových výrobců (řazeno abecedně): ABB, Allen-Bradley, B+R, Eberle, Festo, GE, H+B, Idec, Klockner Moeller, Matsushita, Mitsubishi, Omron, Saia, Siemens, Schneider Group a českého výrobce Teco. V detailech se jednotlivé třídy systémů a jejich představitelé liší, způsoby použití a aplikační možnosti jsou však srovnatelné.

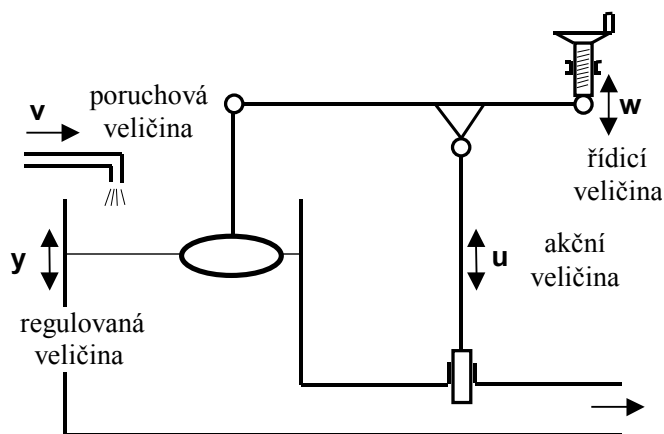
Kontrolní otázky

1. Jaké znáte logické funkce jedné a dvou proměnných? Které z těchto funkcí se prakticky využívají?
2. Jaké jsou algebraické zápisy základních logických funkcí a jejich schématické značky pro bloková schémata?
3. S jakými funkcemi realizuje logické obvody Booleova algebra, NAND algebra a NON algebra?
4. Zopakujte si základní pravidla pro výpočty v Booleově algebře.
5. Uveďte oba De Morganovy zákony.
6. Zadejte si logické funkce podobné jako v příkladech 2.1-4 a proveďte minimalizaci těchto vámi zadaných funkcí na základě pravidel Booleovy algebry.
7. Pojednejte o základních čtyřech možných způsobech vyjádření Booleovských funkcí.
8. Zadejte si pravdivostní tabulkou jednu funkci tří a jednu funkci čtyř proměnných a vyjádřete ji třemi zbylými způsoby.
9. Zadané funkce z předchozího příkladu minimalizujte použitím Karnaughovy mapy.
10. Jaká je základní vlastnost Karnaughovy mapy a jak se tato vlastnost využívá pro minimalizaci logických funkcí?
11. Jaká jsou základní pravidla pro minimalizaci logických funkcí Karnaughovými mapami?
12. Zadané funkce z příkladu 8 a minimalizované v příkladu 9 převedte na takový tvar, který je možno realizovat prvky NAND nebo prvky NOR.
13. Nakreslete bloková schémata k těmto funkcím z možností realizace použitím Booleovských prvků, prvků NAND nebo prvků NOR.
14. Jak lze pomocí prvků NAND či NOR realizovat negaci?
15. Jaký je rozdíl mezi kombinačními a sekvenčními logickými obvody?
16. Řešte příklady 2.8-12, případně si vymyslete podobné příklady, na kterých lze demonstrovat použití logických funkcí a logických obvodů pro automatizaci.
17. Jaké je použití programovatelných automatů? Co znamená zkratka PLC?
18. Jaké vstupy a výstupy mohou mít programovatelné automaty?
19. Jaké jsou možné způsoby programování programovatelných automatů?

3. SPOJITÉ LINEÁRNÍ ŘÍZENÍ

3.1 Úvod

Řízení se zpětnou vazbou se nazývá regulace. Úkolem regulace je nastavení technických veličin (teplota, tlak, otáčky, ...) na požadovanou hodnotu a udržovat je na této hodnotě i při působení poruch. Regulace se uskutečňuje v regulačním systému zvaném **regulační obvod**.



Obr. 3.1

Nejjednodušším příkladem regulačního obvodu je např. regulace výšky hladiny v nádrži s přítokem a odtokem podle obr. 3.1. V regulačním obvodu se výrazně rysují dvě části: **regulátor** neboli řídicí systém a **regulovaná soustava**, neboli řízený systém. **Regulátor** je zařízení, které uskutečňuje regulaci a které je za tímto účelem úmyslně sestrojeno. V našem případě je to plovák, který zjišťuje stav hladiny a přes pákový převod pohybuje ventilem, regulujícím odtok (plovák, pákový

převod a ventil tvoří regulátor). **Regulovaná soustava** je objektem regulace – je regulátorem regulována (respektive některá její veličina). V našem případě je regulovanou soustavou nádrž s hladinou včetně přítoku a odtoku.

Veličina, jejíž hodnota je výstupem z regulované soustavy a jež se regulací udržuje na požadované hodnotě, se nazývá **regulovaná veličina** a označuje se symbolem y . V našem případě je to výška hladiny, ale jako regulované veličiny mohou být nejrůznější fyzikální veličiny jako teplota, tlak, poloha, rychlost, pH, elektrické napětí, chemické složení, průtok atd.

Řídící veličina w (v našem případě poloha šroubu s ručním kolem) je veličina, pomocí které nastavujeme hodnotu, kterou má dosahovat regulovaná veličina. Určuje tedy vždy žádanou hodnotu regulované veličiny (předepsanou hodnotu, na které se má regulovaná veličina udržovat). Pokud je řídicí veličina zadávána člověkem, je to obvykle poloha nastavovacího prvku (potenciometru, ovládací páčky či kolečka). V automatických provozech, ve kterých je regulační obvod napojen na vyšší systém řízení, to může být elektrické napětí nebo jiná veličina, přenášející informaci.

V regulačním obvodu se hodnota regulované veličiny trvale měří a porovnává se žádanou hodnotou, kterou je řídicí veličina a vytváří se rozdíl

$$e = w - y \quad (3.1)$$

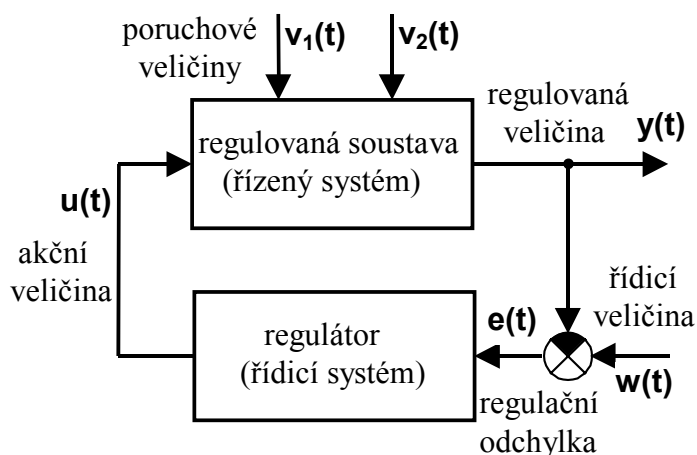
který se nazývá **regulační odchylka** e . Jakmile je rozdíl mezi regulovanou veličinou a její požadovanou hodnotou, má regulační odchylka nenulovou hodnotu a regulátor provádí akční zásah. Vytváření odchylky e se v našem případě děje v diferenčním členu, kterým je páka plováku.

Do regulačního procesu je třeba zasahovat tak, aby se regulační odchylka e udržovala minimální nebo nulová. To se uskutečňuje výstupní veličinou regulátoru, která je vstupní veličinou regulované soustavy – je to tzv. **akční veličina** u . Přitom regulátor musí být tak

zapojen, aby akční veličina zmenšovala regulační odchylku. V našem případě je akční veličinou otevření či uzavření regulačního ventilu v odtokovém potrubí. Všimněte si správného zapojení regulátoru: když se zvyšuje hladina – zvětšuje se regulovaná veličina a vzniká regulační odchylka v jednom směru – působí regulátor otevření odtoku a tudíž snižování hladiny – zmenšování regulované veličiny a zmenšování odchylky. A naopak.

Příčinou, proč musíme regulovat, jsou poruchy – **poruchové veličiny** $v_1, v_2, \dots$. Poruchové veličiny nežádoucím a nepředvídatelným způsobem působí na regulovanou soustavu a ovlivňují regulovanou veličinu. V našem případě je poruchovou veličinou každá změna přítoku do nádrže, např. zvýšení tlaku v přívodním potrubí. Nebo je poruchou ucpání odtokového potrubí apod.

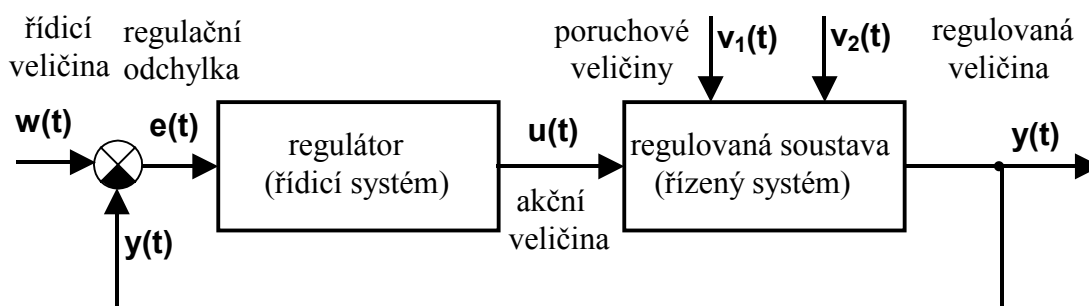
Průběhy všech veličin svázané s regulací se odehrávají v čase; nás tyto časové průběhy $y(t), w(t), u(t), v_1(t), v_2(t), \dots$ zajímají, protože charakterizují regulační proces.



Obr. 3.2

Při tomto označování veličin můžeme regulační obvod – regulační systém – znázornit **blokovým schématem** podle obr. 3.2. V blokových schématech se jednotlivé členy obvodu nebo i jejich skupiny (např. celý regulátor) znázorní obdélníky a vzájemné působení mezi těmito členy – tedy jednotlivé veličiny obvodu – spojovacími čarami. Působení je vždy v jednom směru a proto v blokových schématech označujeme i smysl tohoto působení – šipkou. Kroužky nám označují místa, v nichž se

signály sčítají, jsou to tzv. součtové (eventuálně rozdílové) členy. Vyčerněná část znamená odečítání signálu. Např. v schématu na obr. 3.2 je regulační odchylka dána vztahem (3.1). Odbočení signálu nebo jeho rozdělení označujeme čarou spojenou s druhou čarou tečkou (signál se rozdělením nemění, nezmenšuje – v obou větvích je stále stejná hodnota informace).



Obr. 3.3

Jiný možný způsob blokového znázornění téhož základního typu regulačního obvodu je na obr. 3.3. Někdy se používá schéma podle obr. 3.2, někdy podle obr. 3.3. Je to přesně též obvod, blokové schéma má jenom jinou formu – jde o jiný způsob kreslení téhož obvodu. Je to

spíš otázka zvyku, někdy i názornosti, jestli se mění veličina w (raději se použije schéma podle obr. 3.3) nebo v (raději obr. 3.2).

Podle závislosti regulované veličiny rozeznáváme několik druhů regulace.

V praxi je nejčastější případ regulace **na konstantní hodnotu**. Při ní se regulovaná veličina udržuje na konstantní hodnotě – zde je $w = konst$ i $y = konst$. Je to např. regulace teploty v místnostech, otáček strojů anebo již vzpomenutá a uváděná regulace výšky hladiny. U tohoto typu regulace je zvláště důležitá kompenzace vlivu poruchových veličin. Kdyby nebylo poruchových veličin, nic by se v podstatě nedělo a nemuselo by se regulovat (kromě občasné změny požadované hodnoty regulované veličiny).

Programová regulace. Je to taková regulace, kde požadujeme, aby se regulovaná veličina měnila v předepsaných velikostech v předepsané časové závislosti – regulovaná veličina je funkcí času $w = f(t)$ i $y = f(t)$. Příkladem je regulace teploty v pecích, kde se teplota musí podle časového programu měnit.

Vlečná regulace. Je to regulace, při níž se regulovaná veličina mění v závislosti na jiné vnější fyzikální veličině. Hodnota regulované veličiny má změny této vnější veličiny rychle a přesně sledovat. Matematicky vyjádřeno $w = f(A)$, $y = f(A)$, kde A je právě onou vnější veličinou. Příkladem je dávkování chemikálie do vody, kdy požadujeme změnu množství dávkované chemikálie v závislosti od okamžitého průtočného množství vody.

Zvláštním případem vlečné regulace jsou **servomechanismy**. U nich se řídicí veličina nemění v závislosti na jiné fyzikální veličině, ale je měněna buďto ručně anebo nějakým zařízením. Regulovaná veličina ji pak věrně a přesně sleduje. Příkladem takového servomechanismu je posilovač řízení v automobilech, ovládání kormidel v lodích i letadlech apod. U servomechanismů ovšem není rozdělení regulačního obvodu na regulátor a regulovanou soustavu.

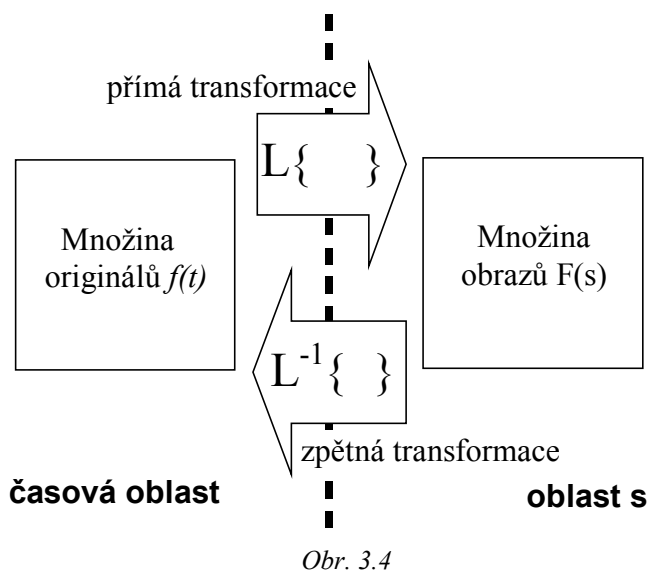
3.2 Laplaceova transformace

3.2.1 Přímá a zpětná transformace

Laplaceova transformace je matematický aparát, který umožňuje poměrně snadno řešit úlohy spojitě lineární regulace. Zavedl ji v roce 1820 francouzský matematik Laplace a umožnila mu výhodně řešit diferenciální rovnice. Jak se brzy dozvíme, transformací diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici. Jestliže tuto vyřešíme a provedeme zpětnou transformaci řešení, získáme hledané řešení původní rovnice.

Význam použití Laplaceovy transformace v teorii regulace je však hlubší. S její pomocí můžeme totiž velmi jednoduše popsat lineární spojitě regulační systémy místo diferenciálních rovnic tzv. přenosy. U nich je zvláště výhodné, že z přenosů jednotlivých částí můžeme velmi jednoduše vypočítat přenos celého systému nebo obvodu.

Pojem **transformace funkce** znamená, že každé funkci $f(t)$ z jedné množiny proměnné t přiřadíme funkci $F(s)$ z množiny funkcí komplexní proměnné s – obr. 3.4. (Všimněme si



Obr. 3.4

podobnosti této definice s definicí funkce $y=f(x)$, která říká, že funkce je přiřazení, které k nezávisle proměnné x z jedné množiny, přiřazuje závisle proměnnou y z jiné množiny). U pojmu transformace přiřadíme tzv. **originálu** (zde funkci času t) určitým předpisem tzv. **obraz** (je funkcí komplexní proměnné s).

Transformace **originál** $\rightarrow$ **obraz** je přímá transformace. Existuje samozřejmě k ní **zpětná transformace**, tedy transformace **obraz** $\rightarrow$ **originál**, která k obrazu $F(s)$ přiřazuje opět originál $f(t)$.

Z možných transformací je v regulační technice pro spojitou regulaci používána právě **transformace Laplaceova**, která je definována vztahem

$$\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt} \quad (3.2)$$

Laplaceova transformace L přiřazuje funkci $f(t)$ pro čas $t \geq 0$ funkci $F(s)$, což symbolicky zapisujeme vztahem

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad (3.3)$$

Naopak se **zpětná transformace** dá symbolicky zapsat vztahem

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad (3.4)$$

Tato zpětná transformace se může provést vztahem pro výpočet originálu k danému obrazu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s)e^{st} ds \quad (3.5)$$

což znamená vyčíslování křivkového integrálu po uzavřené křivce c , která v sobě uzavírá všechny singulární body funkce $F(s)$. Toto vyčíslování je možné residuovou větou, ale většinou se nepoužívá a v praxi se zpětná transformace provádí použitím slovníku Laplaceovy transformace, o kterém bude řeč dále.

Příklad 3.1: Určete Laplaceovy obrazy následujících funkcí

- a) $f(t) = e^{-at}$
b) $f(t) = at$ kde v obou případech je a daná konstanta

Řešení: a) $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = -\frac{1}{a+s} \left[e^{-(a+s)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$

b) $F(s) = \int_0^{\infty} at \cdot e^{-st} dt = \left[\begin{array}{l} \text{integrace} \\ \text{per partes} \end{array} \right] = a \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + a \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt = -\frac{a}{s} \left[t e^{-st} \right]_0^{\infty} - \frac{a}{s^2} \left[e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{a}{s^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{integrace} \\ \text{per partes} \end{array} : \int uv' dt = uv - \int u'v dt \quad \begin{array}{ll} u = t & v' = e^{-st} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right]$$

Při hledání obrazu k dané funkci neprovádíme integraci podle definice (3.2), a tím méně při zpětném hledání originálu k danému obrazu podle vztahu (3.4). To by bylo příliš pracné a někdy i velmi obtížné. Běžně používáme tzv. **slovník Laplaceovy transformace**, kde máme seřazený funkce $f(t)$ na levé straně a obrazy těchto funkcí $F(s)$ na pravé straně. Takový

slovník pouze těch nejdůležitějších a nejpoužívanějších funkcí je v tab. 3.1. V něm vidíme např. námi v příkladu 3.1 spočítané obrazy funkcí $f(t)=e^{-at}$ a $f(t)=at$.

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$
3	a	$\frac{a}{s}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$
5	t^2	$\frac{2}{s^3}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
8	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
9	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
10	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$

Tab. 3.1 Slovník Laplaceovy transformace

Při provádění zpětné transformace (hledání $f(t)$ k danému $F(s)$) se běžně vyskytuje funkce $F(s)$ jako zlomek – racionální lomená funkce. Takovou funkci samozřejmě nenajdeme ve slovníku a proto ji musíme rozložit nejprve v parciální zlomky a teprve pak k nim najít ve slovníku originál.

Rozklad v parciální zlomky lze provádět obvyklou z matematiky známou metodou neurčitých součinitelů, která je dosti pracná. Nebo je možno použít v publikacích z regulační techniky často uváděnou metodu Heavisidova rozvoje.

Příklad 3.2: Proved'te zpětnou Laplaceovu transformaci funkcí

$$a) F(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

$$b) F(s) = \frac{5}{(s+3)(s+8)}$$

$$c) F(s) = \frac{3s+1}{(s+2)(s+3)(s+7)}$$

$$d) F(s) = \frac{10s}{s^2 + 25}$$

Řešení: S použitím slovníku v tab. 3.1 je

$$a) f(t) = 2(1 - e^{-t})$$

$$b) f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+8}\right\} = e^{-3t} - e^{-8t}$$

$$c) f(t) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+7}\right\} = -e^{-2t} + 2e^{-3t} - e^{-7t}$$

$$d) f(t) = 10 \cos 5t$$

3.2.2 Hlavní věty transformace

Věty, které budou v dalším textu uváděny, jsou podávány bez důkazů, které je možno najít v literatuře. Všechny vychází z toho, že $F(s)=L\{f(t)\}$ eventuálně $G(s)=L\{g(t)\}$

Věta o linearitě

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \quad (3.6)$$

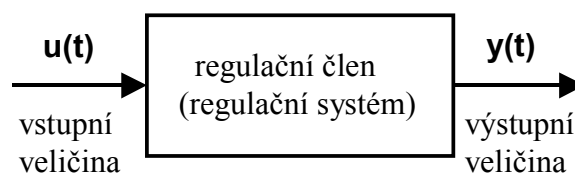
Věta o obrazu derivace

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (3.7)$$

$$\text{n-té derivace} \quad L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (3.8)$$

3.3 Statické a dynamické vlastnosti regulačních členů

Zatím se stále zabýváme regulačními členy s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou – obr. 3.5. K obecnějším členům a systémům se dostaneme v některých dalších kapitolách. Vstupní veličinu budeme označovat $u(t)$ a výstupní veličinu $y(t)$.



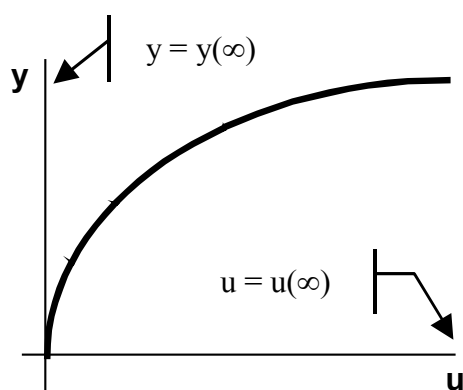
Obr. 3.5

Vlastnosti regulačních členů můžeme posuzovat buď v **ustáleném stavu** a pak mlu-

víme o **statických vlastnostech** nebo při změnách vstupních i výstupních veličin a to pak mluvíme o **dynamických vlastnostech** regulačních členů nebo systémů.

Statické vlastnosti regulačních členů se nejčastěji vyjadřují **statickou charakteristikou**, což je závislost mezi výstupní veličinou v ustáleném stavu a vstupní veličinou v ustáleném stavu

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \quad y = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \quad (3.9)$$



Obr. 3.6 Statická charakteristika

Znamená to, že při snímání statické charakteristiky musím vždy počkat na ustálení jak vstupní tak výstupní veličiny a tyto ustálené hodnoty vynášet do grafu, kde je na vodorovné ose vstupní veličina u a na svislé ose výstupní veličina y – obr. 3.6. To ustálení znamená, že musí proběhnout přechodový děj a pak teprve odečteme příslušnou hodnotu vstupní nebo výstupní veličiny, tedy do charakteristiky bereme hodnoty $u=u(\infty)$, $y=y(\infty)$.

U lineárního členu je statická charakteristika přímková, lineární. Jakmile statická charakteristika není přímka, jedná se o **nelineární člen**. Zatím se v dalším budeme zabývat pouze lineárními členy,

lineárními systémy. Obecně platí, že lineární systém má všechny členy lineární, jeden nelineární člen by způsobil, že celý systém je a chová se jako nelineární.

Vzhledem k tomu, že v regulaci nám nejde o ustálený stav, ale o průběh přechodného děje, budeme se v dalším zajímat o **dynamické vlastnosti** regulačních členů a regulačních systémů.

Dynamické vlastnosti systému lze popsat v podstatě dvěma různými, navzájem zcela odlišnými způsoby

dynamické vlastnosti systému charakterizuje $\left\{ \begin{array}{l} \text{vnější popis systému} \\ \text{vnitřní popis systému} \end{array} \right.$

Vnější popis systému vyjadřuje dynamické vlastnosti systému pouze pomocí vztahu mezi **výstupní a vstupní veličinou**. Při vnějším popisu považujeme systém za černou skříňku („black box“) se vstupem a výstupem. Nezajímá nás obsah této skříňky, nezajímá nás fyzikální realizace a konstrukce pro tento popis nemusí být ani známa. Systém zkoumáme pouze pomocí reakce výstupu na vstupní podněty. Přitom neznáme a nezajímají nás fyzikální děje, které uvnitř skříňky probíhají.

Vnitřní popis systému pracuje s pojmem **stav systému**. Je to vyjádření dynamických vlastností systému vztahy mezi **vstupem, výstupem a stavem systému**. Ze zkušenosti je přece známo, že výstupní veličina obecného systému nezávisí pouze na vstupní veličině, ale také na počátečních podmínkách systému na začátku děje. Tyto počáteční podmínky tvoří přibližně počáteční stav systému. Pro zavedení vnitřního popisu systému musíme znát jeho strukturu a veškeré fyzikální nebo chemické pochody, které v něm probíhají. Z toho je zřejmé, že je dokonalejší než popis vnější. Je vyjádřen **stavovými rovnicemi** ve stavovém prostoru a bude o něm mluveno až v dalších kapitolách.

V této kapitole se dále budeme zabývat popisem **dynamických vlastností** lineárních spojitých regulačních členů nebo systémů, a to použitím metod **vnějšího popisu**. Jsou to klasické metody regulační techniky. Jsou omezenější než vnitřní popis, ale jejich výhodou je jednoduchost a okolnost, že vnější popis můžeme získat rozбором experimentálně získaných průběhů vstupních a výstupních veličin.

Způsoby vnějšího popisu – závislosti mezi vstupem a výstupem systému – jsou:

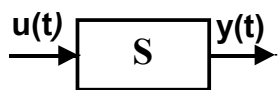
- diferenciální rovnice systému
- přenos
- impulsní funkce a charakteristika
- přechodová funkce a charakteristika
- frekvenční přenos
- frekvenční charakteristiky

3.4 Diferenciální rovnice systému a přenos

Lineární spojitý systém nebo regulační člen se vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$ podle obr. 3.7 je obecně popsán diferenciální rovnicí

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (3.10)$$

kde a_i, b_i jsou konstantní koeficienty.

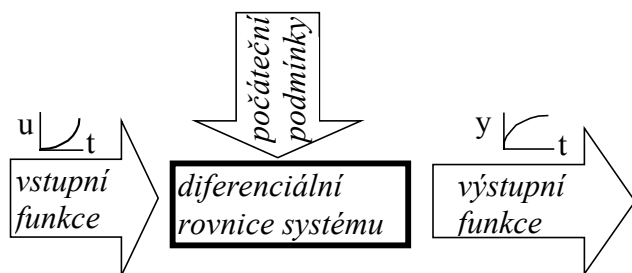


Obr. 3.7

Jak poznáme v dalším, nelze prakticky realizovat systém, jehož výstupní signál by byl prvou derivací (nebo dokonce vyšší derivací) vstupního signálu (např. kdyby měl rovnici $y=ku'$: abychom mohli vstupní signál derivovat, museli bychom dopředu znát jeho průběh a ten neznáme). Proto v rovnici (3.10) musí být vždy splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti

$$m \leq n \quad (3.11)$$

Stupeň nejvyšší derivace výstupní veličiny je vždy vyšší nebo roven stupni nejvyšší derivace vstupní veličiny. Řád diferenciální rovnice n (nejvyšší derivace výstupní veličiny $y(t)$) udává řád systému.



Obr. 3.8

Tato rovnice nám umožňuje určit průběh odezvy systému či regulačního členu. Jestliže známe průběh vstupního signálu $u(t)$, můžeme dosazením ho do této rovnice a jejím vyřešením spočítat průběh výstupu $y(t)$ – obr. 3.8. Mimo průběh vstupního signálu musíme znát také počáteční podmínky $y(0), y'(0), \dots$

$y^{(n-1)}(0)$ – obecně celkem n -počátečních podmínek.

Zde mluvíme někdy o obecném systému, někdy o regulačním členu. Může to být jak dílčí regulační člen, tak regulovaná soustava či regulátor, které jsou většinou složeny z několika dílčích regulačních členů.

Diferenciální rovnici systému (regulačního členu) získáváme obvykle tak, že uvedeme fyzikální vztahy a zákony v systému a vyeliminujeme všechny veličiny mimo vstupní a výstupní. V mechanických soustavách často vystačíme s dynamickou rovnováhou sil.

Přejdeme k **přenosu**, který je nejčastěji užívaným způsobem popisu lineárních regulačních systémů a zejména regulačních členů. Je definován jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny ku Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.12)$$

Máme-li regulační člen daný diferenciální rovnicí obecně ve tvaru (3.10), je možno poměrně snadno odvodit důležitý vzorec pro výpočet přenosu z diferenciální rovnice

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.13)$$

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti (3.11) plyne, že stupeň polynomu v čitateli musí být menší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli přenosu $G(s)$.

Ještě je dobré si všimnout, že vzorec má na rozdíl od definice přenosu v čitateli polynom, utvořený z koeficientů vstupní funkce v diferenciální rovnici a ve jmenovateli polynom utvořený z koeficientů výstupní funkce. Vždy příslušná derivace v diferenciální rovnici odpovídá příslušné mocnině komplexní proměnné s .

Příklad 3.3: Utvořte přenos systému, je-li dána jeho diferenciální rovnice

a) $y''' + 4y'' + 0,5y' + 2y = 6u' + 3u$

a) $G(s) = \frac{6s + 3}{s^3 + 4s^2 + 0,5s + 2}$

b) $10y'' + 5y' = u$

b) $G(s) = \frac{1}{10s^2 + 5s} = \frac{0,2}{s(2s + 1)}$

c) $y = 4u$

c) $G(s) = 4$

Příklad 3.4: K danému přenosu napište diferenciální rovnici systému

a) $G(s) = \frac{7s^2 + 6s + 2}{s^3 + 5s^2 + 2s + 8}$

Řešení:

a) $y''' + 5y'' + 2y' + 8y = 7u'' + 6u' + 2u$

b) $G(s) = \frac{3s}{s^2 + s + 0,5}$

b) $y'' + y' + 0,5y = 3u'$

Vedle základního tvaru (3.13) můžeme přenos upravit ještě do dvou běžně používaných tvarů

nuly přenosu póly přenosu

přenos s vyjádřenými nulami a póly

$$G(s) = k \frac{(s - n_1)(s - n_2) \dots (s - n_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.14)$$

přenos s časovými konstantami

$$G(s) = K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \quad (3.15)$$

časové konstanty přenosu

V prvním případě (3.14) rozložíme polynom v čitateli i ve jmenovateli přenosu $G(s)$ v součin kořenových činitelů. Kořeny čitatele se nazývají **nuly přenosu** a kořeny jmenovatele **póly přenosu**. Jejich rozložení v komplexní rovině určuje vlastnosti systému.

Ve druhém případě (3.15) je čítec i jmenovatel přenosu upraven do zvláštního tvaru, kde koeficienty u s jsou **časové konstanty přenosu** a mají rozměr času. Platí pro ně

$$\tau_i = -\frac{1}{n_i} \quad T_i = -\frac{1}{p_i} \quad (3.16)$$

$$(3.17)$$

Příklad 3.5: Systém je dán diferenciální rovnicí

a) $4y'' + 20y' + 16y = 3u'' + 15u' + 18u$

b) $y''' + 3y'' + 2y = 2u' + 6u$

Spočítejte přenos a vyjádřete ho ve všech tří tvarech (základní tvar, s vyjádřenými nulami a póly a s časovými konstantami).

Řešení: Základní tvar

a) $G(s) = \frac{3s^2 + 15s + 18}{4s^2 + 20s + 16}$

b) $G(s) = \frac{2s + 6}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

Tvar s vyjádřenými nulami a póly

a) $G(s) = \frac{3(s+2)(s+3)}{4(s+1)(s+4)}$

b) $G(s) = 2 \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$

Tvar s časovými konstantami

a) $G(s) = \frac{3}{4} \frac{2(0,5s+1)3(0,33s+1)}{(s+1)4(0,25s+1)} = \frac{9}{8} \frac{(0,5s+1)(0,33s+1)}{(s+1)(0,25s+1)}$

b) $G(s) = \frac{2 \cdot 3(0,33s+1)}{s(s+1)2(0,5s+1)} = 3 \frac{0,33s+1}{s(s+1)(0,5s+1)}$

Z definice přenosu (3.12) je zřejmé, že známe-li vstupní signál systému $u(t)$, respektive jeho obraz $U(s)$ můžeme z přenosu $G(s)$ určit odezvu $y(t)$ systému na libovolnou změnu vstupní veličiny $u(t)$. A to je jedna ze základních úloh regulace. Protože přenos $G(s)$ je definován za předpokladu nulových počátečních podmínek, je i obraz odezvy možno spočítat pouze za předpokladu nulových počátečních podmínek. (Samozřejmě, že je možno odvodit obdobný, o něco složitější vzorec za předpokladu nenulových počátečních podmínek.)

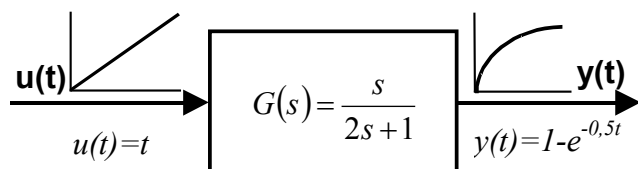
$$\mathbf{Y(s) = G(s).U(s)} \quad (3.18)$$

Ze vztahu (3.18) pak plyne, že originál odezvy je dán zpětnou Laplaceovou transformací

$$\mathbf{y(t) = L^{-1}\{G(s).U(s)\}} \quad (3.19)$$

Příklad 3.6: Stanovte odezvu regulačního členu o přenosu $G(s) = \frac{s}{2s+1}$ na vstupní

veličinu $u(t)$, kterou je lineárně rostoucí funkce $u(t)=t$ pro $t \geq 0$.



Obr. 3.9

Řešení: Existuje jedna počáteční podmínka $u(0)=0$ a ta je nulová. Obraz vstupní veličiny je podle slovníku Laplaceovy transformace

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

a obraz odezvy pak je

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s}{2s+1} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s(2s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,5}$$

a odezva

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,5}\right\} = 1 - e^{-0,5t} \quad \text{jak ukazuje obr. 3.9.}$$

3.5 Impulsní funkce a charakteristika

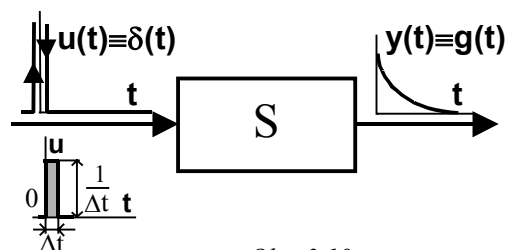
Impulsní funkce je odezva systému na jednotkový (Diracův) impuls $\delta(t)$ na vstupu systému a značíme ji $g(t)$ – obr.3.10. Její graf je impulsní charakteristika.

Jednotkový (Diracův) impuls $\delta(t)$ je „funkce“, která se jeví jako nekonečně krátký impuls o nekonečně velké amplitudě, jehož plocha je rovna jedné a Laplaceův obraz se rovněž rovná jedné

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \neq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.21)$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \quad (3.22)$$



Obr. 3.10

Přibližně si ho můžeme představit podle obr. 3.10 jako velmi úzký pravoúhlý impuls šířky Δt a výšky $1/\Delta t$ v začátku souřadnic. Prakticky přivedeme na vstup např. velmi krátký impuls velkého napětí. V praxi je tedy možné ho realizovat impulsy konečně malé šířky a konečně velké amplitudy. Pak je ho možno snímat experimentálně. Experimentální zjišťování impulsní charakteristiky se více používá u elektrických prvků než u mechanických.

Jak ale spočítáme impulsní funkci když známe diferenciální rovnici systému anebo jeho přenos? Začneme tím důležitějším a to je, jak získáme impulsní funkci, známe-li přenos systému.

Dosadíme-li do definice přenosu (3.12) za vstupní veličinu $u(t)$ jednotkový impuls $\delta(t)$, jehož obraz je podle (3.22) roven jedné, je výstupní veličina $y(t)$ podle definice impulsní funkce

rovna právě této funkci. Jak je vidět z obr. 3.11, je impulsní funkce dána zpětnou transformací přenosu $G(s)$. **Mezi impulsní funkcí a přenosem je tedy vztah jako mezi originálem a obrazem v Laplaceově transformaci** (proto také značení impulsní funkce písmenem g stejně jako přenos)

$$\boxed{g(t) = L^{-1}\{G(s)\}} \quad (3.23)$$

Odpověď na otázku – jak spočítáme impulsní funkci, když je dána diferenciální rovnice systému – je

následující: především odpovíme tak, že raději převedeme diferenciální rovnici na přenos a známým způsobem z něho impulsní funkci určíme. Pokud ale chceme přímý převod diferenciální rovnice na přenos, je to také možné.

Do diferenciální rovnice dosadíme za vstupní funkci $u(t)$ jednotkový impuls $\delta(t)$, rovnici vyřešíme a její řešení $y(t)$ je impulsní funkce $g(t)$. Ovšem řešení této rovnice není snadné, protože se tam vyskytují derivace vstupní funkce – v tomto případě $\delta(t)$. Je vhodné pro řešení rovnice použít Laplaceovu transformaci, protože obraz $\delta(t)$ je známý a obrazy jeho derivací se určí pomocí věty o obrazu derivace. Každopádně se tímto problémem nebudeme zabývat a raději se mu vyhneme převedením diferenciální rovnice na přenos.

Příklad 3.7: Určete impulsní funkci a nakreslete impulsní charakteristiku pro regulační členy o přenosu

a) $G(s) = \frac{1,5}{s}$

b) $G(s) = \frac{0,5}{s^2}$

c) $G(s) = \frac{1}{s(2s+1)}$

d) $G(s) = \frac{1}{s+2}$

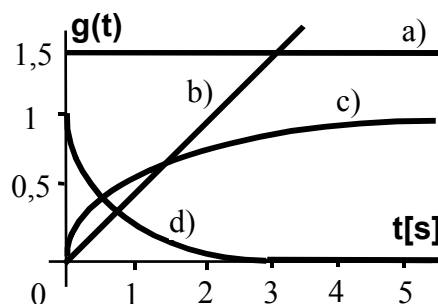
Řešení:

a) $g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1,5}{s}\right\} = 1,5$

b) $g(t) = L^{-1}\left\{\frac{0,5}{s^2}\right\} = 0,5t$

c) $g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(2s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,5}\right\} = 1 - e^{-0,5t}$

d) $g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$

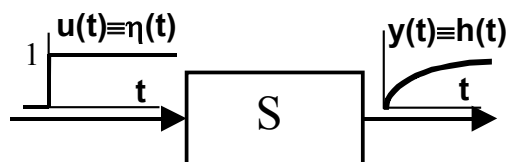


Obr. 3.12

Impulsní charakteristiky jako grafy impulsních funkcí jsou na obr. 3.12.

3.6 Přechodová funkce a charakteristika

Přechodová funkce je odezva systému na jednotkový skok $\eta(t)$ na vstupu a značíme ji $h(t)$ – obr. 3.13. Její graf je přechodová charakteristika.

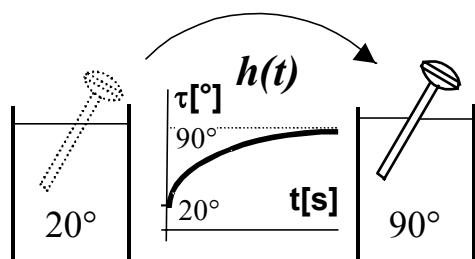


Obr. 3.13

Jednotkový skok je funkce, která do času $t=0$ má nulovou hodnotu a v tomto čase skočí její hodnota na jednotku, kterou pak stále udržuje – obr. 3.13. Značíme ji symbolem $\eta(t)$ a její matematické vyjádření je

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Největší význam přechodových funkcí či charakteristik je v tom, že je lze velmi snadno získat experimentálně. Na příklad ponecháme-li teploměr se ustálit v chladné vodě o dané teplotě



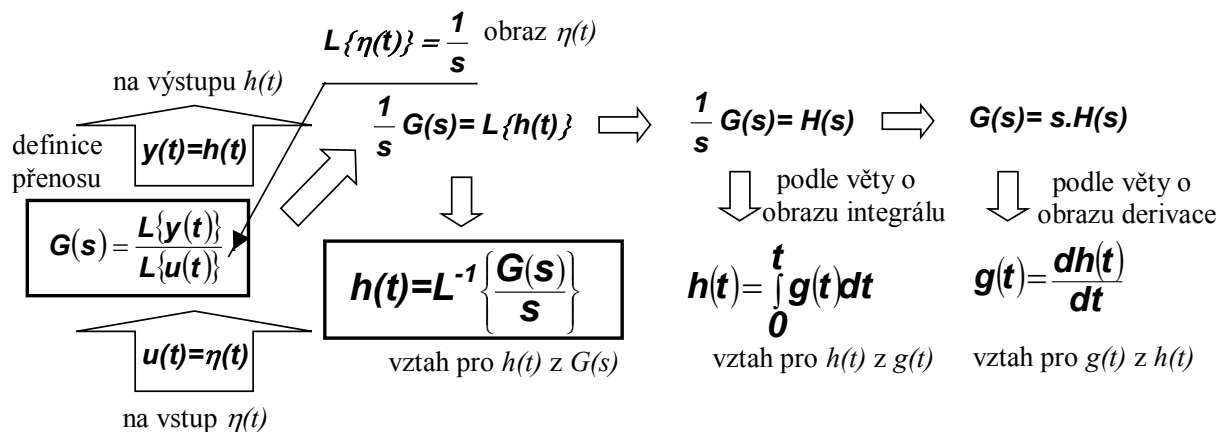
Obr. 3.14

a potom jej rychle přendáme do teplé vody a zapisujeme časový průběh teploty kterou ukazuje; získáme přechodovou charakteristiku (protože ale skok nebyl jednotkový, ale 70 krát větší, musíme její průběh tj. měřítko podělit 70 (laboratorní úloha – viz obr. 3.14). Nebo jiný příklad přechodové charakteristiky je rychlé zatížení motoru (např. spalovacího, elektromotoru, ...) zátěží přes spojku. Otáčky motoru začnou klesat a jejich průběh je přechodová charakteristika daného motoru.

Přechodové charakteristiky se mimo jiné využívají k identifikaci systémů, u nichž neznáme dobře jejich dynamické vlastnosti a kde selhává jiný způsob jejich identifikace.

Vztah mezi přechodovou funkcí a ostatními druhy popisu (diferenciální rovnicí, přenosem, impulsní funkcí):

Známe-li diferenciální rovnici systému, získáme přechodovou funkci (myslí se přímo, bez převodu na přenos) tak, že za vstupní funkci $u(t)$ dosadíme do rovnice jednotkový skok $\eta(t)$ (respektive jednotku). Rovnici vyřešíme (počáteční podmínky vychází z toho, že začátek děje je



Obr. 3.15

v čase $t=0$) a řešení $y(t)$ rovnice je přechodová funkce $h(t)$.

Je-li znám přenos systému $G(s)$ dosadíme podle obr. 3.15 do jeho definice (3.12) za vstupní veličinu $u(t)$ jednotkový skok $\eta(t)$, jehož Laplaceův obraz je $L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}$ a na výstupu systému pak dostáváme přechodovou funkci $h(t)$. Podle obr. 3.15 platí

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (3.25)$$

Tímto stejným postupem (obr. 3.15) můžeme odvodit i vztahy pro získání přechodové funkce z impulsní funkce (3.26) a pro získání impulsní funkce při znalosti přechodové funkce (3.27)

$$h(t) = \int_0^t g(t) dt \quad (3.26)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (3.27)$$

Příklad 3.8: Regulační člen je popsán diferenciální rovnicí

$$3y' + y = 2u$$

Určete jeho přechodovou funkci jednak přímo řešením diferenciální rovnice a jednak přes přenos a k přechodové funkci nakreslete přechodovou charakteristiku.

Řešení: Za vstupní funkci $u(t)$ dosadíme jednotkový skok, tedy $u = 1$ pro $t \geq 0$. To vede na rovnici

$$3y' + y = 2$$

kteřou budeme řešit. K homogenní rovnici $3y' + y = 0$ je charakteristická rovnice $3\lambda + 1 = 0$ s kořenem $\lambda = -0,33$ a proto je řešení této homogenní rovnice $y = Ce^{-0,33t}$, kde C je integrační konstanta. Partikulární integrál má tvar konstanty $y_p = A$ a tuto určíme dosazením do nehomogenní rovnice a vyjde nám $y_p = 2$. Takže řešení nehomogenní rovnice je $y = Ce^{-0,33t} + 2$. Nyní už jenom určíme integrační konstantu z počáteční podmínky $y(0) = 0$. Děj začíná v čase $t = 0$ a s nulovou počáteční hodnotou: $0 = Ce^{-0,33 \cdot 0} + 2$. Je tedy $C = -2$ a řešení diferenciální rovnice a tedy přechodová funkce

$$y(t) \equiv h(t) = 2(1 - e^{-0,33t})$$

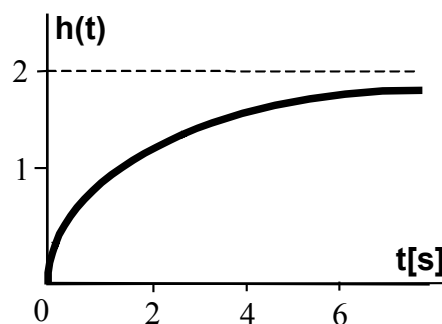
Druhý způsob určení přechodové funkce je přes přenos. Přenos příslušný dané diferenciální rovnici je

$$G(s) = \frac{2}{3s + 1}$$

Z přenosu určíme přechodovou funkci vztahem (3.25) s rozložením funkce v parciální zlomky, abychom mohli pomocí operátorového slovníku určit originál

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s(3s+1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s} - \frac{6}{3s+1} \right\} = 2(1 - e^{-0,33t})$$

Přechodová charakteristika je na obr. 3.16.



Obr. 3.16

Příklad 3.9: Určete přechodovou funkci regulačního členu s přenosem

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Řešení: Podle vztahu (3.25) je přechodová funkce

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+3)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

Příklad 3.10: Určete přechodovou funkci a nakreslete přechodovou charakteristiku pro regulační členy z příkladu 3.7, jejichž přenosy jsou

a) $G(s) = \frac{1,5}{s}$ b) $G(s) = \frac{0,5}{s^2}$ c) $G(s) = \frac{1}{s(2s+1)}$ d) $G(s) = \frac{1}{s+2}$

Z vypočtené přechodové funkce určete impulsní funkci a porovnejte s výsledky v příkladu 3.7.

Řešení:

a) $h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1,5}{s} \right\} = 1,5t$

b) $h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{0,5}{s^3} \right\} = 0,25 L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^3} \right\} = 0,25t^2$

c) $h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(2s+1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{4}{2s+1} \right\} =$
 $= t - 2 + 2e^{-0,5t}$

d) $h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)} \right\} = 0,5(1 - e^{-2t})$

Impulsní funkci získáme z přechodové funkce její derivací podle času – vztah (3.27)

a) $g(t) = \frac{d}{dt} 1,5t = 1,5$

c) $g(t) = \frac{d}{dt} (t - 2 + 2e^{-0,5t}) = 1 - e^{-0,5t}$

b) $g(t) = \frac{d}{dt} 0,25t^2 = 0,5t$

d) $g(t) = \frac{d}{dt} (0,5 - 0,5e^{-2t}) = e^{-2t}$

Je vidět, že se výsledky takto určené impulsní funkce shodují s výsledky, kdy byla impulsní funkce určována přímo z přenosu v příkladu 3.7.

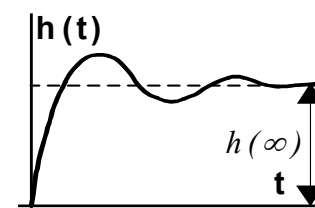
Rozdělení regulačních členů podle přechodové charakteristiky a přenosu

Přechodové charakteristiky regulačních členů se pro čas $t \rightarrow \infty$ ustálí na určité konkrétní hodnotě, kterou jsme na obr. 3.18 označili $h(\infty)$ a kterou můžeme určit podle věty o konečné hodnotě funkce

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (3.28)$$

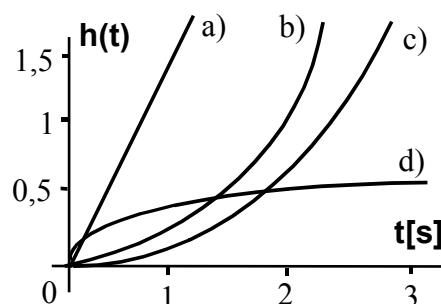
a kde jsme použili vztah pro obraz přechodové funkce z obr.3.15.

Dosadíme-li za $G(s)$ základní tvar přenosu (3.13) dostaneme



Obr. 3.18

Přechodové charakteristiky jako grafy přechodových funkcí jsou na obr. 3.17.

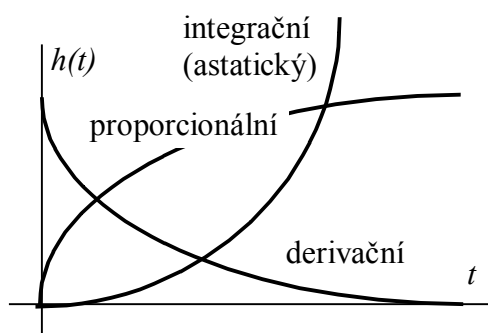


Obr. 3.17

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \quad (3.29)$$

Na základě této ustálené hodnoty přechodové charakteristiky můžeme rozdělit regulační členy na tři základní skupiny – viz obr. 3.19

regulační členy	proporcionální	$a_0 \neq 0; b_0 \neq 0$	$h(t)$ se ustálí na konečné hodnotě
	derivační	$a_0 \neq 0; b_0 = 0$	$h(t)$ se ustálí na nule
	integrační (astatické)	$a_0 = 0; b_0 \neq 0$	se neustálí



V tab. 3.2 jsou uvedeny jednotlivé regulační členy s odpovídajícími přenosy. Tím jsme se seznámili s používanou terminologií (místo „se zpožděním 1. řádu“, „se zpožděním 2. řádu“... je možno také používat „se setrvačností 1. řádu“, „se setrvačností 2. řádu“...).

Obr. 3.19

člen	ideální	se zpožděním 1.řádu	se zpožděním 2.řádu	obecný
proporcionální	$G(s) = k$	$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$	$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$
derivační	$G(s) = ks$	$G(s) = \frac{ks}{Ts + 1}$	$G(s) = \frac{ks}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$G(s) = \frac{s(b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$
integrační	$G(s) = \frac{k}{s}$	$G(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}$	$G(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)}$

Přenosy regulačních členů

Příklad 3.11: Určete správný název regulačních členů s přenosy

a) $G(s) = \frac{2s}{s+5}$ b) $G(s) = \frac{3}{s(s+2)}$ c) $G(s) = \frac{2s+1}{(3s+1)(5s+1)}$ d) $G(s) = \frac{2s}{3s^3 + 5s^2 + s + 1}$

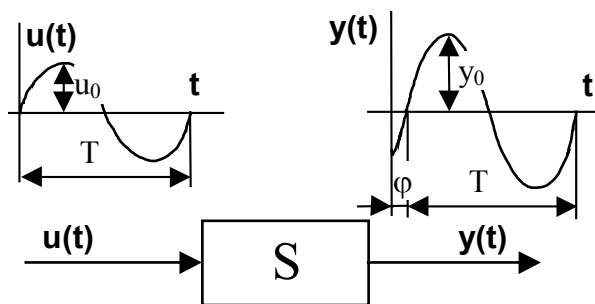
Řešení: a) derivační se zpožděním 1.řádu b) integrační se zpožděním 1.řádu
c) proporcionální se zpožděním 2.řádu d) derivační se zpožděním 3.řádu

3.7 Frekvenční přenos

Frekvenční přenos získáme tak, že na vstup systému přivedeme harmonický signál. Typickým harmonickým signálem je sinusový průběh

$$u(t) = u_0 \sin \omega t$$

amplituda vstupního signálu úhlová frekvence



Obr. 3.20

Na výstupu systému dostaneme podle obr. 3.20 (po odeznění přechodového jevu) opět sinusový signál ovšem s jinou amplitudou, stejnou úhlovou frekvencí a fázově proti vstupnímu signálu posunutý

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Výhodněji se ale jeví vyjádřit vstupní i výstupní funkci v komplexním tvaru

$$u(t) = u_0 e^{j\omega t}; \quad y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (3.30)$$

To jsou v komplexní rovině vektory, které se otáčí úhlovou rychlostí ω . Poměr těchto vektorů nám definuje **frekvenční přenos**

$$G(j\omega) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_0 e^{j\omega t}} = \frac{y_0}{u_0} e^{j\varphi} \quad (3.31)$$

kde $\frac{y_0}{u_0}$ je poměr amplitud a φ je fázové posunutí.

Nyní si ukážeme souvislost diferenciální rovnice systému a frekvenčního přenosu. Vyjdeme-li z obecného tvaru diferenciální rovnice systému (3.10)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$$

můžeme si podobně jako pro přenos $G(s)$ odvodit výpočtový vztah pro výpočet frekvenčního přenosu z koeficientů diferenciální rovnice

$$G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} \quad (3.32)$$

Vztah je formálně stejný jako vztah (3.13) pro přenos $G(s)$, pouze místo komplexní proměnné s v něm figuruje výraz $j\omega$. Tím je zároveň dána relace mezi přenosem a frekvenčním přenosem, která spočívá ve formální záměně s za $j\omega$ eventuálně naopak

$$\mathbf{G}(j\omega) = \mathbf{G}(s)_{\text{pro } s=j\omega}; \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{G}(j\omega)_{\text{pro } j\omega=s} \quad (3.33)$$

Zavedení frekvenčního přenosu má velký praktický význam pro řešení regulačních problémů. Frekvenční přenos je základem pro používání frekvenčních metod. Znázornění frekvenčního přenosu ve tvaru frekvenčních charakteristik nám umožní řešit otázky stability regulačních obvodů, kvalitu regulace i syntézu regulačních obvodů. Také je možno používat experimentálně zjištěné a naměřené frekvenční charakteristiky. O frekvenčních charakteristikách bude následující kapitola.

Příklad 3.12: Systém (regulační člen) je popsán diferenciální rovnicí

$$\text{a) } 5y' + 2y = 3u \quad \text{b) } 4y''' + 3y'' + 2y' + y = 0,5u' + 2u$$

Určete jeho frekvenční přenos.

Řešení: a) $G(j\omega) = \frac{3}{5j\omega + 2}$ b) $G(j\omega) = \frac{0,5j\omega + 2}{4(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$

Příklad 3.13: Systém (regulační člen) je popsán přenosem

$$\text{a) } G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{2s + 0,5}{5s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$$

Určete jeho frekvenční přenos.

Řešení: a) $G(j\omega) = \frac{3}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$

b) $G(j\omega) = \frac{2j\omega + 0,5}{5(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$

3.8 Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Frekvenční charakteristika je grafické vyjádření frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ v komplexní rovině, když za úhlovou frekvenci ω dosazujeme hodnoty 0 až ∞ .

Na základě této definice můžeme frekvenční charakteristiku sestavit jak je naznačeno na obr. 3.21.

Ovšem při praktickém sestavování frekvenční charakteristiky si frekvenční přenos $G(j\omega)$ ještě v obecném tvaru (před dosazením hodnot ω) upravíme na složkový tvar komplexního čísla (rozšířením zlomku číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli – bude ukázáno na příkladu 3.14)

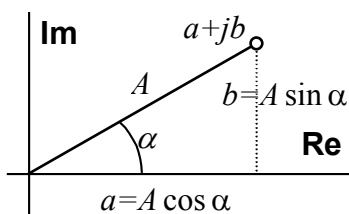
$$G(j\omega) = \text{Re } G(j\omega) + j \text{Im } G(j\omega) \quad (3.34)$$

Sestavíme si tabulku, kde k voleným hodnotám ω na kalkulačce počítáme hodnotu Re a Im a podle této tabulky pak frekvenční charakteristiku zkonstruujeme. Opět bude demonstrováno na uvedeném příkladu 3.14.

Ještě je možný a často používaný způsob konstrukce frekvenční charakteristiky z exponenciálního tvaru komplexního čísla. Z matematiky víme, že komplexní číslo $a+jb$ můžeme vyjádřit ve složkovém nebo goniometrickém nebo exponenciálním tvaru (obr. 3.22)

$$a + jb = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = A.e^{j\alpha} \quad \text{kde } A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{a} \quad \alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

exponenciální tvar
goniometrický tvar
složkový tvar



Obr. 3.22

Převod goniometrického na exponenciální tvar je podle Eulerova vztahu $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$. Upravíme si tedy frekvenční přenos $G(j\omega)$ na exponenciální tvar

$$G(j\omega) = A(\omega).e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.35)$$

a podle postupu uvedeného v příkladu 3.13 spočítáme do tabulky hodnoty A a φ pro volené hodnoty ω a z této tabulky zkonstruujeme frekvenční charakteristiku.

Příklad 3.14: Sestrojte frekvenční charakteristiku systému o přenosu

$$G(s) = \frac{1,5}{2s^2 + 3s + 1}$$

Řešení: Tento příklad budeme řešit oběma způsoby konstrukce frekvenční charakteristiky, tzn. jak ze složkového tvaru přenosu tak z exponenciálního tvaru.

Nejdříve provádíme konstrukci ze složkového tvaru $G(j\omega)$. Převedeme ho na tento tvar. Je-li komplexní číslo ve tvaru zlomku, převádíme ho na složkový tvar rozšířením zlomku číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli:

$$G(j\omega) = \frac{1,5}{2(j\omega)^2 + 3j\omega + 1} = \frac{1,5}{1 - 2\omega^2 + 3j\omega} \cdot \frac{1 - 2\omega^2 - 3j\omega}{1 - 2\omega^2 - 3j\omega} = \frac{1,5 - 3\omega^2}{(1 - 2\omega^2)^2 + 9\omega^2} - j \frac{4,5\omega}{(1 - 2\omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

Hodnoty $Re(\omega)$ a $Im(\omega)$ jsou v první části tabulky 3.3. Na základě této tabulky je sestrojena frekvenční charakteristika na obr. 3.23.

V dalším sestojíme tutéž frekvenční charakteristiku z exponenciálního tvaru frekvenčního přenosu

$$G(j\omega) = \frac{1,5}{\sqrt{(1 - 2\omega^2)^2 + 9\omega^2}} \cdot e^{-j \arctg \frac{4,5\omega}{1,5 - 3\omega^2}}$$

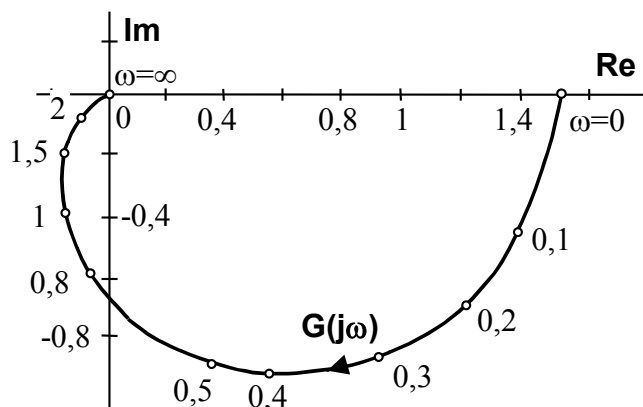
Zde jsme první část výrazu dostali jako

$$A = |G(j\omega)| = \left| \frac{1,5}{1 - 2\omega^2 + 3j\omega} \right| = \frac{|1,5|}{|1 - 2\omega^2 + 3j\omega|} = \frac{1,5}{\sqrt{(1 - 2\omega^2)^2 + (3\omega)^2}}$$

a druhou část výrazu ze složkového tvaru $G(j\omega)$ užitím vztahu $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$.

Vypočítané hodnoty $A(\omega)$ a $\varphi(\omega)$ jsou uvedeny v druhé části tabulky 3.3. Z nich je konstrukce frekvenční charakteristiky opět na obr. 3.23, frekvenční charakteristika se pochopitelně shoduje s předcházející.

ω	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	1,5	0	1,5	0°
0,1	1,39	-0,43	1,46	-17°01'
0,2	1,14	-0,74	1,37	-33°07'
0,3	0,83	-0,91	1,23	-47°40'
0,4	0,54	-0,95	1,09	-60°28'
0,5	0,3	-0,90	0,95	-71°34'
0,7	0,01	-0,71	0,71	-89°27'
0,8	-0,07	-0,62	0,62	-96°49'
1	-0,15	-0,45	0,47	-108°26'
1,5	-0,16	-0,21	0,26	-127°52'
2	-0,12	-0,11	0,16	-139°24'
10	-0,01	-0,01	0,01	-171°33'
ω	0	0	0	-180°



Tab. 3.3

Obr. 3.23

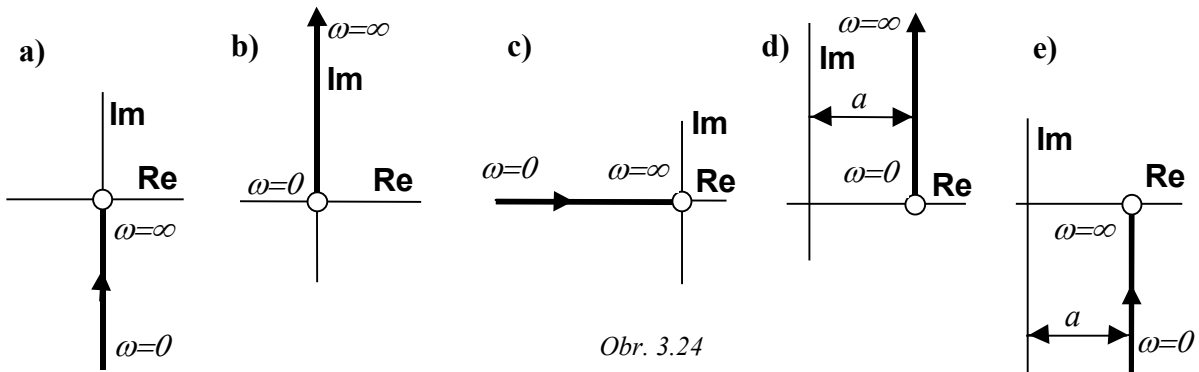
Příklad 3.15: Sestrojte frekvenční charakteristiky pro systémy s přenosy

a) $G(s) = \frac{k}{s}$ b) $G(s) = ks$ c) $G(s) = \frac{k}{s^2}$ d) $G(s) = ks + a$ e) $G(s) = \frac{k}{s} + a$

Řešení: Frekvenční přenosy jsou (eventuálně po úpravě)

a) $G(j\omega) = -j\frac{k}{\omega}$ b) $G(j\omega) = kj\omega$ c) $G(j\omega) = -\frac{k}{\omega^2}$ d) $G(j\omega) = kj\omega + a$ e) $G(j\omega) = -j\frac{k}{\omega} + a$

Odpovídající frekvenční charakteristiky jsou na obr. 3.24.



Obr. 3.24

Nyní něco o **tvary frekvenčních charakteristik**. Dá se snadno ukázat, že frekvenční charakteristika proporcionálního členu se zpožděním 1. řádu o přenosu

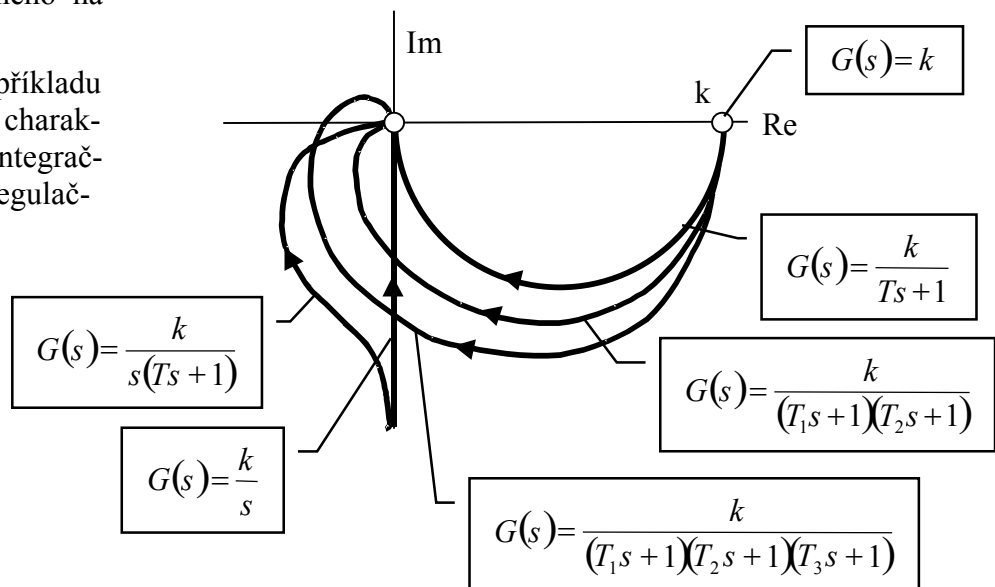
$$G(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)} \dots$$

je půlkružnice v kvadrantu $Re = +$, $Im = -$. Další proporcionální regulační členy o přenosech

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \dots$$

mají frekvenční charakteristiky, začínající ve stejném bodě $[k, 0]$ na reálné ose, končící v počátku souřadnicového systému a procházející tolika kvadranty, jaký je řád (jaké je zpoždění) regulačního členu – znázorněno na obr. 3.26.

Podle příkladu 3.17a je frekvenční charakteristika ideálního integračního (astatického) regulačního členu záporná imaginární poloosa. Další integrační členy o přenosech



Obr. 3.25

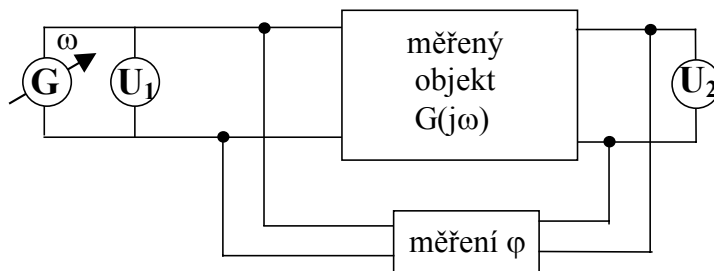
$$G(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \dots$$

mají frekvenční charakteristiku začínající limitně na záporné imaginární poloose, končící v počátku souřadnicového systému a procházející podle řádu (zpoždění) regulačního členu vždy o jeden kvadrant více než člen nižšího řádu – obr. 3.25.

Frekvenční charakteristiku lze přirozeně zkonstruovat z frekvenčního přenosu pro jakýkoliv systém. Ale v tom není hlavní význam frekvenčních charakteristik. Frekvenční metody mají především velký praktický význam proto, že je můžeme získat experimentálně – měřením na reálném zařízení.

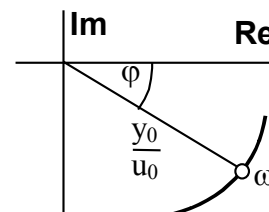
Postup při experimentálním zjišťování frekvenční charakteristiky je zhruba tento:

- na vstup systému přivedeme sinusový signál (generátor sinusových kmitů) o určité frekvenci $u = u_0 \sin \omega t$ - obr. 3.26
- zapisujeme průběh výstupního signálu (osciloskop, zapisovač), až se na výstupu ustálí sinusové kmity $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$
- ze záznamu vstupního a výstupního signálu určíme poměr amplitud $\frac{y_0}{u_0}$ a fázový posun φ
- z definice frekvenčního přenosu (3.31) $G(j\omega) = \frac{y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_0 e^{j\omega t}} = \frac{y_0}{u_0} e^{j\varphi}$ dostaneme jeden bod frekvenční charakteristiky podle obr. 3.27
- změníme frekvenci ω vstupního signálu a postup opakujeme pro získání dalšího bodu charakteristiky.



Obr. 3.26

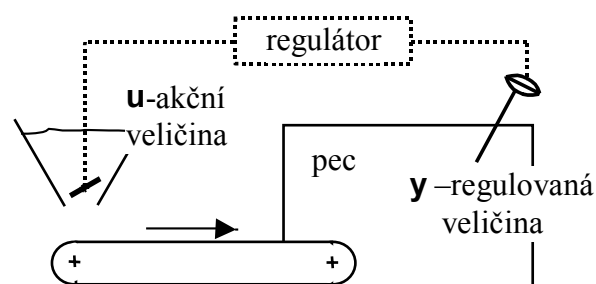
U elektrických a elektronických zařízení se tato úloha jeví jako celkem snadná. Horší je to už u mechanických systémů. Ještě bez větších problémů můžeme u pneumatických systémů přivádět na vstup sinusový signál laděného tlaku vzduchu. Použijeme totiž elektro-pneumatický převodník a sinusové kmity (zde a všude u pneumaticko-mechanických systémů o poměrně nízkém kmitočtu) získáme z elektrického generátoru. Obtížnou ovšem bude úloha pro mechanické systémy, kde musíme vnějšími budícími kmity rozkmitat mechanické zařízení a pak vhodným snímačem měřit výstupní kmity.



Obr. 3.27

3.9 Dopravní zpoždění

Zatím jsme mluvili o systémech, u kterých výstup reaguje na vstup bezprostředně – bez zpoždění. U některých systémů však právě k takovému zpoždění dochází. Provedeme změnu



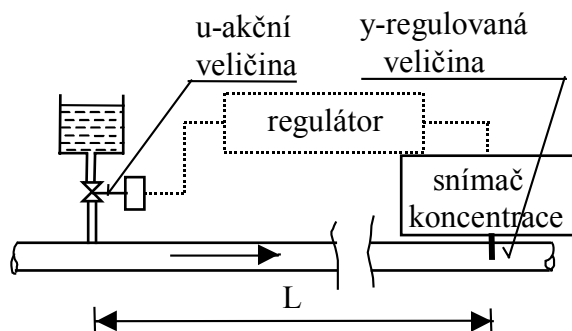
Obr. 3.28

na vstupu a na výstupu není žádná odezva. Teprve po uplynutí určité doby – tzv. **dopravního zpoždění T_D** - se začne měnit výstupní veličina. Tento jev se nejčastěji vyskytuje u některých regulovaných soustav, kde se vyskytuje doprava určitou rychlostí a po určité dráze.

Příkladem je pec na obr. 3.28, jejíž součástí je palivový pásový dopravník, což může být přímo i posuvný rošt cementářské

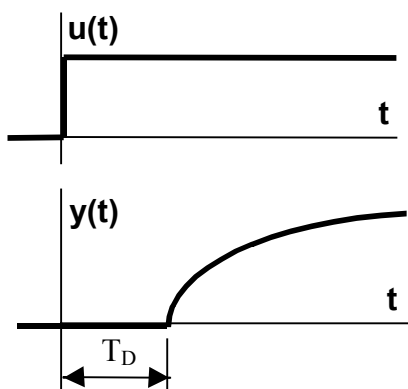
pece. Akční veličinou u je otevření násypky, odkud palivo padá na pásový dopravník, který je dopravuje do pece. Jestliže regulátor změni (představme si např. skokovou změnu) hodnotu akční veličiny u (to je vstupní veličina regulované soustavy, u níž se dopravní zpoždění projevuje), bude se výstupní veličina regulované soustavy, což je regulovaná veličina y (teplota v peci), měnit až po určité době. Tato doba je právě doba průchodu paliva pásovým dopravníkem a nazýváme ji dopravním zpožděním a označujeme T_D .

Další typický příklad regulované soustavy s dopravním zpožděním máme na obr. 3.29. Jedná se o dávkování chemikálie do užitkové vody. Akční veličinou u (vstupní veličina soustavy) je otevření dávkovacího ventilu. Když dojde ke změně akční veličiny u , nebude se regulovaná veličina y (koncentrace chemikálie v místě měření) měnit hned, ale až za dobu, kdy voda proteče vzdálenost L ke snímači a to je opět doba dopravního zpoždění T_D .



Obr. 3.29

Z uvedených příkladů je patrné, že dopravní zpoždění T_D u regulovaných soustav je zpožděná reakce výstupní veličiny (regulované veličiny y) na změnu vstupní veličiny (akční veličina u).



Obr. 3.30

Další změny výstupní veličiny jsou už dány jejím charakterem. Přechodová charakteristika soustavy se zpožděním prvního řádu typická pro soustavy s dopravním zpožděním je na obr. 3.30. Z podstaty dopravního zpoždění plyne, že má negativní vliv na ustálení regulačního pochodu (v dalším budeme říkat na stabilitu). Např. při regulaci pece podle obr. 3.28 dojde ke snížení teploty. Regulátor přestaví klapku násypky, aby se sypalo více paliva. Ovšem vlivem dopravního zpoždění na pásovém dopravníku přichází do pece ještě určitou dobu stejné množství paliva a teplota se proto nezvyšuje. Regulátor na to reaguje dalším otevíráním klapky násypky a zvětšením sypaného množství. Tím se ovšem

po nějaké době teplota zvýší neúměrně více než bylo zapotřebí. Pak dochází k obrácenému pochodu a je zpožděno zase zmenšení dodávky paliva pásovým dopravníkem a dojde k neúměrnému snížení teploty v peci. Regulovaná veličina se těžko ustálí na nastavené teplotě (v dalším budeme říkat, že regulace je málo stabilní anebo je nestabilní).

Hodnoty dopravního zpoždění T_D mohou být řádově jak sekundy, tak i desítky minut např. u posuvných roštů cementářských pecí. Samozřejmě o jejich zanedbatelnosti či nezanedbatelnosti rozhoduje relace mezi T_D a ostatními časovými konstantami regulované soustavy. Kdybychom při výpočtu regulačních pochodů zanedbali dopravní zpoždění tam, kde je řádově srovnatelné s časovými konstantami soustavy nebo je dokonce větší než jsou časové konstanty, dopustili bychom se velmi podstatné chyby.

Diferenciální rovnice systému (3.10) bude platit pro systémy s dopravním zpožděním ve tvaru

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t - T_D) + \dots + b_1 u'(t - T_D) + b_0 u(t - T_D) \quad (3.36)$$

a jeho přenos bude

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} e^{-T_D s} \quad (3.37)$$

Říkáme, že přenos soustavy s dopravním zpožděním je roven přenosu téže soustavy bez dopravního zpoždění, vynásobeného výrazem $e^{-T_D s}$.

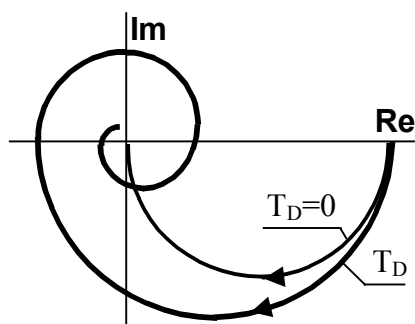
Frekvenční přenos se získá záměnou $j\omega$ za s , tedy

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (3.38)$$

Platí tedy opět

$$G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} e^{-j\omega T_D} \quad (3.39)$$

Jak se změní frekvenční charakteristika u systému s dopravním zpožděním oproti systému bez dopravního zpoždění ($T_D=0$) nám ukazuje obr. 3.31. Frekvenční charakteristiky systémů s dopravním zpožděním se spirálovitě otáčí kolem počátku, když začátek charakteristiky je stejný jako charakteristiky bez dopravního zpoždění.



Obr. 3.31

Příklad 3.16: Diferenciální rovnice regul.soustavy je

$$y''' + 5y'' + 4y' + y = 1,5u' + 3u$$

Jak se změní rovnice soustavy, jaký bude přenos a frekvenční přenos, když soustava bude mít dopravní zpoždění $T_D = 6,5$ s?

Řešení:

$$y'''(t) + 5y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 1,5u'(t - 6,5) + 3u(t - 6,5)$$

$$G(s) = \frac{1,5s + 3}{s^3 + 5s^2 + 4s + 1} e^{-6,5s}$$

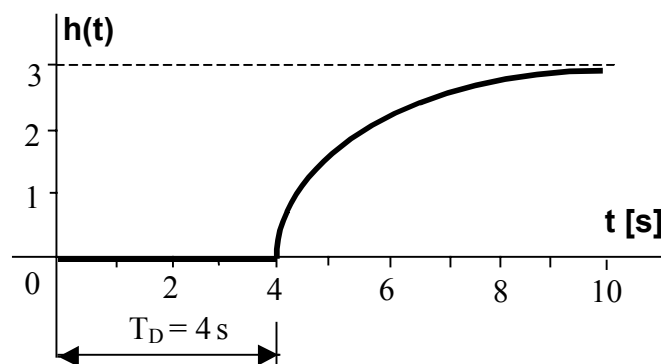
$$G(j\omega) = \frac{1,5j\omega + 3}{(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 4j\omega + 1} e^{-6,5j\omega}$$

Příklad 3.17: Nakreslete přechodovou charakteristiku regulované soustavy o přenosu

$$G(s) = \frac{3}{1 + 3s} e^{-4s}$$

Řešení: Určíme přechodovou funkci této soustavy bez dopravního zpoždění

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{1 + 3s} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{3}{s} - \frac{3}{s + 0,33} \right\} = 3(1 - e^{-0,33t}) \end{aligned}$$



Obr. 3.32

Při kreslení přechodové charakteristi-

ky musíme tuto posunout o hodnotu dopravního zpoždění $T_D = 4$ s, jak je provedeno na obr. 3.32.

3.10 Bloková algebra

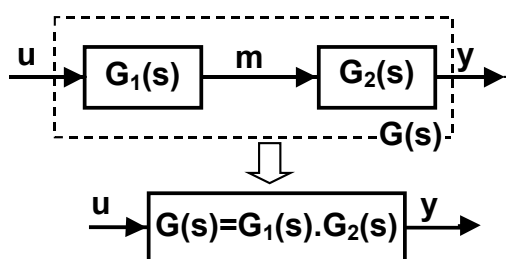
Přenos systému nám umožňuje vyjádřit vztah mezi obrazem vstupní a výstupní veličiny. V praxi se většinou setkáváme se složitějšími systémy, které se ale dají rozložit na spojení elementárních členů. Pro vyjádření vazeb mezi těmito členy používáme bloková schémata. Každý člen je znázorněn obdélníkovým blokem, v němž si představujeme soustředěny jeho dynamické vlastnosti. Vstup systému je označen čarou se šipkou, směřující do bloku, výstup je označen čarou se šipkou, směřující z bloku. V praxi používáme schémata s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou pro každý blok.

Spojovací čáry mezi bloky označují šíření signálu a jeho směr je vyznačen šipkou. Jestliže se signál rozděluje do více bloků, označí se rozdělovací místo tečkou. Jestliže se naopak několik signálů algebraicky sčítá v jeden signál, označí se součtové místo kroužkem s křížkem (při odečítání se příslušná část vyčerní).

Vycházíme z toho, že bloky jsou popsány svými přenosy $G(s)$. V případě, že jsou popsány jiným způsobem (diferenciální rovnici, přechodovou funkcí nebo charakteristikou, ...) musíme tento popis převést na přenos. Přenos se na blokových schématech označuje vepsáním přenosu do příslušného bloku. Protože ale chceme přenosem popsat celý systém nebo podsystem, musíme znát metodiku, jak určit přenos celku, známe-li přenosy jednotlivých členů, z nichž se skládá. **Pravidla, podle nichž vytváříme přenos celku z dílčích přenosů jednotlivých členů, nazýváme blokovou algebrou.** Někdy se nazývá algebra přenosů nebo též algebra blokových schémat.

Při zkoumání blokových schémat zjistíme, že existují tři základní zapojení: sériové, paralelní a antiparalelní (neboli zpětnovazební).

Sériové zapojení. Je to takové zapojení, při kterém výstupní veličina předcházejícího členu je vstupní veličinou následujícího – obr. 3.33. Hledáme výsledný přenos zapojení.



Obr. 3.33

$$G_1(s) = \frac{M(s)}{U(s)} \Rightarrow M(s) = G_1(s) \cdot U(s)$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} \Rightarrow Y(s) = G_2(s) \cdot M(s)$$

$$Y(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot U(s)$$

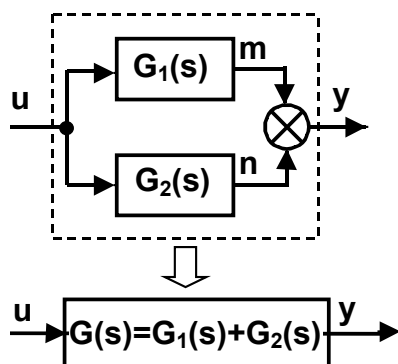
$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)} \quad (3.40)$$

Zde jsme si označili pomocnou veličinu m , kterou jsme vzápětí vyliminovali. Slovně vyjádřeno: **Při sériovém zapojení je výsledný přenos dán součinem dílčích přenosů.**

Paralelní zapojení. Je to takové zapojení, při kterém máme jednu vstupní veličinu pro všechny členy a výstupní veličiny jednotlivých bloků se sčítají – obr. 3.34. Opět hledáme výsledný přenos zapojení.

$$G_1(s) = \frac{M(s)}{U(s)} \quad G_2(s) = \frac{N(s)}{U(s)} \quad \downarrow$$

$$m(t) + n(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad M(s) + N(s) = Y(s)$$



Obr. 3.34

$$U(s)G_1(s) + U(s)G_2(s) = Y(s)$$

$$U(s)[G_1(s) + G_2(s)] = Y(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) \quad (3.41)$$

Pomocné veličiny m a n byly vyeliminovány a teď závěr: **Při paralelním zapojení je výsledný přenos součtem dílčích přenosů.** Kdyby byl místo sečítání signálů vytvářen jejich rozdíl, bylo by ve výsledném vztahu znaménko mínus.

Antiparalelní (zpětnovazební) zapojení. Je to takové zapojení dvou členů, kdy se výstupní veličina zapojení vede zpět na vstup, kde se odečítá (nebo též přičítá) od vstupního signálu – obr. 3.35.

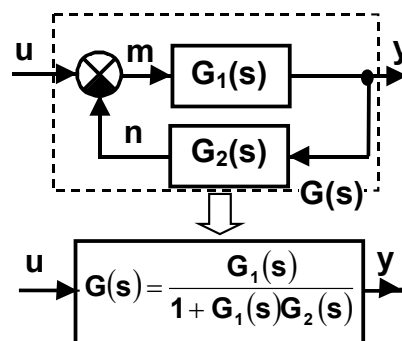
$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} \quad G_2(s) = \frac{N(s)}{Y(s)}$$

$$m(t) = u(t) - n(t) \quad \Rightarrow \quad M(s) = U(s) - N(s)$$

$$\frac{Y(s)}{G_1(s)} = U(s) - G_2(s)Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{G_1(s)} + G_2(s)Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) \left[\frac{1}{G_1(s)} + G_2(s) \right] = U(s)$$



Obr. 3.35

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{1}{G_1(s)} + G_2(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (3.42)$$

Pomocné veličiny m a n byly opět vyeliminovány a výsledek: **Při antiparalelním (zpětnovazebním) zapojení je výsledný přenos dán zlomkem, kde v čitateli je tzv. přenos přímé větve a ve jmenovateli jedna plus součin přenosu přímé větve a přenosu zpětné vazby.**

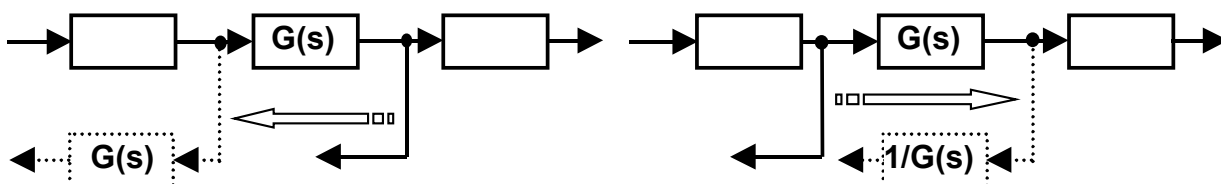
Uvažované antiparalelní zapojení se nazývá **záporná zpětná vazba**, protože se na vstupu zapojení odečítá výstupní signál. Toto zapojení je základem všech regulačních obvodů. Tím, že na vstupu odečítáme výstupní signál se vytváří tzv. regulační odchylka, kterou právě regulátor působí na regulovanou soustavu a tuto odchylku odstraňuje a dosahuje tím shody vstupní a výstupní veličiny. O tom bude mluveno v dalším.

Kdybychom výstupní signál ke vstupu přičítali, jednalo by se o kladnou zpětnou vazbu, která se v regulační technice nepoužívá (na jejím principu jsou založeny generátory sinusových kmitů v elektronice) a podobným způsobem jako jsme odvodili vzorec pro zápornou zpětnou vazbu bychom odvodili výsledný přenos pro kladnou zpětnou vazbu

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} \quad (3.43)$$

Poznámka: V dalším si spočítáme příklady na blokovou algebru, kdy hledáme výsledný přenos složitějších systémů. Jedná se jednak o příklady, kdy postupným zjednodušováním schématu se dostaneme k cíli. Vedle toho to jsou příklady tzv. **překřížených vazeb**, kdy musíme některé vazby změnit, abychom určili typ zapojení a stanovili přenos.

Jedná se o přemístění místa rozvětvení. Přemístíme-li podle obr. 3.36 bod rozvětvení proti směru signálu, potom musíme do přemísťované větve zapojit člen s přenosem, který je mezi původním a novým bodem rozvětvení.



Obr. 3.36

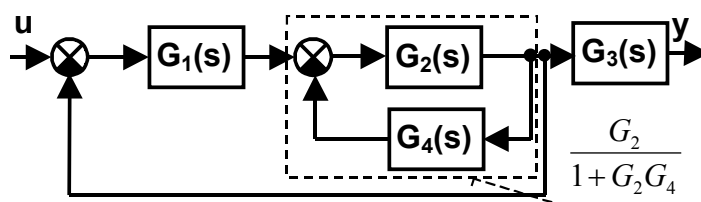
Obr. 3.37

Přemísťujeme-li bod rozvětvení ve směru signálu, zapojíme tam člen o přenosu rovný převrátné hodnotě přenosu mezi původním a novým bodem rozvětvení – obr. 3.37.

Příklad 3.18: Určete výsledný přenos zapojení podle obr. 3.38.

Řešení: Obecně platí u příkladů tohoto typu, že musíme přes známá základní zapojení stále zjednodušovat, až se propracujeme k výslednému přenosu.

$$G(s) = \frac{G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_4(s)} G_3(s)}{1 + G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_4(s)}}$$

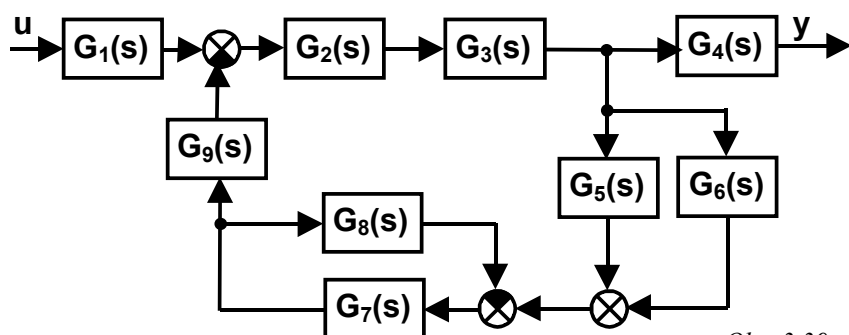


Obr. 3.38

Poznámka: Pokud ve vazbě není žádný člen, počítáme s tím, že je tam člen s přenosem rovným jedné.

Příklad 3.19: Určete jaký je výsledný přenos zapojení podle obr. 3.39.

Řešení: Metodika řešení tohoto příkladu není jiná, než u předchozího příkladu.

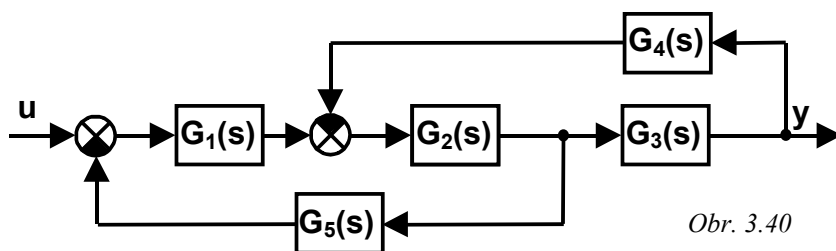


Obr. 3.39

$$G(s) = G_1(s) \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)[G_5(s) + G_6(s)] \frac{G_7(s)}{1 + G_7(s)G_8(s)} G_9(s)} G_4(s)$$

Příklad 3.20: Určete výsledný přenos zapojení podle obr. 3.40.

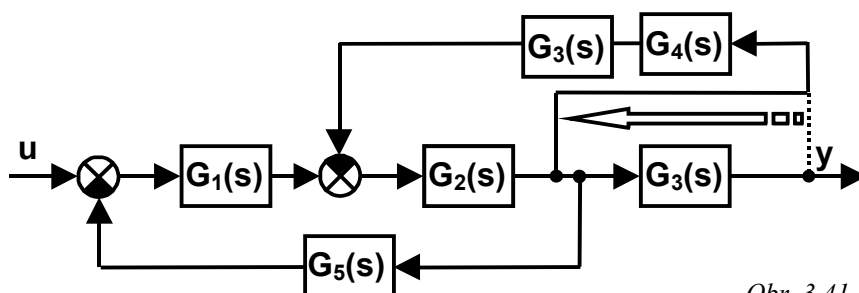
Řešení: Toto je první z příkladů na zapojení s překříženými vazbami. V první fázi nemůžeme poznat, o jaké zapojení se jedná. Proto musíme přeložit některou z vazeb, abychom mohli zapojení jasně identifikovat. Jsou dvě varianty řešení. První varianta je přeložit vazbu s přenosem $G_4(s)$ proti směru signálu. Druhá varianta je přeložit vazbu s přenosem $G_5(s)$ ve směru signálu.



Obr. 3.40

1.varianta řešení:

Podle obr. 3.41 přeložíme vazbu s přenosem $G_4(s)$ proti směru signálu a proto musíme do vazby vložit člen s přenosem $G_3(s)$ (o který se vazba proti směru signálu posunula). Na tomto zapojení už není překřížených vazeb a snadno podle něho určíme výsledný přenos, který ještě také upravíme, abychom ho mohli srovnat s řešením podle druhé varianty:



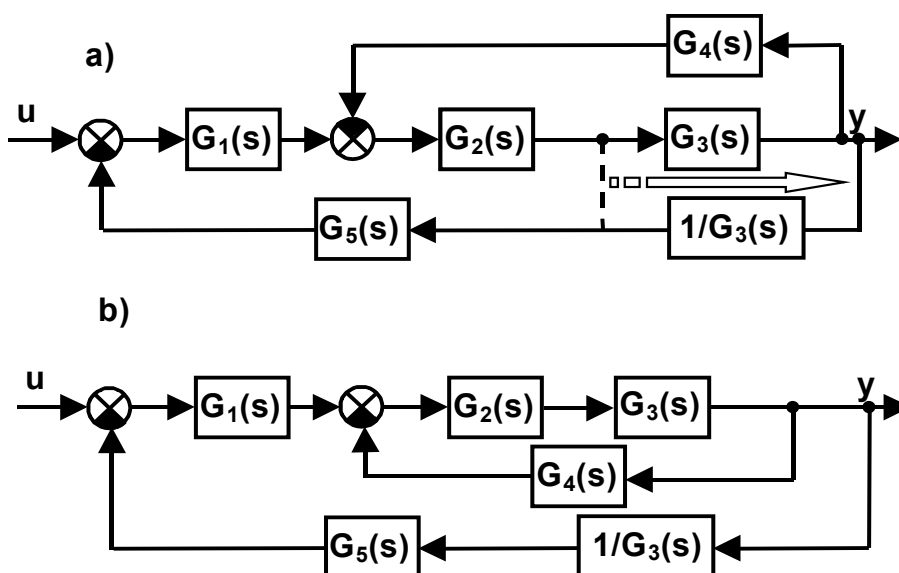
Obr. 3.41

$$G(s) = \frac{G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)}}{1 + G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)} G_5(s)} G_3(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_5(s)}$$

2.varianta řešení:

Podle obr. 3.42a posuneme vazbu s přenosem $G_5(s)$ ve směru signálu a zařadíme do ní člen s přenosem $1/G_3(s)$, o který se vazba ve směru signálu posunula. Toto pravidlo bylo vysloveno v úvodu kapitoly o blokové algebře.

Potom si obrázek překreslíme tak, abychom měli zcela jasno o jaké zapojení se jedná (obr.3.42b) a napíšeme výsledný přenos, který se po úpravě shoduje s přenosem vypočítaným v 1.variantě:

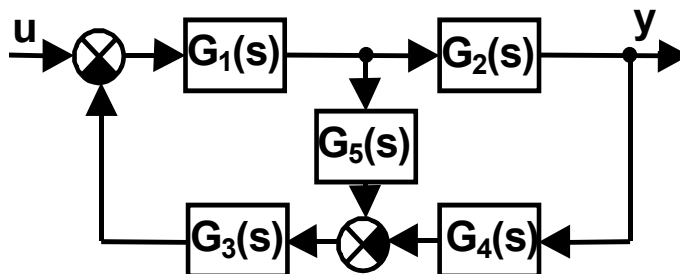


Obr. 3.42

$$G(s) = \frac{G_1(s) \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)}}{1 + G_1(s) \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)} G_5(s) \frac{1}{G_3(s)}} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_5(s)}$$

Příklad 3.21: Určete výsledný přenos zapojení podle obr. 3.43.

Řešení: Stejným způsobem jako v předešlém příkladu a to minimálně dvěma způsoby určíme výsledný přenos

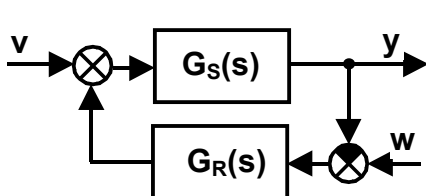


Obr. 3.43

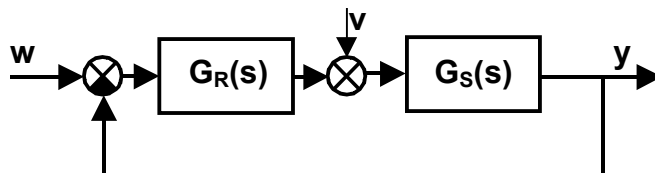
$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_3(s)G_5(s) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

Pravidla blokové algebry můžeme použít pro obecná bloková schémata. Teď je použijeme pro regulační obvod. Budeme uvažovat jednoduchý regulační obvod s jednou vstupující poruchovou veličinou, která pro jednoduchost vstupuje na začátku regulované soustavy. Takový obvod můžeme nakreslit dvojím způsobem (podobně jako tomu bylo u obvodu na obr. 3.2 a 3.3) a oba způsoby jsou na obr. 3.44 a 3.45. Znovu zdůrazňeme, že se jedná o jeden a tentýž obvod. Regulovaná soustava je zde dána svým přenosem $G_S(s)$ a regulátor také svým přenosem $G_R(s)$.

Nejdříve si spočítáme přenos regulačního obvodu, uvažujeme-li, že vstupním signálem je



Obr. 3.44



Obr. 3.45

řídící veličina w a do obvodu nevstupují žádné poruchové veličiny, tedy $v=0$. Přenos se lépe počítá z obr. 3.45 a protože se jedná o zápornou zpětnou vazbu (antiparalelní zapojení) je

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (3.44)$$

Tento přenos se nazývá **přenos řízení** $G_w(s)$ a vyjadřuje závislost regulované veličiny y na řídící veličině w když nepůsobí poruchová veličina.

Označili jsme si zde součin přenosu regulované veličiny a přenosu regulátoru $G_0(s)$

$$G_0(s) = G_S(s)G_R(s) \quad (3.45)$$

Tento přenos nazýváme **přenos rozpojeného obvodu** a označujeme symbolem $G_0(s)$. Název je vzat z toho, že ve smyčce regulačního obvodu je sériové zapojení soustavy a regulátoru (kdyby-

chom ho v některém místě rozpojili, je přenos tohoto zapojení dán právě $G_0(s)$, ale se znaménkem mínus).

Závislost regulované veličiny y na poruchové veličině v když nepůsobí řídící veličina ($w=0$) vyjadřujeme **přenosem poruchy** $G_v(s)$

$$\boxed{G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + G_s(s)G_R(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + G_0(s)}} \quad (3.46)$$

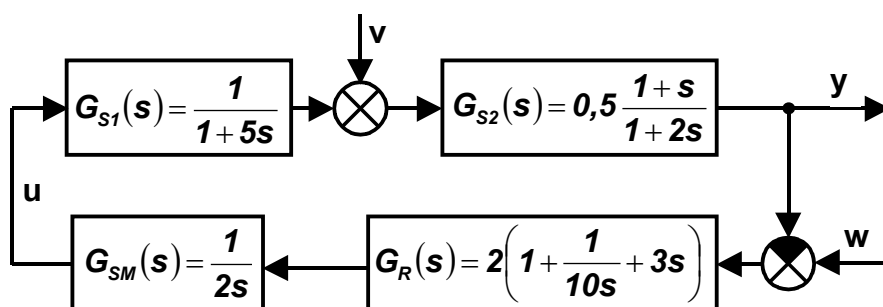
Tento přenos je opět spočítán jako antiparalelní zapojení podle obr. 3.44 nebo 3.45 (lépe se to vidí z obr. 3.44, ale musíme si uvědomit, že se nejedná o kladnou zpětnou vazbu – výstupní signál se připočítává ke vstupnímu, ale se záporným znaménkem, protože v předcházejícím rozdílovém uzlu se při $w=0$ pouze změnilo znaménko signálu).

Již na tomto místě si všimněme, že přenos řízení i přenos poruchy mají ve jmenovateli stejný výraz $1 + G_0(s)$, který bude mít klíčový význam při vyšetřování stability, a to jako charakteristická rovnice regulačního obvodu

$$\boxed{1 + G_0(s) = 0} \quad (3.47)$$

Poznámka: Pokud se vyskytne případ, že poruchová veličina vstupuje na jiném místě regulované soustavy než na vstupu akční veličiny nebo je více poruchových veličin (v tom případě mluvíme vždy o přenosu příslušné poruchové veličiny $G_{v1}(s) = \frac{Y(s)}{V_1(s)}$, $G_{v2}(s) = \frac{Y(s)}{V_2(s)}$, ...), stanovujeme přenosy vždy podle pravidel blokové algebry, jak bude ukázáno v příkladu 3.25.

Příklad 3.22: Stanovte přenos řízení a přenos poruchy regulačního obvodu podle obr. 3.46, který se skládá z regulované soustavy a regulátoru se servomotorem. Poruchová veličina zde vstupuje uprostřed regulované soustavy a dělí ji na dva bloky o přenosech $G_{S1}(s)$ a $G_{S2}(s)$.



Obr. 3.46

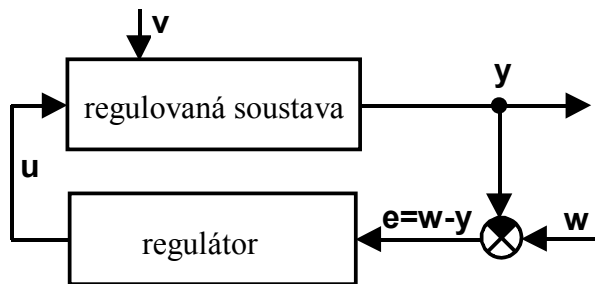
Řešení:

$$\begin{aligned} G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{G_R(s)G_{SM}(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)}{1 + G_R(s)G_{SM}(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)} = \frac{2\left(1 + \frac{1}{10s} + 3s\right) \frac{1}{2s} \frac{1}{1+5s} 0,5 \frac{1+s}{1+2s}}{1 + 2\left(1 + \frac{1}{10s} + 3s\right) \frac{1}{2s} \frac{1}{1+5s} 0,5 \frac{1+s}{1+2s}} = \\ &= \frac{1,5s^3 + 2s^2 + 0,55s + 0,05}{10s^4 + 8,5s^3 + 3s^2 + 0,55s + 0,05} \end{aligned}$$

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{S2}(s)}{1 + G_R(s)G_{SM}(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)} = \frac{0,5 \frac{1+s}{1+2s}}{1 + 2 \left(1 + \frac{1}{10s} + 3s \right) \frac{1}{2s} \frac{1}{1+5s} 0,5 \frac{1+s}{1+2s}} =$$

$$= \frac{2,5s^2 + 3s + 0,5}{10s^4 + 8,5s^3 + 3s^2 + 0,55s + 0,05}$$

3.11 Regulátory – základy, dynamické vlastnosti



Obr. 3.47

Regulátor je zařízení, které provádí regulaci, čili které prostřednictvím akční veličiny působí na regulovanou soustavu tak, aby se regulovaná veličina udržovala na předepsané hodnotě (ve zvláštních případech to nemusí být konstantní hodnota) a regulační odchylka byla nulová nebo co nejmenší. Podle obr. 3.47 se regulační obvod skládá z regulované soustavy a regulátoru. Všechny členy tohoto obvodu

s výjimkou regulované soustavy tedy zahrnujeme pod pojem regulátor. U většiny průmyslových regulací ho vyrábí specializovaný výrobce, jiný než je výrobce regulované soustavy. Proto v těchto průmyslových regulacích bývá výrazně odlišen od regulované soustavy.

Vlivem poruchy v dojde ke změně regulované veličiny, která se odchýlí od požadované hodnoty, která je nastavena prostřednictvím řídicí veličiny w . Není-li shoda mezi řídicí veličinou w a regulovanou veličinou y . Vznikne regulační odchylka $e = w - y$. A právě tuto odstraňuje regulátor svým zásahem do regulované soustavy prostřednictvím akční veličiny u . Vlivem toho, že v obvodu je záporná zpětná vazba, je zásah regulátoru takového charakteru, že působí zmenšování regulační odchylky. A pokud je regulační odchylka nulová, je regulátor bez funkce, na jeho vstupu je nula.

Klasické rozdělení regulátorů bylo na regulátory **direktní (přímé)** a **indirektní (nepřímé)**. Direktní regulátory nepotřebovaly ke své činnosti pomocnou energii a veškerou energii potřebnou ke své činnosti odebíraly z regulované soustavy. Příkladem je regulátor hladiny, uvedený na obr.3.1. Síla plováku zde stačila k přestavení regulačního ventilu. Jako direktní regulátor funguje jehlový ventil při regulaci hladiny v karburátoru. Ale nejznámějším direktním regulátorem byl dnes už klasický Wattův regulátor otáček s roztěžníkem, používaný dříve u parních strojů. Direktní regulátory se až na malé výjimky dnes už nepoužívají. Byly sice jednoduché a spolehlivé, ale jejich regulační dynamické vlastnosti nebyly dobré.

Dnes používané indirektní regulátory vyžadují vždy pomocný zdroj energie. A právě podle této pomocné energie je konstrukčně dělíme na regulátory **pneumatické, hydraulické a elektrické**.

Pneumatické regulátory jsou vhodné v závodech, kde je proveden rozvod tlakového vzduchu. Dříve se hojně používaly ve výbušných prostředích (chemické výroby, naftové rafinerie, ...), kde se nemohly použít elektrické regulátory. Dnes je ale vytlačily právě elektrické regulátory vyrobené v nevýbušném provedení. Pneumatické regulátory jsou propojeny trubičkami, porucha se může zjistit podle syčení unikajícího vzduchu. Ke své činnosti používají ventily, membrány, clony a podobné pneumatické prvky.

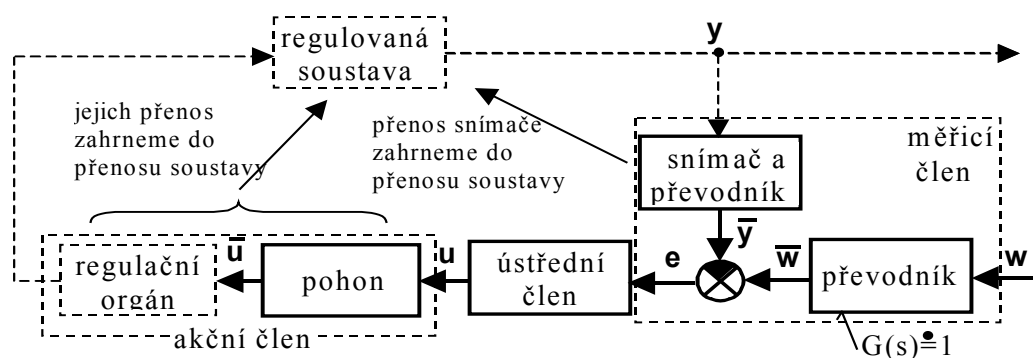
Hydraulické regulátory využívají k napájení tlakový olej. Mohou vyvinout velkou sílu. Proto se používají (třeba v kombinacemi s jinými typy regulátorů) hydraulické servoválce jako silové ovládací servomotory např. k ovládání regulačních lopatek vodních turbin apod.

Nejpoužívanější jsou elektrické regulátory, které využívají k napájení elektrickou energii. Většinou jsou to elektronická zařízení (operační zesilovače), pouze akční členy jsou elektromechanické (servomotory, elektromagnety). Největší výhodou elektronických regulátorů jsou dobré regulační vlastnosti, malé rozměry a malá hmotnost, vysoká energetická účinnost, čistý a bezhlučný provoz, relativně nízká cena. Nevýhodou je větší složitost, která komplikuje opravy. Se zavedením integrovaných obvodů a dalších moderních součástí vzrostla i spolehlivost těchto systémů. Dnes nemají konkurenci v ostatních typech regulátorů.

Podle průběhu výstupního signálu se regulátory dělí na **spojité a nespojité**. Spojité regulátory pracují se spojitými signály. Hlavními stavebními prvky jsou operační zesilovače. Kvalita regulace je velmi dobrá, návrh regulace je poměrně snadný. Jsou základem regulační techniky. Nespojité regulátory pracují s nespojitými signály. Dnes do popředí vystupují diskrétní regulátory, jejichž výstup je posloupnost numerických hodnot – jsou to číslicové počítače ve funkci regulátorů. Do nespojitých regulátorů zařazujeme i regulátory dvoupolohové – charakter nespojitosti je zde ovšem trochu jiný, než u diskrétních regulátorů.

Také se uvažuje dělení regulátorů na **lineární a nelineární**. Rozhodujícím prvkem je zde statická charakteristika. V dalším se budeme zabývat regulátory lineárními.

Regulátor není jeden prvek. Skládá se z několika prvků, jak bude patrné z obr. 3.48. Základem jsou tři prvky zapojené v sérii a to **měřicí člen** (též čidlo, snímač), **ústřední člen** a **akční člen** (pohon, servomotor).



Obr. 3.48

Měřicím členem zjišťujeme skutečnou hodnotu regulované veličiny, převádíme ji na elektrické napětí (u elektrických regulátorů) a vytváříme regulační odchylku. Měřicí člen se skládá ze snímače s převodníkem, z převodníku řídicí veličiny a z porovnávacího členu.

Snímač zjišťuje časový průběh regulované veličiny. Podle toho, jakou fyzikální veličinu regulujeme, volíme druh snímače. Abychom docílili dobré regulace, musíme volit vhodný snímač i jeho umístění na regulované soustavě. U snímače nás zajímá hlavně jeho přesnost, neboť regulační obvod nemůže regulovat přesněji, než je přesnost snímače. Výstupem snímače je signál úměrný regulované veličině, který je jiné fyzikální povahy (proto říkáme snímač s převodníkem – regulovaná veličina je snímačem převedena, a to nejčastěji na elektrické napětí nebo proud, tlak vzduchu nebo oleje).

Porovnávací člen provádí odečítání výstupního signálu ze snímače od signálu žádané hodnoty regulované veličiny a takto vytvořený rozdíl je regulační odchylka.

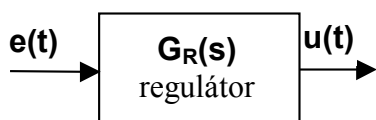
Ústřední člen regulátoru zpracovává regulační odchylku. Regulační odchylku může zesilovat, integrovat a derivovat. Označuje se často jako regulátor v užším slova smyslu a často tím

pádem pod pojmem regulátor myslíme pouze ústřední člen. Ústřední člen má rozhodující vliv na regulační pochod. Jeho vlastnosti můžeme volit a právě při návrhu regulátoru hledáme takový ústřední člen s takovými parametry, které nám zajistí vyhovující vlastnosti celého obvodu. Budeme-li se v dalším zabývat dynamickými vlastnostmi regulátoru, budeme se zabývat výhradně dynamickými vlastnostmi ústředního členu.

Akční člen regulátoru se skládá z pohonu a regulačního orgánu. Regulační orgán je už často považován za součást regulované soustavy. Pohon nebo někdy též servomotor dodává energii regulačnímu orgánu, mění jeho polohu, natočení, otevření apod. Regulační orgán přímo ovládá akční veličinu. Mezi regulační orgány zahrnujeme různé ventily, klapky, šoupátka apod. U regulačního orgánu požadujeme lineární závislost mezi polohou pohonu a akční veličinou.

Z funkce regulátoru vyplývá, že úlohou čidla s převodníkem a převodníku pro řídicí veličinu je převést obě veličiny y , w na stejnou fyzikální veličinu (u elektrických regulátorů na elektrické napětí), aby se v porovnávacím členu mohl realizovat jejich rozdíl. Protože žádné jiné požadavky na tyto členy neklademe, bude vhodné, když jejich přenos bude přibližně roven jedné. To lze obvykle snadno splnit u převodníku pro řídicí veličinu. V případě snímače je to obtížné, snímače mívají charakter proporcionálního členu se zpožděním někdy i vyššího řádu. Abychom mohli blokové schéma regulačního obvodu zjednodušit (obr. 3.58), zahrnujeme přenos snímače do přenosu regulované soustavy. Stejně je tomu s přenosem pohonu a regulačního orgánu, pokud se jejich přenos neblíží jedničce a není tudíž zanedbatelný (vzhledem k malým časovým konstantám).

Některé pohony však mají integrační charakter a pak výrazně mění charakter regulované soustavy.



Obr. 3.49

Ted' se budeme zabývat dynamickými vlastnostmi regulátoru, přesněji řečeno dynamickými vlastnostmi ústředního členu regulátoru. Podle obr. 3.49 je vstupem regulátoru regulační odchylka (její časový průběh) $e(t)$ a výstupem akční veličina $u(t)$.

Regulátor může regulační odchylku zesilovat, integrovat a derivovat. Nejjednodušší případ je pouhé zesilování – regulátor je prostý zesilovač. V tomto případě je akční veličina úměrná regulační odchylce

$$u = r_0 e \quad (3.48)$$

Takový regulátor se nazývá **proporcionální** neboli **P regulátor**.

Častým případem regulátoru je také takový, kdy akční veličina je úměrná integrálu regulační odchylky

$$u = r_{-1} \int e dt \quad (3.49)$$

a pak se jedná o **integrační** neboli **I regulátor**.

Technická realizace není možná u regulátoru, kde by akční veličina byla úměrná derivaci regulační odchylky (protože by došlo k rozpojení regulačního obvodu v ustáleném stavu)

$$u = r_1 e' \quad (3.50)$$

a to by byl případ regulátoru **derivačního** neboli **D regulátoru**.

Kombinací těchto základních typů vzniknou další regulátory. Regulátor **proporcionálně-integrační** neboli **PI regulátor** má akční veličinu úměrnou jak regulační odchylce, tak jejímu integrálu, přičemž vliv toho anebo onoho se dá zvětšit anebo zmenšit volbou konstant

$$u = r_0 e + r_{-1} \int e dt \quad (3.51)$$

Podobně regulátor **proporcionálně-derivační** neboli **PD regulátor** má akční veličinu úměrnou regulační odchylce a její derivaci

$$u = r_0 e + r_1 e' \quad (3.52)$$

a konečně regulátor **proporcionálně-integračně-derivační** neboli **PID regulátor** má akční veličinu úměrnou regulační odchylce, jejímu integrálu a její derivaci

$$u = r_0 e + r_{-1} \int e dt + r_1 e' \quad (3.53)$$

PID je vzhledem k předcházejícím typům obecným typem regulátoru a na ostatní se můžeme dívat tak, že některá z konstant r_0 , r_{-1} nebo r_1 je rovna nule.

Regulátor o rovnici (3.53) je ovšem ideální PID regulátor. U každého skutečného regulátoru se uplatňují různá zpoždění způsobená setrvačností, pasivními odpory, kapacitou apod. To znamená, že se na levé straně diferenciální rovnice ještě objeví zpožďující členy

$$\dots + T_2 u'' + T_1 u' + u = r_0 e + r_{-1} \int e dt + r_1 e' \quad (3.54)$$

To je rovnice skutečného PID regulátoru. Hydraulické a pneumatické regulátory mají zpožďující konstanty T_1 , T_2 , ... značně veliké. Naproti tomu elektronické regulátory mají tyto konstanty T_1 , T_2 , ... zanedbatelné a svým charakterem se blíží ideálnímu regulátoru.

Přenos ideálního PID regulátoru je z rovnice (3.53)

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s \quad (3.55)$$

a skutečného PID regulátoru z rovnice (3.54)

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s}{1 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots} \quad (3.56)$$

Konstanty r_0 , r_{-1} a r_1 v rovnicích regulátorů určují vliv jednotlivé složky (proporcionální, integrační nebo derivační) na tvorbu výsledné akční veličiny. V regulátorech jsou stavitelné a dají se nastavit tak, aby výsledná regulace splňovala to, co od ní očekáváme. Častěji se však udávají v jiném tvaru. Přenos ideálního PID regulátoru (3.55) si vyjádříme vytknutím r_0 v jiném tvaru

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s = r_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_{-1}} s} + \frac{r_1}{r_0} s \right) = r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (3.57)$$

derivační časová konstanta T_d [s]

zesílení r_0 [-]

integrační časová konstanta T_i [s]

Zde je r_0 bezrozměrná proporcionální konstanta, nazývaná **zesílení regulátoru**, u běžných regulátorů stavitelná v rozmezí cca 0,5 až 50. T_i je **integrační konstanta regulátoru** mající rozměr sekundy a stavitelná v rozmezí cca 0 až 1800 s, stejně jako T_d , což je **derivační časová konstanta regulátoru**. U továrních provedení regulátorů se tedy dají nastavovat tyto konstanty, říká se jim stavitelné parametry regulátorů a jejich hodnotu můžeme odečítat na stupnicích nebo displejích regulátorů.

Místo zesílení r_0 se často používá termín **pásmo proporcionality**, které je udáváno v procentech. Udává, o kolik procent z celého rozsahu se musí změnit vstupní signál regulátoru, aby se výstup změnil v celém rozsahu. Vztah mezi pásmem proporcionality pp a zesílením r_0 je

$$pp = \frac{1}{r_0} \cdot 100 \quad [\%] \quad (3.58)$$

Dynamické vlastnosti jednotlivých typů (ideálních) regulátorů (což jsou rovnice, přenosy, charakteristiky) jsou uvedeny v tab. 3.4 a postup jejich sestavení a konstrukce bude ukázán na příkladech.

Příklad 3.23: Vypočtete přechodovou funkci a nakreslete přechodovou charakteristiku PI regulátoru.

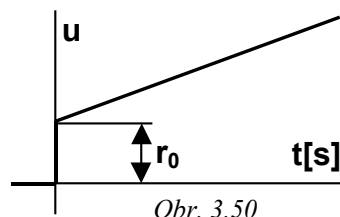
Řešení: Do rovnice tohoto regulátoru (3.51) $u = r_0 e + r_{-1} \int e dt$ dosadíme za vstupní funkci e jednotkový skok ($e = 1$ pro $t \geq 0$)

$$u = r_0 + r_{-1} \int dt$$

a vyřešením získáme přechodovou funkci

$$u = r_0 + r_{-1} t$$

a její graf neboli přechodová charakteristika je na obr. 3.50.



Obr. 3.50

typ	rovnice	přenos $G_R(s)$	přechodová charakteristika	frekvenční charakteristika
P	$u = r_0 e$	r_0		
I	$u = r_{-1} \int e dt$	$\frac{r_{-1}}{s}$		
D	$u = r_1 e'$	$r_1 s$		
PI	$u = r_0 e + r_{-1} \int e dt$	$r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$		
PD	$u = r_0 e + r_1 e'$	$r_0 + r_1 s$		
PID	$u = r_0 e + r_{-1} \int e dt + r_1 e'$	$r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$		

Tab. 3.4

Dynamické vlastnosti spojitých regulátorů

Příklad 3.24: Jaké jsou frekvenční charakteristiky PI a PD regulátorů? Zdůvodněte konstrukci.

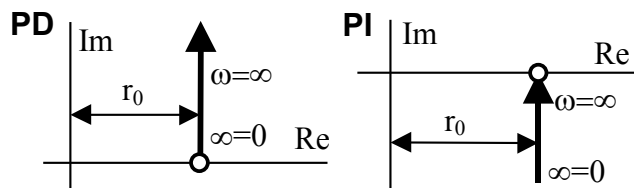
Řešení: Frekvenční přenosy jsou

$$\text{PI: } G_R(j\omega) = r_0 + \frac{r_{-1}}{j\omega} = r_0 - j \frac{r_{-1}}{\omega}$$

$$\text{PD: } G_R(j\omega) = r_0 + r_1 j\omega$$

Konstruujeme-li z těchto frekvenčních přenosů frekvenční charakteristiky vidíme, že reálná část je konstantní nezávisle na frekvenci a je rovna r_0 . Proto budou

charakteristiky v obou případech polopřímky ve vzdálenosti r_0 od imaginární osy. U PI regulátoru bude charakteristika začínat úplně dole v záporně – imaginární části komplexní roviny a končit v bodě r_0 na reálné ose. Naopak u PD regulátoru bude začínat v bodě r_0 a končit úplně nahoře v kladně – imaginární části komplexní roviny – obr. 3.51.



Obr. 3.51

Příklad 3.25: Určete r_0, T_i a tím pádem přenos PI regulátoru, jehož přechodová charakteristika je na obr. 3.52.

Řešení: Rovnici přechodové funkce z příkladu 3.22 $u = r_0 + r_{-1} t$ upravíme vytknutím r_0

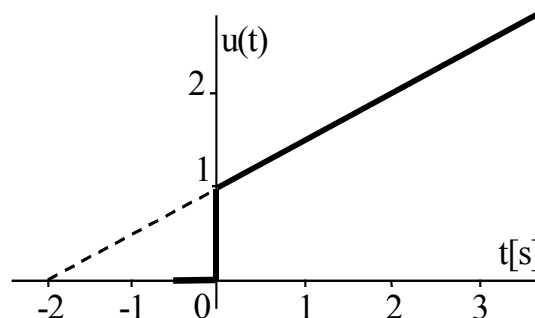
$$u = r_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_{-1}}} t\right) = r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i} t\right)$$

Pro $t = 0$ je $u = r_0$ (zesílení je úsek na ose u) a naopak pro $u = 0$ je $t = -T_i$ (integrační konstanta je úsek na ose t , který vznikne prodloužením přímkové části přechodové charakteristiky až k ose t).

$$\text{Je tedy} \quad r_0 = 1; \quad T_i = 2 \text{ s}$$

a přenos regulátoru:

$$G_R(s) = 1 + \frac{1}{2s}$$

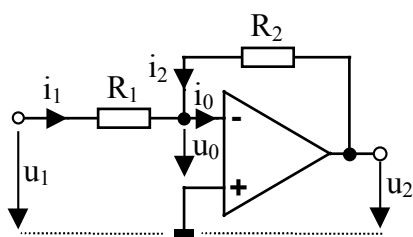


Obr. 3.52

3.12 Regulátory – konstrukční principy, použití

Ted' jsme se zabývali dynamickými vlastnostmi spojitých regulátorů, řekli jsme si o jejich rovnicích, přenosech a charakteristikách. Nyní obrátíme svou pozornost ke konstrukčním principům spojitých regulátorů. Jak u dynamických vlastností tak i zde u konstrukčních principů mluvíme o ústředních členech regulátorů. A protože v dnešní době je více než 90% regulátorů elektrických, budeme se zabývat konstrukčními principy elektrických regulátorů (respektive jejich ústředních členů).

Spojité elektrické regulátory (znovu zdůrazněme, že se jedná o ústřední člen regulátorů) mají jako základ **operační zesilovač**. Operační zesilovač je stejnosměrný zesilovač s velkým napětovým zesílením kolem 10^6 a velkým vstupním odporem. Zesilovač má zpětnou vazbu, ve které je zpětnovazební impedance (ohmický odpor nebo kapacita) a vstupní impedanci (též ohmický odpor nebo kapacita). Jeho vstupní napětí u_0 i proud i_0 mají téměř nulové hodnoty. Jako vstup se používá mínus vstup, který je invertující a vytváří tak zápornou zpětnou vazbu (vstup plus je neinvertující a nevyužívá se).



Obr. 3.53

Proporcionální regulátor vytvoříme podle obr. 3.53 zapojením ohmického odporu do vstupu i do zpětné vazby. Zapojení bez zbytečné nulové úrovně je na

obr.3.54a.

Integrační regulátor vytvoříme podle obr. 3.54b zapojením kondenzátoru s kapacitou C_2 do zpětné vazby a ohmického odporu R_1 do vstupu.

Derivační složka regulátoru má ve zpětné vazbě odpor R_2 a ve vstupu kapacitu C_1 – obr. 3.54c.

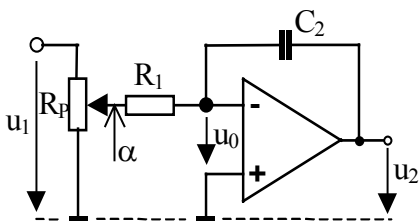
Na rozdíl od P a I regulátoru tak o derivační složce nemluvíme jako o D regulátoru. tato složka **nemůže být samostatně použita**. Ideální derivační složka zesiluje šumy. Šum představuje napětí o malé amplitudě, ale o vysokém kmitočtu ω . Za určitých zjednodušení ho můžeme vyjádřit vztahem

$$u = u_0 \sin \omega t \quad (3.59)$$

Pokud bychom přivedli tento šum na vstup ideálního derivačního regulátoru, bude na jeho výstupu derivace

$$u' = u_0 \omega \cos \omega t \quad (3.60)$$

Původně malá amplituda u_0 je vynásobena velkou frekvencí ω a výsledný signál (derivace šumového napětí) by mohl být tak veliký, že by převýšil užitečný signál. Proto lze D složku přidat k P regulátoru eventuálně k PI regulátoru.

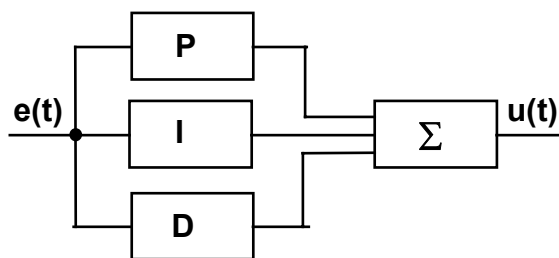


Obr. 3.55

Nastavitelnost parametrů se provádí zařazením potenciometrů. V naznačeném provedení by nebylo snadné měnit parametry regulátoru, to je r_0 , T_i a T_d . Na obr. 3.55 je nakresleno zapojení potenciometru u integračního

ho regulátoru (α nastavení potenciometru).

Kombinace základních typů regulátorů, které umožňují dosáhnout vyšší kvality regulace než jednoduché regulátory, se realizují nejčastěji paralelním řazením regulátorů základních – dosahuje se nejkvalitnějšího výsledku za cenu vyššího počtu zesilovačů. Na obr. 3.56 je jako příklad uvedena realizace PID regulátoru. Sumační člen je také operační zesilovač.



Obr. 3.56

Často také průmyslové regulátory obsahují další přídavné obvody, např. pro filtraci šumů, pro potlačení vlivu řídicí veličiny (speciálně u D složky se za vstupní veličinu zapojuje místo regulační odchylky $e = w - y$ regulovaná veličina y), pro ruční a automatické řízení s beznárazovým přepnutím, spolupráce s počítačem atd.

Nyní se budeme stručně zabývat **použitím jednotlivých typů regulátorů**. Zpracování regulační odchylky $e = w - y$ je rozloženo u PID regulátoru do tří paralelně pracujících složek regulátoru, které každá svým způsobem ovlivňuje velikost tzv. **akčního zásahu**, tj. změnu akční veličiny u tak, jak je to podle jejich „názoru“ pro odstranění existující regulační odchylky nezbytné.

Matematicky nejméně komplikovaným objektem ze všech tří složek PID regulátoru je jeho proporcionální složka, zpravidla označovaná jako **P regulátor**. Ten ke své činnosti využívá všeobecně dobře známého principu přímé úměrnosti – čím větší detekuje momentální regulační odchylku, tím větší („důraznější“) generuje i akční zásah. Je-li např. P regulátorem připojeným k ventilu ovládajícímu přívod paliva k plynovému hořáku udržována teplota vody v nádrži, do které neustále přitéká studená voda, na hodnotě 100°C a její skutečná hodnota poklesne na 98°C , tj. regulační odchylka neboli rozdíl mezi žádanou (100°C) a skutečnou (98°C) teplotou bude 2°C , pootevře, při konstantě úměrnosti $r_0=2$, P regulátor ventil přívodu paliva k hořáku o čtyři dílky (každý dílek přitom odpovídá určitému průtoku plynu, a tím i výkonu hořáku). Pokud teplota vody v nádrži klesne na 96°C , pootevře se ventil o osm dílků, pokud se vrátí na 100°C , přívod plynu do hořáku se uzavře apod. Zmíněná konstanta úměrnosti neboli převodní konstanta mezi velikostí regulační odchylky e a generovanou hodnotou akční veličiny u je jediný stavitelný parametr P regulátoru a je to tzv. zesílení regulátoru r_0 . Určuje i dobu trvání regulačního pochodu (čím větší je r_0 , tím důraznější je regulační zásah a kratší doba regulace). Zesílení regulátoru může být hodně vysoké, aniž by hrozila nestabilita nebo překmity regulované veličiny.

V praxi jsou samostatné P regulátory oblíbeny především díky své jednoduchosti (jeden proměnný parametr a průhledná struktura), dostatečně rychlému průběhu regulace a stabilitě. Jejich základní nevýhodou je však existence tzv. **trvalé regulační odchylky** (klesá s rostoucím zesílením), tj. nejsou schopny z principu své činnosti samy zcela odstranit rozdíl mezi skutečnou a žádanou hodnotou regulované veličiny. O trvalé regulační odchylce bude pojednáno dále. P regulátor není také vhodný pro regulované soustavy vyšších řádů a pro soustavy s dopravním zpožděním.

Poněkud komplikovanější, a to nejen z matematického hlediska, je zpracování regulační odchylky **I regulátorem**. Změna akční veličiny je v tomto případě úměrná časové hodnotě integrálu z regulační odchylky. To znamená, že momentální rychlost změny akční veličiny závisí přímo na velikosti regulační odchylky $[u \sim \int e dt \rightarrow u' \sim e]$. Držme se dříve uvedeného příkladu regulace teploty v nádrži. Dejme tomu že po určitý interval např. $\Delta t = 10$ s bude rozdíl mezi žádanou a skutečnou teplotou konstantní a roven 2°C . Za uvedenou dobu se v paměti I regulátoru „naintegruje“ hodnota 20 neboli obsah plochy o rozměrech $2^{\circ}\text{C} \times 10$ s. Jestliže přitom počátek sledovaného intervalu leží zároveň na počátku časové osy (původní hodnota integrálu je nulová) a konstanta úměrnosti je na příklad $r_{-1} = 0,1$, otevře během sledovaného intervalu I regulátor ventil přívodu plynu k hořáku lineárně (s konstantní rychlostí změny $0,2$ dílku/s) z nuly na dva dílky. Zde jsme uvažovali konstantu úměrnosti r_{-1} , což je konstanta přímé úměrnosti. Podle přenosu daného rovnicí (3.57) se častěji vyskytuje ve své převrácené hodnotě $T_i = r_0 / r_{-1}$. Zde ovšem platí, že čím větší je hodnota T_i , tím menší je vliv I regulátoru na hodnotu akční veličiny.

Bez ohledu na typ a hodnotu použité integrační konstanty je však I regulátor schopen zcela eliminovat regulační odchylku, tj. vrátit „odchýlenou“ hodnotu např. teploty vody v nádrži zpět na její požadovanou úroveň. Pokud je regulační odchylka, hodnota integrálu není nulová a regulátor reguluje. Tato jedinečná vlastnost (P ani D složka regulátoru ji nedisponují) je však vykoupena zhoršením stability regulačního obvodu – regulační pochod ovlivňovaný I regulátorem bývá zpravidla více či méně kmitavý, což může poměrně nepříznivě ovlivňovat i opotřebení akčních orgánů (prodloužením přechodového děje, tj. doby, po kterou se regulovaná soustava ustaluje). Tyto nevýhody tak omezují samostatné působení I regulátoru jen na poměrně úzký okruh konkrétních zařízení, a v praxi se proto objevuje ve spojení se svým proporcionálním „ko-

legou“ v podobě PI regulátoru, který výhodně spojuje charakteristické vlastnosti obou. Integrační složka má na starosti úplné odstranění regulační odchylky (se vzrůstajícím podílem I regulace však roste kmitavost akčního zásahu), proporcionální pak zkracuje dobu trvání regulačního pochodu.

Regulátor I je velmi vhodný pro proporcionální regulované soustavy bez setrvačnosti, jeho zesílení může být velmi vysoké bez nebezpečí rozkmitání. Je vhodný i pro setrvačné soustavy 1. řádu, při poruše však dochází k většímu překmitu regulované veličiny. Regulátor I je nejvhodnější ze všech ostatních typů pro regulaci statických soustav s dopravním zpožděním. U těchto soustav nejvíce hrozí rozkmitání regulačního obvodu. Proto musíme nastavit menší zesílení regulátoru. Regulátor I je méně vhodný pro regulaci soustav vyšších řádů, v níž se lépe uplatní regulátor PI. Nelze jej použít u integračních soustav, neboť regulační obvod je nestabilní.

Přibližně na stejné úrovni jako v případě integračního regulátoru, alespoň z pohledu matematické složitosti, je zpracování regulační odchylky i **derivační složkou** klasického PID algoritmu, s níž se lze setkat také pod zjednodušeným označením **D regulátor**. Jak název napovídá, je změna akční veličiny úměrná hodnotě derivace regulační odchylky. To znamená, že hodnota akční veličiny generovaná D regulátorem odpovídá okamžité hodnotě rychlosti změny rozdílu mezi žádanou a skutečnou hodnotou regulované veličiny $[u \sim e' = (w - y)']$. Pokud tedy regulační odchylka teploty vody v nádrži z našeho příkladu vzroste např. během časového intervalu o délce $\Delta t = 10$ s lineárně, tj. s rovnoměrným nárůstem, ze 2°C na 3°C, bude na výstupu D regulátoru po celý sledovaný interval hodnota úměrná průměrné rychlosti změny regulační odchylky, tj. 0,1 °C/s a ventil přívodu plynu k hořáku tak bude, při konstantě úměrnosti $r_I = 10$, po celý sledovaný interval otevřen na jeden dílek. V případě, že odchylka zvětší tempo svého růstu např. na 0,2 °C/s, zareaguje derivační složka otevřením ventilu na dva dílky, pokud se odchylka naopak ustálí na konstantní hodnotě, tj. rychlost růstu popř. klesání bude rovna nule, ventil se zcela uzavře apod. Konstanta úměrnosti je v případě D regulátoru označována jako tzv. derivační časová konstanta T_d , popř. r_I - viz přenos v rovnici (3.57). Jak už bylo řečeno, není v praxi možné použít D regulátor samostatně. Je to především pro už vzpomínanou vlastnost zesilovat derivaci šumové napětí a dále pro jeho neschopnost reagovat na ustálenou hodnotu regulační odchylky a pro nestabilitu celého regulačního obvodu způsobenou velkými odezvami D regulátoru na prudké změny regulační odchylky (při skokové změně regulační odchylky teoreticky až nekonečně velkými), které mohou vést až k nekontrolovatelnému rozkmitání regulačních orgánů. V praxi se proto D regulátory používají především v kombinacích s P, popř. PI regulátory. V klasické kombinaci s ostatními složkami PID regulátoru zlepšují stabilitu regulace, zkracují periodu kmitů akční veličiny a snižují rychlost reakce regulačního obvodu na poruchu a tak zrychlují a zlepšují průběh regulačního pochodu (přechodový děj), ovšem jen do určité míry. Příliš velká derivační konstanta může totiž vlastnosti regulačního obvodu i zhoršit, což je výrazné u systémů s vysokou hladinou šumu, na který D regulátor reaguje zbytečným rozkmitáváním akčního členu.

Na závěr můžeme konstatovat, že **PD regulátor** je vhodný tam, kde vyhovuje regulátor P. Jeho předností je větší rychlost regulace. **PI regulátor** úplně odstraňuje regulační odchylku a ve většině případů zlepšuje stabilitu regulačního obvodu. Regulátor PI se nejvíce používá při regulaci kmitavých soustav druhého i vyšších řádů. Čím je řád soustavy vyšší, tím více musíme zmenšovat zesílení, popř. zvětšovat integrační časovou konstantu T_i . Pro proporcionální soustavy s dopravním zpožděním dává lepší výsledky regulátor I. Pro integrační soustavy (a to i s dopravním zpožděním) je regulátor PI vhodný tam, kde se požaduje úplné odstranění regulační odchylky. Jinde je vhodnější regulátor P.

PID regulátor je vhodný všude tam, kde vyhovuje regulátor PI. Proti regulátoru PI je rychlejší, takže lépe tlumí rychlé překmity regulované veličiny.

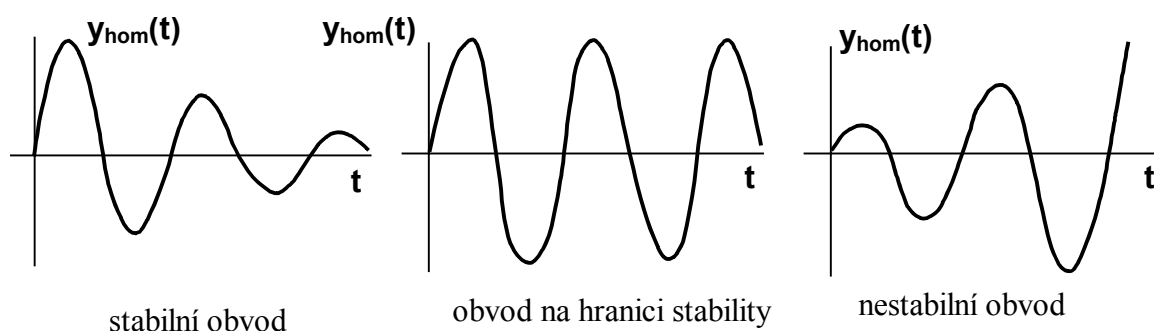
3.13 Stabilita regulačního obvodu

Stabilita je základní a nevyhnutelnou podmínkou správné funkce regulačního obvodu.
Definice:

Regulační obvod je stabilní, jestliže po svém vychýlení z rovnovážného stavu a odstranění vzruchu, který vychýlení způsobil, je schopen se ustálit v rovnovážném stavu. Nový rovnovážný stav nemusí být s původním rovnovážným stavem totožný.

Stabilita je tedy schopnost regulačního obvodu, aby se jeho regulovaná veličina y (respektive její přechodná složka $y_{hom}(t)$ – to je složka, která charakterizuje vlastní kmity regulačního obvodu – ne ty, co jsou mu zvenčí vnucené) ustálila na původní hodnotě po vychýlení poruchovou veličinou nebo na nové hodnotě při vychýlení řídicí veličinou.

Průběh přechodné složky regulované veličiny $y_{hom}(t)$ u stabilního, nestabilního a obvodu na hranici stability je na obr. 3.57. Mezní stav, při kterém $y_{hom}(t)$ kmitá kmitů o konstantní



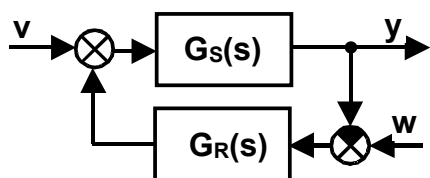
Obr. 3.57

amplitudě, se nazývá **hranice stability**.

Regulační obvod musí být vždy a za každou cenu stabilní. Zatímco parametry regulované soustavy jsou dány její konstrukcí a nemůžeme je tudíž měnit, můžeme měnit parametry regulátoru, případně volit jiný vhodnější typ regulátoru tak, aby se dosáhlo stabilního regulačního obvodu.

Nyní se objevuje problém, jak poznáme, zda-li je námi navrhovaný regulační obvod stabilní anebo nestabilní. Řekněme si nejdříve, jaká je **obecná podmínka stability**.

Mějme jednoduchý regulační obvod podle obr. 3.58. Jeho přenos řízení a přenos poruchy je dán rovnicemi (3.61) a (3.62), které si navíc zavedeme jako podíl obecných polynomů



Obr. 3.58

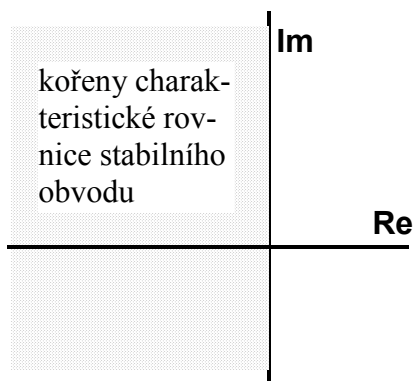
$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.61)$$

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{c_m s^m + \dots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.62)$$

Jestliže položíme jmenovatel přenosu řízení nebo poruchy (jsou vždy stejné) roven nule, dostáváme charakteristickou rovnici regulačního obvodu

$$1 + G_0(s) = 0 \quad (3.63)$$

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3.64)$$



Obr.3.59

Regulační obvod je stabilní, jestliže všechny kořeny $s_1, s_2, \dots, s_n$ charakteristické rovnice (3.63) respektive (3.64) jsou záporná čísla a v případě komplexních kořenů mají tyto kořeny zápornou reálnou část.

Zobecněno: Regulační obvod je stabilní, mají-li všechny kořeny charakteristické rovnice záporné reálné části neboli leží v levé komplexní polorovině (obr. 3.59).

V případě, že některý z kořenů leží na imaginární ose a žádný neleží v pravé komplexní polorovině, je obvod na hranici stability.

Rovnice (3.63) není v podstatě charakteristická rovnice, ale ta se z ní úpravou snadno získá. Praktický postup při sestavení charakteristické rovnice je následující: Přenos rozpojeného obvodu, který jak víme je součinem přenosu soustavy a přenosu regulátoru a my si ho vyjádříme ve tvaru podílu polynomů

$$G_0(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (3.65)$$

Pak můžeme psát

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s) + N(s)}{N(s)} = 0$$

a protože zlomek je roven nule když jeho čítecitel je roven nule, můžeme charakteristickou rovnici psát jako součet polynomů čítecitele a jmenovatele rozpojeného obvodu $G_0(s)$

$$M(s) + N(s) = 0 \quad (3.66)$$

Příklad 3.26: Sestavte charakteristickou rovnici regulačního obvodu a na základě ní určete stabilitu tohoto obvodu. Je dán přenos regulované soustavy i PID regulátoru

$$G_S(s) = \frac{2}{3s+1} \quad G_R(s) = 3 \left(1 + \frac{1}{4s} + 8s \right)$$

Řešení: Přenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = G_S(s)G_R(s) = \frac{2}{3s+1} \cdot 3 \left(1 + \frac{1}{4s} + 8s \right) = \frac{96s^2 + 12s + 3}{6s^2 + 2s}$$

Charakteristickou rovnici získáme nejjednodušeji použitím vztahu (3.66) $M(s) + N(s) = 0$

$$102s^2 + 14s + 3 = 0$$

Anebo jsme mohli použít vztah (3.63) $1 + G_0(s) = 0$. Výsledek je tentýž.

Pro zjištění, zda je obvod stabilní či nestabilní, musíme spočítat kořeny charakteristické rovnice

$$s_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 102 \cdot 3}}{2 \cdot 102} = -0,07 \pm j0,16$$

Kořeny mají zápornou reálnou část a regulační obvod je proto stabilní.

To byla obecná podmínka stability. Nyní si ještě řekněme několik poznámek k praktickému vyšetřování stability.

Poznámka 1: Rozložme charakteristickou rovnici (3.64)

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

v součin kořenových činitelů

$$a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0$$

Pokud jsou všechny kořeny záporné (nebo jsou komplexní se zápornou reálnou částí), má tento součin tvar např. pro $s_1 = -3, s_2 = -5, s_3 = -7$

$$[s - (-3)][s - (-5)][s - (-7)] = (s + 3)(s + 5)(s + 7) = 0$$

Jak je vidět, jsou v tomto součinu pouze kladná znaménka a opětovným roznásobením tohoto součinu kořenových činitelů zjistíme, že koeficienty původní charakteristické rovnice $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou kladné – při záporných kořenech se tam nikdy nemůže objevit záporné znaménko. Platí tedy pravidlo:

Aby byl regulační obvod stabilní, musí být všechny koeficienty charakteristické rovnice kladné. Tato podmínka je nutná (ale nepostačující).

Poznámka 2: Pokud máme charakteristickou rovnici (3.64) druhého stupně, tedy kvadratickou, je předcházející podmínka nutná a postačující.

Je to proto, že jsou-li v rovnici

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

koeficienty $a_0, a_1, a_2 > 0$, dá se snadno dokázat, že kořeny $s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$ jsou

bud' reálné záporné anebo komplexní se zápornou reálnou částí a tedy v obou případech je regulační obvod stabilní.

Poznámka 3: Je-li charakteristická rovnice (3.64) vyššího než druhého stupně a jsou-li všechny její koeficienty kladné (nutná podmínka), nelze o stabilitě přímo rozhodnout. Je nutné vypočítat její kořeny a zjistit, jsou-li všechny záporné nebo mají zápornou reálnou část (obecná podmínka stability). To je poměrně obtížný úkol, řešitelný pouze numerickými metodami pro řešení rovnic vyšších stupňů. Abychom se vyhnuli vyčíslování kořenů, používáme tzv. **kritéria stability**, umožňující rozhodnout o stabilitě bez numerického vyčíslování kořenů.

Příklad 3.27: Určete zda jsou nebo nejsou stabilní regulační obvody, jejichž charakteristické rovnice jsou

a) $s^4 + 5s^3 - 4s^2 + 2s + 1 = 0$

b) $s^5 + 4s^4 + 0,5s^2 + s + 2 = 0$

c) $s^2 + 5s + 3 = 0$

d) $s^5 + 0,3s^4 + 2s^3 + 1,5s^2 + 3s + 1 = 0$

e) $(s+2)(s+0,5)(s+0,1) = 0$

f) $s(s+1)(s+2) = 0$

- Řešení:**
- a) nestabilní – koeficient u 2. mocniny je záporný
 - b) nestabilní – koeficient u 3. mocniny je nulový
 - c) stabilní – u kvadratické rovnice je kladnost koeficientů nutnou a postačující podmínkou
 - d) nutná ale nepostačující podmínka (kladnost koeficientů) je splněna, ale o stabilitě můžeme rozhodnout buďto vyřešením kořenů anebo některým kritériem stability
 - e) stabilní – všechny kořeny jsou reálné záporné
 - f) na hranici stability – jeden nulový kořen – ostatní záporné.

Příklad 3.28: Určete stabilitu regulačního obvodu tvořeného

- a) proporcionální soustavou $G_S(s) = \frac{k}{Ts+1}$ a PI regulátorem $G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$
 b) integrační soustavou $G_S(s) = \frac{1}{sT}$ a PI regulátorem $G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$
 c) integrační soustavou $G_S(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$ a I regulátorem $G_R(s) = \frac{r_{-1}}{s}$.

Řešení: Přenosy rozpojeného obvodu a charakteristické rovnice jsou pro jednotlivé obvody následující

- a) $G_0(s) = \frac{kr_0s + kr_{-1}}{s(Ts+1)}$ $Ts^2 + (1 + kr_0)s + kr_{-1} = 0$ charakteristická rovnice je kvadratická a má všechny koeficienty kladné, což je postačující podmínka stability (zde jsou zesílení k i konstanty T , r_0 , r_{-1} kladná čísla). Obvod je stabilní pro všechny možné hodnoty všech svých konstant, a proto říkáme, že je **strukturálně stabilní**.
 b) $G_0(s) = \frac{r_0s + r_{-1}}{Ts^2}$ $Ts^2 + r_0s + r_{-1} = 0$ obvod je stabilní ze zcela stejného důvodu jako v případě a). Rovněž je tedy **strukturálně stabilní**.
 c) $G_0(s) = \frac{kr_{-1}}{s^2(Ts+1)}$ $Ts^3 + s^2 + kr_{-1} = 0$ koeficient u první mocniny je nulový a není tedy splněna nutná podmínka stability. Protože obvod je nestabilní pro jakékoliv možné hodnoty svých konstant, říkáme, že je **strukturálně nestabilní**.

3.14 Kritéria stability

Vyčíslení kořenů charakteristické rovnice vyššího než druhého stupně je pracná záležitost i s použitím výpočetní techniky. Proto byla sestavena matematická kritéria, která umožňují z charakteristické rovnice určit, zdali jsou její kořeny se zápornou reálnou částí nebo ne, a tím stabilitu obvodu, aniž bychom museli danou rovnici řešit.



Zde si uvedeme dvě algebraická kritéria (algebraickými úpravami koeficientů charakteristické rovnice určíme, jsou-li její všechny kořeny se zápornou reálnou částí nebo ne, a tím stabilitu) a dvě frekvenční kritéria (sestrojíme frekvenční charakteristiku a z jejího tvaru usoudíme na stabilitu). Kritérií stability je více, ale zde uvedená patří mezi nejpoužívanější.

V dalším budou tato kritéria uvedena a to bez důkazu s důrazem na jejich praktické aplikace.

3.14.1 Hurwitzovo kritérium

Mějme danu charakteristickou rovnici (3.64)

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

u níž je splněna nutná ale nepostačující podmínka stability, tj. existence a kladnost všech koeficientů. Utvořme z těchto koeficientů determinant n -tého stupně podle následujícího schématu (tzv. Hurwitzův determinant)

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (3.67)$$

Z tohoto determinantu H_n , který je n -tého stupně (n řádků, n sloupců) utvoříme subdeterminanty H_{n-1} až H_1 tak, že vždy vynecháme poslední řádek a poslední sloupec.

Hurwitzovo kritérium: Obvod je stabilní (kořeny charakteristické rovnice jsou záporné nebo mají zápornou reálnou část), když determinant H_n a všechny subdeterminanty H_{n-1} až H_1 jsou kladné (n je stupeň charakteristické rovnice). Je-li některý z determinantů nulový, je obvod na mezi stability.

Toto je nutno upřesnit. Tato naprosto obecná podmínka se dá upřesnit pro jednotlivé stupně obvodů. Začneme obvodem jehož charakteristická rovnice je **2. stupně**

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Jsou-li všechny koeficienty a_0 , a_1 , a_2 kladné, je splněna v tomto případě nutná a postačující podmínka stability a není potřebí dalšího vyšetřování.

U obvodů, jejichž charakteristická rovnice je **3. stupně**

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

pak při kladnosti koeficientů stačí, aby byl $H_2 > 0$

U obvodů, jejichž charakteristická rovnice je **4. stupně**

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

je postačující podmínkou stability : $H_3 > 0$

Pro obvody s charakteristickou rovnicí **5. stupně**

$$a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

musí pro splnění podmínek stability platit, že $H_2 > 0$ a $H_4 > 0$. Shrnutí je v tab. 3.5.

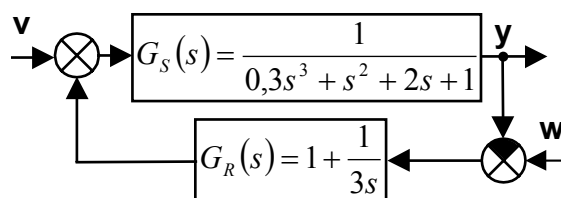
stupeň	Nutná podmínka	Další nutná podmínka
2.	kladnost koeficientů	-
3.		$H_2 > 0$
4.		$H_3 > 0$
5.		$H_2 > 0; H_4 > 0$

Tab. 3.5 Hurwitzovo kritérium

Příklad 3.29: Určete stabilitu regulačního obvodu podle obrázku 3.60.

Řešení: Přenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = \left(1 + \frac{1}{3s}\right) \frac{1}{0,3s^3 + s^2 + 2s + 1} = \frac{3s + 1}{0,9s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 3s}$$



Obr. 3.60

Z něho získáme charakteristickou rovnici rozpojeného obvodu podle (3.66) $M(s) + N(s) = 0$

$$0,9s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 3s + 1 = 0$$

Vidíme, že je splněna nutná podmínka kladnosti všech koeficientů a sestavíme tedy determinant H_3 a vyčíslíme ho

$$H_3 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0,9 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 66,6$$

Determinant H_3 je kladný a proto je regulační obvod stabilní.

Příklad 3.30: Pro jaké hodnoty integrační časové konstanty T_i u PI regulátoru zapojeného v obvodu podle obr. 3.61 je regulační obvod stabilní?

Řešení: Přenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = \frac{1}{s(3s+1)} r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{T_i r_0 s + r_0}{3T_i s^3 + T_i s^2}$$

a z něho charakteristická rovnice

$$3T_i s^3 + T_i s^2 + T_i r_0 s + r_0 = 0$$

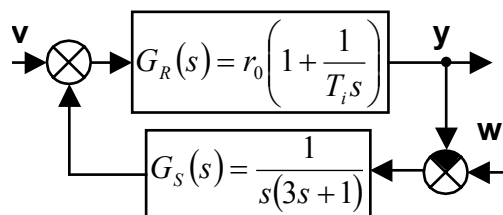
Za předpokladu $r_0, T_i > 0$ jsou všechny

koeficienty kladné (nutná podmínka stability) a Hurwitzův determinant H_2 má tvar

$$H_2 = \begin{vmatrix} T_i & r_0 \\ 3T_i & T_i r_0 \end{vmatrix} = T_i r_0 (T_i - 3)$$

Aby byl obvod stabilní, musí být $H_2 > 0$ a to znamená $T_i > 3$ [s]. Při $T_i = 3$ [s] bude obvod na hranici stability, protože determinant je nulový. Konstanta r_0 (zesílení regulátoru) nemá v tomto případě na stabilitu vliv.

Příklad ukazuje, že Hurwitzovým kritériem můžeme poměrně snadno určit rozmezí jednotlivých parametrů, pro které je obvod stabilní.



Obr. 3.61

3.14.2 Routh-Schurovo kritérium

Kritérium vychází opět z charakteristické rovnice obvodu (3.64)

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

a je to v podstatě algoritmus, podle kterého provádíme postupnou redukci charakteristické rovnice na rovnici nižšího stupně, až se dostaneme k rovnici druhého stupně.

Regulační obvod je stabilní, když jsou koeficienty všech rovnic při postupné redukci charakteristické rovnice kladné.

Schéma redukce je následující:

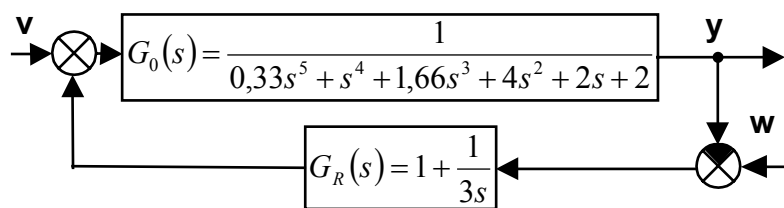
- napíšeme koeficienty redukované rovnice do řádku od nejvyšší mocniny k nejnižší (možno i naopak)
- podtrhneme sudé koeficienty v pořadí (každý druhý)
- každý podtržený koeficient násobíme podílem dvou nejvyšších koeficientů a_n / a_{n-1} a výsledek napíšeme do druhého řádku posunutý o jedno místo vlevo
- druhý řádek (který má členy vždy ob jeden prvního řádku) odečteme od prvního řádku a dostaneme třetí řádek
- koeficienty třetího řádku jsou koeficienty rovnice o jeden stupeň nižší, než byla redukováná rovnice, neboť na místě nejvyššího koeficientu jsme dostali nulu

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & a_{n-3} & & a_{n-4} & & \left| \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \right. \\
 \hline
 \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-1} & & & & \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3} & & & & \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5} & & \\
 \hline
 0 & & a_{n-1} & & a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3} & & a_{n-3} & & a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5} & &
 \end{array}$$

- redukci provádíme tímto způsobem dále až na rovnici 2. stupně (tři koeficienty). Nulu na začátku řady koeficientů neuvažujeme. Koeficienty u všech redukováných rovnic musí být kladné. To je podmínka stability.

Příklad 3.31:

Určete stabilitu regulačního obvodu zadaného na obr. 3.62.



Obr. 3.62

Řešení: Nejdříve jako obvykle stanovíme přenos rozpojeného obvodu

$$G_0(s) = \frac{3s+1}{3s} \cdot \frac{1}{0.33s^5 + s^4 + 1.66s^3 + 4s^2 + 2s + 2} = \frac{3s+1}{s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 6s^2 + 9s + 1}$$

Charakteristická rovnice obvodu je

$$s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 6s^2 + 9s + 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc|l}
 1 & 3 & 5 & 12 & 6 & 9 & 1 & (1/3) \\
 \hline
 1 & & 4 & & 3 & & & \\
 \hline
 0 & 3 & 1 & 12 & 3 & 9 & 1 & (3) \\
 \hline
 & 3 & & 9 & & 3 & & \\
 \hline
 & 0 & 1 & 3 & 3 & 6 & 1 & (1/3) \\
 \hline
 & & 1 & & 2 & & & \\
 \hline
 & & 0 & 3 & 1 & 6 & 1 & (3) \\
 \hline
 & & & 3 & & 3 & & \\
 \hline
 & & & 0 & 1 & 3 & 1 &
 \end{array}$$

Podle daného algoritmu Routh-Schurova kritéria provádíme nyní postupnou redukci stupně charakteristické rovnice

Koeficienty u všech stupňů rovnic jsou kladné a proto je obvod stabilní.

3.14.3 Michajlov-Leonhardovo kritérium

Je to frekvenční kritérium, které vychází z charakteristické rovnice obvodu (3.64)

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Z levé strany této rovnice utvoříme funkci

$$H(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \quad (3.68)$$

kde s je stejně jako v charakteristické rovnici (3.64) komplexní proměnná.

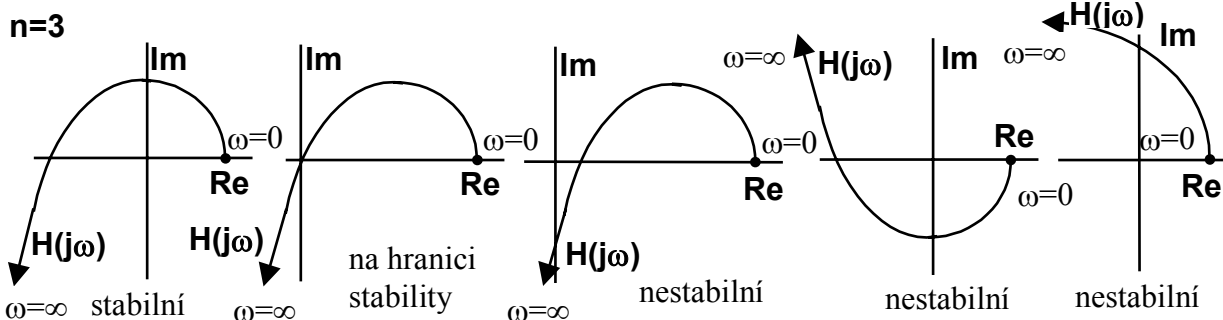
Kritérium hodnotí stabilitu podle křivky, kterou opíše koncový bod charakteristického vektoru $H(j\omega)$ v komplexní rovině při změně frekvence ω od 0 do ∞ . Vektor $H(j\omega)$ vznikne z charakteristické funkce (3.68) dosazením $s = j\omega$

$$H(j\omega) = a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 \quad (3.69)$$

Tuto křivku nazýváme křivkou $H(j\omega)$ nebo také Michajlovov-Leonhardovou křivkou. (A.V. Michajlov, ruský matematik, jeho práce uveřejněna v roce 1938; A. Leonhard, německý technik, práce uveřejněna v roce 1943).

Michajlov-Leonhardovo kritérium stability: Aby byl regulační obvod stabilní, musí Michajlov-Leonhardova křivka $H(j\omega)$ začínat na kladné reálné poloze komplexní roviny a se vzrůstajícím ω od 0 do ∞ musí projít postupně (tj. v pořadí) v kladném smyslu (proti pohybu hodinových ručiček) tolika kvadranty, kolikátého stupně je charakteristická rovnice.

Např. pro rovnici 3.stupně je obvod stabilní nebo nestabilní, má-li křivka $H(j\omega)$ průběh podle obr. 3.63.



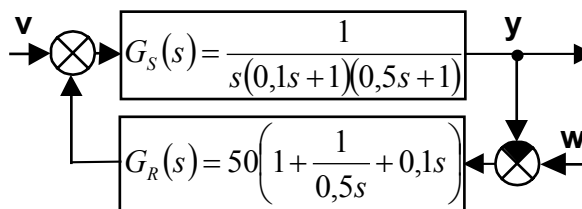
Obr. 3.63

Křivku $H(j\omega)$ není nutné vždy kreslit celou, postačí jen vypočítat polohu jejich průsečíků se souřadnými osami. V tom případě se reálná a imaginární část výrazu $H(j\omega)$ položí rovna nule a z toho se vypočítají frekvence zmíněných průsečíků. Z frekvencí se pak určí jejich poloha a z polohy snadno určíme průběh celé charakteristiky.

Příklad 3.31: Určete stabilitu regulačního obvodu podle obr. 3.64.

Řešení: Přenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = \frac{1}{s(0,1s+1)(0,5s+1)} 50 \left(1 + \frac{1}{0,5s} + 0,1s \right) = \frac{5s^2 + 50s + 100}{0,05s^4 + 0,6s^3 + s^2}$$



Obr. 3.64

Charakteristická rovnice je

$$0,05s^4 + 0,6s^3 + 6s^2 + 50s + 100 = 0$$

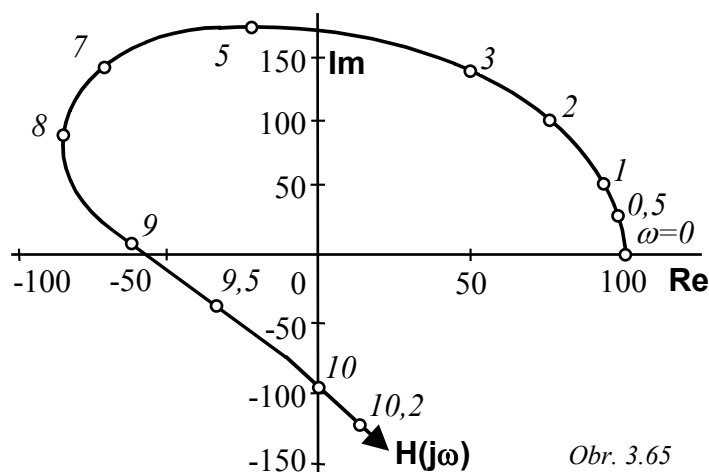
Michajlov-Leonhardův vektor

$$H(j\omega) = 0,05(j\omega)^4 + 0,6(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 50(j\omega) + 100 = \underbrace{0,05\omega^4 - 6\omega^2 + 100}_{Re} + j\underbrace{\omega(50 - 0,6\omega^2)}_{Im}$$

K tomuto výrazu sestojíme na základě tab. 3.6 Michajlov-Leonhardovu křivku $H(j\omega)$ – obr. 3.65. Protože stupeň charakteristické rovnice je $n=4$ a křivka prochází v kladném smyslu čtyřmi za sebou jdoucími kvadranty, je regulační obvod stabilní.

ω	Re	Im
0	100	0
0,5	98,5	24,9
1	94	49,4
2	76,8	95,2
3	50	133,8
5	-18,8	175
7	-74	144,2
8	-79,2	92,8
9	-58	12,6
9,5	-34,2	-39,4
10	0	-100
10,2	17	-126,7

Tab. 3.6



Obr. 3.65

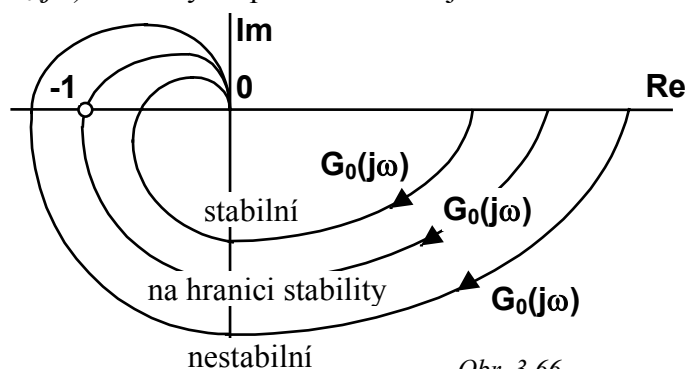
3.14.4 Nyquistovo kritérium

Je to frekvenční kritérium, které je založeno na znalosti průběhu frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu. Může být použito i pro regulační obvody s dopravním zpožděním, kde nelze použít algebraických kritérií. Další jeho výhodou je to, že nemusíme znát ani analytický tvar přenosu rozpojeného obvodu, stačí experimentálně získaná frekvenční charakteristika. A proti algebraickým kritériím má přednost také v tom, že stabilitu zkoumáme nejen z kvantitativního hlediska (stabilní či nestabilní), ale i z hlediska kvalitativního, jak dalece je obvod stabilní.

Kritérium vychází z přenosu rozpojeného obvodu (3.45), který si podle (3.65) můžeme vyjádřit ve tvaru podílu polynomů

$$G_0(s) = G_s(s)G_R(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

K přenosu rozpojeného obvodu $G_0(s)$ sestavíme frekvenční přenos rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$ a známým způsobem sestojíme frekvenční charakteristiku rozpojeného obvodu.



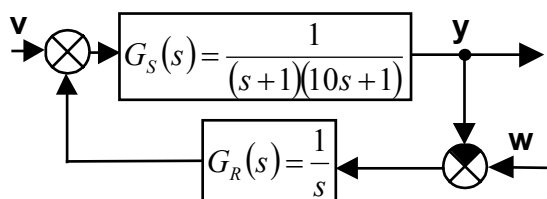
Obr. 3.66

Prochází-li frekvenční charakteristika rozpojeného obvodu kritickým bodem -1 , je obvod na hranici stability.

Regulační obvod je stabilní, jestliže kritický bod $[-1, 0]$ leží vlevo od frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$ pro frekvence ω od 0 do ∞ .

Průběh charakteristik pro stabilní obvod, pro obvod na hranici stability a pro nestabilní obvod je na obr. 3.66.

Příklad 3.33: Vyšetřete stabilitu regulačního obvodu podle obr. 3.67.



Obr. 3.67

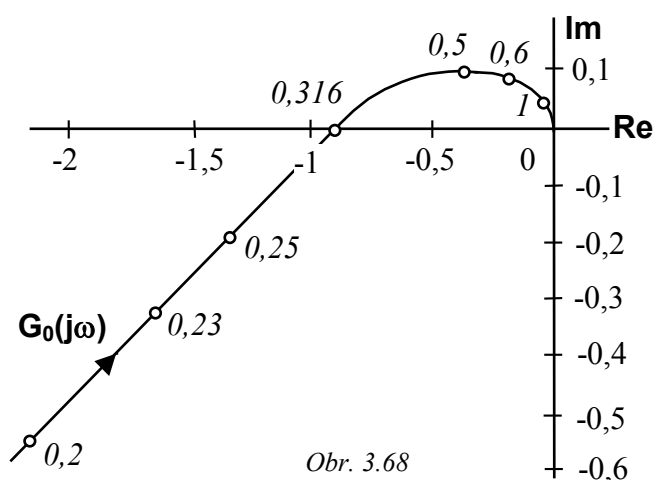
Řešení: Přenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)(10s+1)}$$

ω	Re	Im
0,2	-2,12	-0,58
0,23	-1,66	-0,32
0,25	-1,43	-0,20
0,316	-0,91	0
0,5	-0,34	0,09
0,6	-0,22	0,08
1	-0,05	0,04

Frekvenční
přenos
 $G_0(j\omega)$

rozdělíme na reálnou a imaginární část a sestojíme frekvenční charakteristiku rozpojeného obvodu v komplexní rovině (tab. 3.7, obr. 3.68). Kritický bod $[-1, 0]$ leží vlevo od frekvenční charakteristiky $G_0(j\omega)$ a proto je obvod stabilní.



Obr. 3.68

3.15 Nastavení regulátorů metodou Ziegler-Nichols

Umíme už vyšetřit stabilitu regulačního obvodu, když známe parametry regulované soustavy a parametry regulátoru. Parametry soustavy jsou dány její konstrukcí a jsou tedy známy. Jak ale zjistit parametry regulátoru? Parametry regulátoru se snažíme volit tak, aby průběh regulačního pochodu byl co nejlepší. Aby regulační pochod netrval dlouho a brzy se ustálil a aby maximální překmit regulované veličiny nebyl příliš veliký. Jsou dosti složité a teoreticky náročné metody, jak se k takovému optimálnímu seřízení regulátoru dostat. Nejznámější z nich je metoda minima kvadratické regulační plochy a jsou i další metody. V praxi se však ujala velmi jednoduchá a nenáročná metoda, která je obecně velmi rozšířená. Původně to byla praktická a ryze empirická metoda pro nastavení parametrů regulátoru přímo v provozním zapojení. Bývá také nazývána metodou seřízení regulátoru podle kritického zesílení. Publikována byla v roce 1942 a výsledky byly později potvrzeny i teoreticky. Tuto metodu lze aplikovat i početně. Nejdříve si uveďme seřizování parametrů regulátoru Ziegler-Nicholsovou metodou v provozním zapojení.

Základní myšlenkou metody je přivést obvod na hranici stability, neboť optimální nastavení s tímto kritickým nastavením souvisí (je od něj „blízko“, dá se z něho odvodit). Za kritické nastavení (na mezi stability) považujeme takové, při němž jsou integrační a derivační složka vyřazeny, tj. $T_i \rightarrow \infty$, $T_d \rightarrow 0$ (respektive $r_{-1} \rightarrow 0$, $r_1 \rightarrow 0$) a změnou zesílení r_0 je obvod přiveden na hranici stability.

Zesílení r_0 kterým jsme obvod dostali na hranici stability se nazývá **kritické zesílení r_{0k}** . Na hranici stability kmitá obvod netlumenými kmity o konstantní amplitudě a důležité je změřit právě dobu těchto kmitů a to je tzv. **kritická perioda T_k** . Na základě znalostí těchto dvou parametrů r_{0k} a T_k zjistíme z tab. 3.8 optimální parametry pro jakýkoliv typ regulátoru.

Postup při seřizování regulátoru metodou Ziegler-Nichols je tedy následující:

- vyřadíme integrační a derivační složku regulátoru ($T_i \rightarrow \infty$, $T_d \rightarrow 0$ respektive $r_I \rightarrow 0$, $r_D \rightarrow 0$)
- pomalu zvyšujeme zesílení r_0 regulátoru, až se dostaneme na netlumené kmity o konstantní amplitudě a konstantní periodě. Odečteme zesílení (to bude kritické zesílení r_{0k}) a změříme dobu kmitu (kritická - označíme T_k).
- z kritického zesílení r_{0k} na hranici stability a z kritické doby kmitu T_k určíme podle tab. 3.8 optimální parametry regulátoru, které můžeme na skutečném regulátoru nastavit.

*) U integračního regulátoru se obvod dostane do kritického stavu (na mez stability) změnou integrační konstanty regulátoru T_i , přičemž tuto kritickou hodnotu označíme T_{ik} . Z ní se odvozuje optimální nastavení I regulátoru.

Seřízení regulátoru metodou Ziegler-Nichols je velmi jednoduché a v praxi používané. Zaručuje dobrý průběh regulačního pochodu, nelze však stoprocentně tvrdit, že je to nastavení optimální. Je to nastavení **blízké optimálnímu**. Je možné, že při další změně parametrů regulátoru bychom docílili menší y_{max} a kratší dobu regulace T_R .

Metoda seřízení Ziegler-Nichols selhává u strukturálně stabilních a strukturálně nestabilních obvodů (při vyřazení integrační a derivační složky), protože tyto obvody se nedají převést do kritického stavu (na mez stability). U strukturálně nestabilních obvodů je seřízení regulátoru samo o sobě nesmysl.

Toto byla ve stručnosti verze Ziegler-Nicholsovy metody v provozním zapojení. Všechny popsané úkony se mohou provádět početně a tak dopředu podle této metody určit optimální nastavení regulátoru a pak ho teprve realizovat na skutečném regulátoru. Ukážeme si to na příkladech.

Příklad 3.34: Metodou Ziegler-Nichols určete optimální nastavení P regulátoru v obvodu podle obr. 3.69.

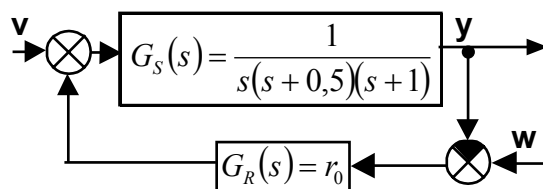
Řešení: První krok by byl vyřadit integrační a derivační složku, což u P regulátoru nepadá v úvahu. Potom změnou zesílení regulátoru přivedeme obvod na mez stability. Přenos rozpojeného obvodu a charakteristická rovnice jsou

$$G_0(s) = \frac{r_0}{s(s+0,5)(s+1)} \Rightarrow s^3 + 1,5s^2 + 0,5s + r_0 = 0$$

Přivést obvod na hranici stability znamená, že musí platit

typ reg.	r_0	T_i	T_d
P	$0,5 r_{0k}$	-	-
PI	$0,45 r_{0k}$	$0,83 T_k$	-
PD	$0,4 r_{0k}$	-	$0,05 T_k$
PID	$0,6 r_{0k}$	$0,5 T_k$	$0,12 T_k$
I *)	-	$2 T_{ik}$	-

Tab. 3.8 Seřízení podle Ziegler-Nicholse



Obr. 3.69

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1,5 & r_0 \\ 1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,75 - r_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{0k} = 0,75$$

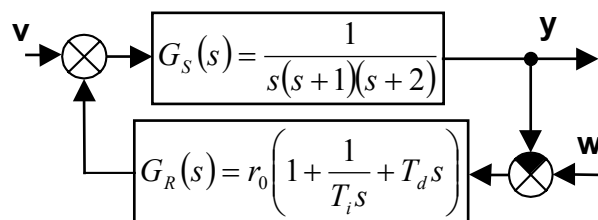
Kritické zesílení (na hranici stability) je známé a z něho podle tab.3.8 určíme optimální zesílení

$$r_0 = 0,5 r_{0k} = 0,5 \cdot 0,75 = 0,375$$

Stabilita obvodu s tímto zesílením je zřejmá, neboť vidíme, že pro tuto hodnotu r_0 je $H_2 > 0$.

Příklad 3.35: Metodou Ziegler-Nicholsovou určete optimální nastavení regulátorů P, PI, PD a PID pro regulovanou soustavu podle obr. 3.70.

Řešení: Nejdříve uvažujeme regulátor P (vyřadíme integrační a derivační složku) a určíme kritické zesílení r_0 tohoto regulátoru (hranice stability) a potom určíme periodu kmitů T_k na hranici stability



Obr. 3.70

$$G_0(s) = \frac{r_0}{s(s+1)(s+2)} = \frac{r_0}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad \Rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 2s + r_0 = 0$$

Na hranici stability je

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & r_0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - r_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{0k} = 6$$

Nyní ještě určit periodu kmitů na hranici stability. Právě na hranici stability bude mít charakteristická rovnice dvojici imaginárních kořenů – kořenů na imaginární ose

$$s_{1,2} = 0 \pm j\omega$$

a jejich hodnota je právě úhlová frekvence kmitů [vzpomeňme si, že při kořenech $a \pm jb$ je řešení diferenciální rovnice $y = \dots + e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) + \dots$]. Dosadíme tedy do charakteristické rovnice na hranici stability kořeny $s_{1,2}$ a dostáváme

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 6 = 0$$

Rovnat nule se musí reálná i imaginární část

$$\left. \begin{array}{l} -3\omega^2 + 6 = 0 \\ -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{2}$$

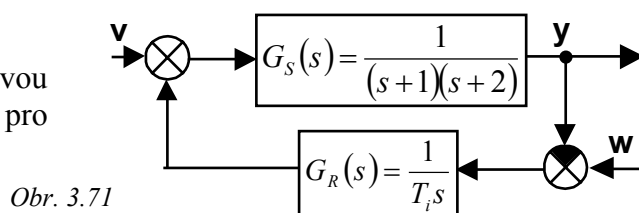
Toto je úhlová frekvence na hranici stability a z ní můžeme spočítat kritickou periodu T_k

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 4,44 [s]$$

Podle tab.3.8 je optimální nastavení při $r_{0k} = 6$, $T_k = 4,44 [s]$ pro jednotlivé typy regulátorů následující

P	$r_0 = 0,5 r_{0k} = 3$		
PI	$r_0 = 0,45 r_{0k} = 2,7$	$T_i = 0,83 T_k = 3,68[s]$	
PD	$r_0 = 0,4 r_{0k} = 2,4$		$T_d = 0,05 T_k = 0,22[s]$
PID	$r_0 = 0,6 r_{0k} = 3,6$	$T_i = 0,5 T_k = 2,22[s]$	$T_d = 0,12 T_k = 0,53[s]$

Příklad 3.71: Metodou Ziegler-Nicholsovou určete optimální nastavení I regulátoru pro soustavu podle obr. 3.71.



Obr. 3.71

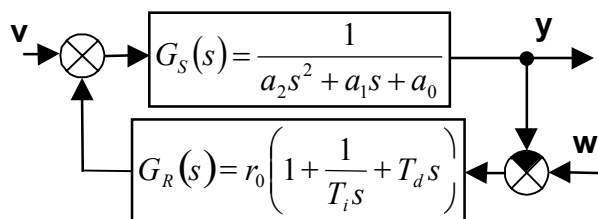
Řešení: Změnou T_i přivedeme obvod na hranici stability. Přenos rozpojeného obvodu $G_0(s)$ a odpovídající charakteristická rovnice jsou

$$G_0(s) = \frac{1}{T_i s(s+1)(s+2)} \quad T_i s^3 + 3T_i s^2 + 2T_i s + 1 = 0$$

Na hranici stability musí platit

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3T_i & 1 \\ T_i & 2T_i \end{vmatrix} = T_i(6T_i - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{ik} = \frac{1}{6} [s] \quad \text{Optimální nastavení I regulátoru podle}$$

tab. 3.8 je $T_i = 2 \cdot T_{ik} = 0,33 [s]$.



Obr. 3.72

změnou zesílení r_0 obvod na hranici stability. Přenos rozpojeného obvodu a z něho charakteristická rovnice jsou

$$G_0(s) = \frac{r_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \Rightarrow \quad a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + r_0 = 0$$

Charakteristická rovnice jasně ukazuje na strukturálně stabilní obvod, neboť a_0, a_1, a_2, r_0 jsou kladné koeficienty a tento obvod nelze změnou zesílení r_0 přivést na hranici stability.

Příklad 3.36: Zdůvodněte, proč nelze Ziegler-Nicholsovu metodu nastavení parametrů regulátorů použít pro nastavení jakéhokoliv regulátoru (s výjimkou I regulátoru) při regulaci obecné statické soustavy se zpožděním 2. řádu – obr. 3.72.

Řešení: První etapa nastavování podle Ziegler-Nicholsovy metody je vyřadit integrační a derivační složku a přivést

Kontrolní otázky

1. Nakreslete blokové schéma regulačního obvodu a vyznačte jeho veličiny.
2. Vysvětlete pojem transformace funkce. Co je to přímá a zpětná transformace? Jak se formálně označují?
3. Uveďte definici Laplaceovy transformace. Co víte o slovníku Laplaceovy transformace?
4. Určete Laplaceův obraz lineární funkce $f(t) = t$ výpočtem podle definičního vztahu.
5. Určete originál k Laplaceovu obrazu $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.
6. Co je to statická charakteristika systémů a jak ji získáváme?
7. Co je to vnější popis systému a jaké druhy vnějšího popisu znáte?
8. Uveďte obecnou diferenciální rovnici systému a podmínku fyzikální realizace.
9. Řekněte definici přenosu a napište výpočtový vzorec pro přenos z koeficientů diferenciální rovnice.
10. Jaké znáte tvary přenosu – rozved'te.
11. Jak spočítáte odezvu regulačního členu na známou vstupní funkci?

12. Zvolte si diferenciální rovnici systému a určete jeho přenos a naopak ze zvoleného přenosu napište diferenciální rovnici systému.
13. Uveďte definici impulsní funkce. Jak se získá ze známého přenosu?
14. Vypočtete impulsní funkci a sestrojte impulsní charakteristiku pro přenosy $G(s) = \frac{3}{s}$ a $G(s) = \frac{2}{s+3}$.
15. Uveďte definici přechodové funkce. Jak se získá ze známého přenosu?
16. Pro přenosy z př.14 vypočtete přechodovou funkci a sestrojte přechodovou charakteristiku.
17. Určete správný název regulačních členů s přenosy
 - a) $G(s) = \frac{s}{s+1}$
 - b) $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$
 - c) $G(s) = \frac{s+1}{(5s+1)}$
 - d) $G(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$
18. Jaká je definice frekvenčního přenosu a jak se vypočítá z koeficientů diferenciální rovnice?
19. Jak se konstruuje frekvenční charakteristika z frekvenčního přenosu? Uveďte dva způsoby konstrukce.
20. Jak se experimentálně zjišťuje frekvenční charakteristika regulačního členu?
21. Na zvoleném příkladu vysvětlíte podstatu dopravního zpoždění u regulovaných soustav. Jaký vliv má dopravní zpoždění na regulaci?
22. Jak se dopravní zpoždění projeví v diferenciální rovnici, v přenosu a frekvenčním přenosu?
23. Řešte vámi zvolené příklady na blokovou algebru, které odpovídají příkladům v textu.
24. Pro jednotlivé typy regulátoru uveďte jejich rovnici, přenos, frekvenční a přechodovou charakteristiku.
25. Jak se z operačních zesilovačů vytváří jednotlivé typy regulátorů?
26. Jaké vlastnosti v regulačním pochodu mají jednotlivé typy regulátorů?
27. Jaká je obecná podmínka stability regulačního obvodu? Co je to charakteristická rovnice a jak se získá? Doplnující podmínky stability.
28. Uveďte znění a vysvětlíte použití Hurwitzova kritéria.
29. Uveďte znění a vysvětlíte použití Routh-Schurova kritéria.
30. Uveďte znění a vysvětlíte použití Michajlov-Leonhardova kritéria.
31. Uveďte znění a vysvětlíte použití Nyquistova kritéria.
32. Zvolte si regulační obvody podobné zde uváděným a vyřešte jejich stabilitu různými kritérii a porovnejte výsledky a pracnost řešení.
33. Uveďte obecný postup při nastavování parametrů regulátorů metodou Ziegler-Nichols.
34. Řešte příklady obdobné příkladům v textu na výpočet optimálních parametrů regulátorů metodou Ziegler-Nichols.
35. Pro které obvody selhává metoda Ziegler-Nichols a proč?

4. DISKRÉTNÍ ŘÍZENÍ

4.1 Diskrétní regulační obvod

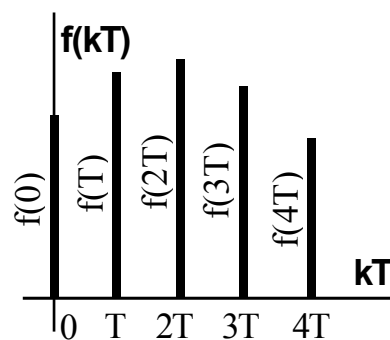
Spojité řízení se bez problémů používalo do doby, kdy byl za druhé světové války vynalezen radiolokátor pro zjišťování polohy letadel. Poloha letadla je veličina, která se mění naprosto spojitě v prostoru i čase. Pokud ji ale měříme radiolokátorem, jeví se jako nespojitá veličina, jejíž hodnotu známe pouze v určitých periodicky se opakujících okamžicích. A pokud se řídí zaměření protiletadlového kanonu, je vstupní řídicí informace tato nespojitá (v dalším budeme říkat diskrétní) veličina. A zde právě skončí použití spojitého řízení a nastupuje řízení diskrétní. Regulační obvod musíme vyšetřovat jako **diskrétní regulační obvod**.

V dnešní době je důvod vyšetřování regulačních obvodů jako diskrétních hlavně někde jinde. Je to **použití počítače ve funkci regulátoru**. Zatím jsme mluvili o spojitých PID regulátorech, jejichž hardwareovým základem byl operační zesilovač a které pracovaly naprosto spojitě. Regulovaná veličina – respektive regulační odchylka – vstupující do regulátoru bylo spojitě se měnící napětí, to bylo v regulátoru zesilováno, derivováno, integrováno a výstupní akční veličina bylo spojitě se měnící napětí, zesíleno ve výkonovém zesilovači pohánělo servomotor atd. Ve spojitém regulačním obvodu existovalo trvalé spojení mezi spojitým průběhem regulované veličiny $y(t)$ a na ni závislým průběhem akční veličiny $u(t)$. Tato nepřetržitost a trvalost sledování není naprosto nutná. Počítač dokáže nahradit regulátor stran zesílení, derivace, integrace, ale jeho vstup nemůže být spojitě se měnící napětí, odpovídající regulované veličině. Musíme předřadit analogově-digitální převodník a tak do počítače vstupuje už posloupnost impulsů – numerických hodnot, a to už je diskrétní veličina. Regulátor – počítač je schopen pracovat tak, že regulovanou veličinu y zjišťuje pouze v určitých okamžicích a pouze v těchto okamžicích počítá hodnotu akční veličiny u . Z počítače vystupuje opět posloupnost impulsů (opět diskrétní veličina), které musí být nějak přetvořeny na spojitou veličinu, která může otáčet servomotorem, a tím zasahovat do regulované soustavy. A použití počítače ve funkci regulátoru je hlavní důvod proč přecházíme od spojitého řízení k řízení diskrétnímu.

Diskrétní regulační obvody jsou takové, v nichž alespoň jeden člen pracuje diskrétně, tj. informaci přijímá nebo vydává, eventuálně obojí, v **diskrétních časových okamžicích** (zpravidla rovnoměrných – ekvidistantních). Jinými slovy, **alespoň jedna veličina obvodu má tvar posloupnosti diskrétních hodnot**.

Tuto vlastnost má řada technických zařízení jako jsou impulsní obvody, číslicové počítače atd. Vedle tohoto skutečného diskrétního výstupu jsou diskrétní i svou podstatou spojitě veličiny, které nemohou být měřeny spojitě. Jsou to již vzpomenuté polohy objektů, měřené radiolokátory. Nebo veličiny, jejichž hodnoty jsou přenášeny dálkovým přenosem s diskrétním charakterem apod. Dnes ovšem nejčastějším případem diskrétního systému řízení je **použití číslicového počítače jako regulátoru v systému automatického řízení**.

Ještě než se dostaneme k diskrétnímu regulačnímu obvodu, zavedeme si pojem diskrétní funkce. **Diskrétní funkce $f(kT)$** je charakterizována posloupností hodnot $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$, ... v tzv. vzorkovacích okamžicích, tj. v čase $t = 0, T, 2T, \dots$ (obr. 4.1). Mimo časové okamžiky vzorkování není funkce $f(kT)$ definována – není informace o hodnotě příslušné veličiny než v uvedené časové okamžiky. Časové okamžiky, v nichž je funkce $f(kT)$ definována jsou ekvidistantní $t = kT$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$. Čas $t = kT$ se nazývá diskrétní čas a zápisem funkce $f(kT)$ je na první pohled jasné, že



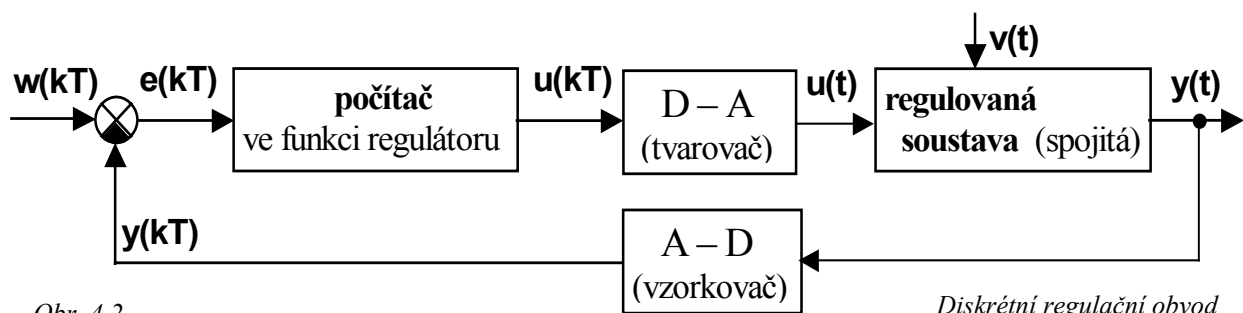
Obr. 4.1

se jedná o diskrétní časovou funkci. Hodnota T se nazývá **vzorkovací perioda**, má rozměr [s] a je vztahem

$$\omega_v = \frac{2\pi}{T} \quad (4.1)$$

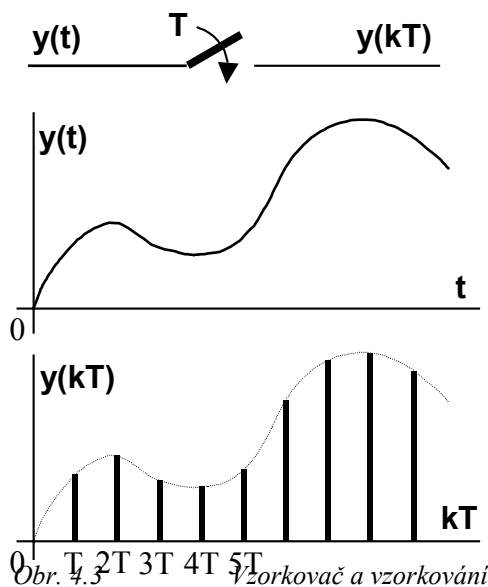
vázána se **vzorkovací frekvencí** ω_v .

Blokové schéma diskrétního regulačního obvodu je na obr. 4.2. Jedná se o nejběžnější typ regulačního obvodu, kdy je regulována spojitá soustava, tudíž máme spojitou regulovanou veličinu $y(t)$. Ta je prostřednictvím analogově-digitálního převodníku (v regulační technice nazývaný vzorkovač) vzorkována s periodou T a převedena do číslicového tvaru, tj. na diskrétní funkci



Obr. 4.2

$y(kT)$. Počítač vypočítá ze vstupní řídicí veličiny $w(kT)$, která je už pochopitelně zadávána v číslicovém tvaru a z $y(kT)$ regulační odchylku $e(kT)$ a vlastní řídicí algoritmus počítače určí hodnotu akčního zásahu $u(kT)$. Tato hodnota je digitálně-analogovým převodníkem (v regulační technice nazývaný tvarovač) převedena na spojitý signál $u(t)$, který prostřednictvím regulačního orgánu působí na regulovanou soustavu.



Obr. 4.3

vzorkovač a vzorkování

Počítačům ve funkci regulátoru, jejich algoritmům a způsobům, jak nahrazují spojité regulátory (jak provádí zesilování, integraci a derivaci vstupní regulační odchylky) bude věnována celá jedna kapitola. Na tomto místě se budeme věnovat dvěma novým členům regulačního obvodu, které neznáme ze spojitých obvodů a to jsou vzorkovač a tvarovač.

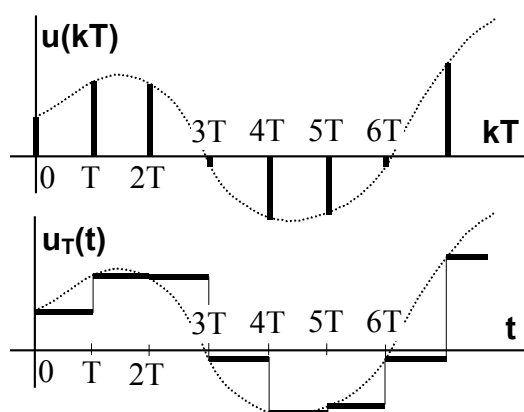
Vzorkovač a vzorkování. Vzorkovač provádí periodické snímání hodnoty vstupní veličiny – např. regulované veličiny y . Její hodnotu odebírá v pravidelných intervalech ve formě vzorků a mezi dvěma odběry ho průběh této veličiny nezajímá. Ve schématech se vzorkovač, jinak analogově-digitální převodník, znázorňuje jako spínač – je to na obr. 4.3, z kterého je také patrný princip vzorkování regulované veličiny y .

Princip řízení takto popsany nazýváme **diskrétní** podle vlastnosti, že po většinu doby není vzorkovaná regulovaná veličina vůbec sledována a regulátor nepřestavuje akční veličinu, takže řízení je „skryto, utajeno, diskrétní“ a rovněž tak příslušné veličiny jsou „skryty, utajeny, diskrétní“.

Základní otázkou diskrétního řízení je **délka periody vzorkování T** , čili po jak dlouhou dobu může být regulovaná veličina bez sledování a regulovaná soustava bez akčního zásahu.

Intuitivně cítíme, že čím je regulovaná soustava „pomalejší“ (přesněji: čím má delší časové konstanty), tím bude delší i perioda vzorkování. Budeme-li řídit kormidlem kurz zaoceánské lodi, je regulovaná soustava („lod“) pomalá soustava s dlouhými časovými konstantami a můžeme si dovolit při návrhu automatického diskrétního řízení volit dlouhou vzorkovací periodu.

Z této úvahy vycházejí různé empirické vzorce, které pomáhají při rychlé volbě vzorkovací periody. Podle nich se např. k regulované soustavě o přenosu $G_s(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots}$ volí vzorkovací perioda $T \cong 0,5 \tau_{\min}$ nebo $T \cong \left(\frac{1}{4} \text{ až } \frac{1}{2}\right) \sum \tau_i$ či u soustav s dopravním zpožděním je vzorkovací perioda volena v závislosti na dopravním zpoždění T_D také určitými empirickými vztahy.



Obr. 4.4

Tvarovač a tvarování. Působí-li diskrétní signál (konkrétně akční zásah $u(kT)$) jako vstupní veličina do spojité regulované soustavy, je potřebí ho upravit – tvarovat. Diskrétní signál totiž obsahuje řadu nekonečně krátkých impulsů, jejichž amplituda je nositelem informace, v žádném případě však energie, kterou by mohl předávat následujícímu členu obvodu. Tvarování diskrétního signálu je v podstatě jeho přeměna na spojitý signál (aspoň po částech spojitý). Tento signál pak musí být schopen předávat následujícímu členu jednak informaci a jednak potřebnou energii.

Většinou se používá **tvarovače nultého řádu** a v dalším se zaměříme pouze na tento typ tvarovače. Výstupní tvarovače je po celou dobu periody T konstantní a je rovna amplitudě vstupního impulsu, přivedeného na počátku této periody. Je to schodová (stupňová) funkce a princip tvarovače je patrný z obr. 4.4. Přenos tohoto tvarovače je dán vztahem

$$G_T(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (4.2)$$

4.2 Z – transformace

Z – transformace je matematický aparát, který využíváme především při popisu, analýze i syntéze diskrétních regulačních systémů. Má zde stejnou funkci jako Laplaceova transformace u spojitých systémů.

Laplaceův obraz spojitě funkce $f(t)$ je dán vztahem (3.2)

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Vzorkujeme-li tuto funkci vzorkovačem s periodou T dostaneme diskrétní funkci $f(kT)$ a její Laplaceův obraz získáme stejně, ale musíme přejít od integrálu k sumě

$$L\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT} \quad (4.3)$$

Zavedeme-li novou proměnnou z vztahem

$$z = e^{sT} \quad (4.4)$$

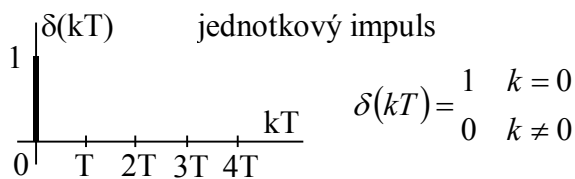
definuje nám tento vztah Z – obraz (na pravé straně zmizelo s , je to funkce nové proměnné z)

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \quad (4.5)$$

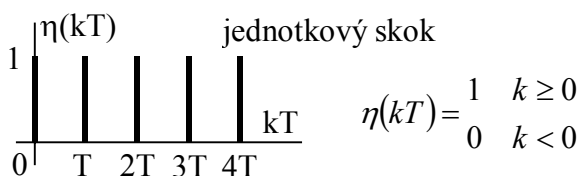
Zdůrazňme, že Z – obraz tímto vztahem definovaný je pouze pro diskrétní funkce a nelze ho použít pro spojité funkce.

Příklad 4.1: Určete Z – obraz

- jednotkového diskrétního impulsu $\delta(kT)$
- jednotkové diskrétní skokové funkce $\eta(kT)$
- diskrétní funkce, kterou získáme vzorkováním spojité funkce $f(t)=e^{-2t}$ se vzorkovací periodou T



Obr. 4.5



Obr. 4.6

Řešení: Definice a znázornění jednotkového diskrétního impulsu $\delta(kT)$ je na obr. 4.5 a jednotkové diskrétní skokové funkce $\eta(kT)$ vidíme na obr. 4.6. Obě tyto funkce jsou velmi důležité a budeme je stále potřebovat, je dobré si jejich definice zapamatovat. Nyní použijeme definiční vztah Z – obrazu (4.5) a Z – obraz těchto funkcí spočítáme.

U těchto funkcí se jedná o nekonečnou geometrickou řadu, v níž každý následující člen řady dostaneme z předchozího vynásobením kvocientem q . Má-li tato řada první člen a_0 a kvocient q , je její součet dán vztahem

$$s = \frac{a_0}{1 - q}.$$

- $Z\{\delta(kT)\} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$
- $Z\{\eta(kT)\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$
- $Z\{e^{-2kT}\} = 1 + e^{-2T}z^{-1} + e^{-4T}z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-2T}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-2T}}$

Stejně jako u Laplaceovy transformace se výpočet Z – obrazů neprovádí výpočtem podle definičního vztahu (4.5), jako tomu bylo u těchto příkladů, ale používá se slovník Z - transformace. Ve slovníku Z – transformace jsou obdobně jako u slovníku Laplaceovy transformace diskrétní funkce $f(kT)$ a příslušný Z – obraz $F(z)$. Ale vedle toho tam jsou v jednom řádku také odpovídající spojité funkce $f(t)$, z které se vzorkováním diskrétní funkce získala a její Laplaceův obraz $F(s)$. To jak uvidíme bude mnohdy velmi užitečné. Takový základní slovník je v tab. 4.1.

Příklad 4.2: Použitím slovníku Z – transformace určete Z – obraz diskrétní funkce $f(kT)$, která vznikne vzorkováním spojité funkce $f(t)=t.e^{-2t}$, je-li tato vzorkována vzorkovačem se vzorkovací periodou $T = 2$ [s].

Řešení: Obraz diskrétní funkce vzniklé vzorkováním spojité funkce $f(t)=t.e^{-2t}$ je podle slovníku

$$F(z) = \frac{Tze^{-2T}}{(z - e^{-2T})^2}$$

Dosadíme-li $T = 2$ je

$$F(z) = \frac{2ze^{-4}}{(z - e^{-4})^2} = \frac{0,037z}{z^2 - 0,037z + 0,018}$$

Poznámka 1: Všimněte si, že po dosazení konkrétní hodnoty T je Z - obraz vždy racionální lomená funkce proměnné z .

$f(t)$	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	1
$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\eta(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{z(z+1)T^2}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s - \frac{\lg a}{T}}$	a^k	$\frac{z}{z-a} \quad (a > 0)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega T$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

Tab.4.1

Slovník Z - transformace

Příklad 4.3: Určete Z – obraz diskretní funkce, vzniklé vzorkováním spojité funkce, jejíž Laplaceův obraz je $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$.

Řešení: Rozložíme funkci $F(s)$ na součet parciálních zlomků

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

a použitím slovníku určíme Z – obraz

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{zTe^{-1}}{(z-e^{-T})^2}$$

Poznámka 2: Pokud budeme v budoucnu v podobných případech používat zkrácené označování

$$Z\{F(s)\}$$

což je v tomto případě

$$Z\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{zTe^{-1}}{(z-e^{-T})^2}$$

znamená to určení Z – obrazu $F(z)$ diskretní časové funkce $f(kT)$, která vznikla vzorkováním s periodou T spojitě funkce $f(t)$, jejíž Laplaceův obraz je $F(s)$. Správně zapsáno je to takto

$$\boxed{Z\{F(s)\} = Z\{V\{L^{-1}\{F(s)\}\}} \quad (4.6)$$

kde operace $V\{\}$ představuje vzorkování s periodou T . Samozřejmě pro toto hledání „ Z – obrazu k Laplaceovu obrazu“ je výhodný slovník Z – transformace se spojitou funkcí a jejím L – obrazem na jednom řádku.

Při zpětné transformaci hledáme k danému obrazu $F(z)$ originál, tedy diskretní časovou funkci $f(kT)$ a toto symbolicky vyjadřujeme zápisem

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

Zpětnou transformaci můžeme provádět použitím slovníku Z – transformace (obecně je nutno nejdříve provést rozklad v součet parciálních zlomků) anebo numericky dělením polynomu čitatele polynomem jmenovatele. Tento způsob si nyní vysvětlíme.

Je-li Z – obraz $F(z)$ dán v tvaru zlomku

$$F(z) = \frac{M(z)}{N(z)} \quad (4.7)$$

můžeme provést dělení polynomu $M(z)$ polynomem $N(z)$ a získat mocninnou řadu ve tvaru

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots \quad (4.8)$$

Porovnáním této řady s definičním vztahem Z – obrazu (4.8)

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

vidíme, že koeficienty mocninné řady (4.11) jsou přímo hodnoty diskretní funkce $f(kT)$

$$f(0) = f_0; \quad f(T) = f_1; \quad f(2T) = f_2; \quad \dots$$

Částečnou nevýhodou této metody je, že originál dostaneme v tzv. „otevřeném“ tvaru, jako posloupnost numerických hodnot. Někdy by se nám tato originální funkce hodila spíše v tzv. „uzavřeném“ tvaru, jako algebraický výraz. Výhodou metody zase naopak je, že při výpočtu např. impulsních nebo přechodových funkcí tyto získáme konkrétně numericky a to je větší žádoucí.

Dělení polynomu čitatele polynomem jmenovatele provádíme jako písemné dělení a bude ukázáno na příkladu.

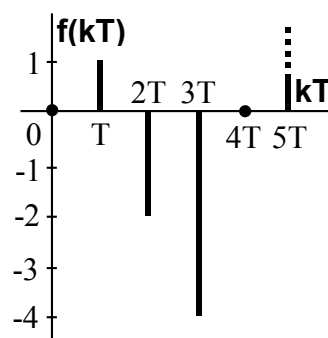
Na dalším příkladu bude demonstrováno hledání originálu použitím slovníku Z – transformace a srovnáváno s metodou dělení polynomů.

Příklad 4.4: Stanovte originál $f(kT)$ k funkci $F(z) = \frac{z-3}{z^2-z+2}$.

Řešení:

$$\begin{array}{r}
 (z-3):(z^2-z+2) = \underbrace{z^{-1}}_{f(T)} - \underbrace{2z^{-2}}_{f(2T)} - \underbrace{4z^{-3}}_{f(3T)} + \underbrace{8z^{-5}}_{f(5T)} + \dots \\
 \hline
 z - 1 + 2z^{-1} \\
 0 - 2 - 2z^{-1} \\
 \hline
 -2 + 2z^{-1} - 4z^{-2} \\
 \hline
 0 - 4z^{-1} + 4z^{-2} \\
 \hline
 -4z^{-1} + 4z^{-2} - 8z^{-3} \\
 \hline
 0 \quad + 0 \quad + 8z^{-3} \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0 \\
 f(T) &= 1 \\
 f(2T) &= -2 \\
 f(3T) &= -4 \\
 f(4T) &= 0 \\
 f(5T) &= 8 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$



Grafické znázornění funkce $f(kT)$ je na obr. 4.7

Obr. 4.7

Příklad 4.5: Stanovte originál $f(k)$ k funkci $F(z) = \frac{z(3z+4)}{(z+2)(z+3)(z+4)}$.

Řešení: Funkci $F(z)$ rozložíme na parciální zlomky

$$F(z) = -\frac{z}{z+2} + \frac{5z}{z+3} - \frac{4z}{z+4}$$

Podle slovníku Z – transformace v tab. 4.1 je

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = a^k$$

a tedy originál k $F(z)$ je

$$f(kT) = -(-2)^k + 5(-3)^k - 4(-4)^k$$

který platí obecně pro $k \geq 0$. Poznámka ve slovníku $a > 0$ platí pro spojité funkce, kde je $\lg a$.

Proveďme ještě kontrolu dělením čitatele jmenovatelem. Jmenovatel je

$$(z-2)(z-3)(z-4) = z^3 + 9z^2 + 26z + 24$$

$$(3z^2 + 4z):(z^3 + 9z^2 + 26z + 24) = \underbrace{3z^{-1}}_{f(T)} - \underbrace{23z^{-2}}_{f(2T)} + \underbrace{129z^{-3}}_{f(3T)} + \dots$$

$$\begin{array}{r}
 3z^2 + 27z + 78 + 72z^{-1} \\
 \hline
 0 \quad -23z + 78 - 72z^{-1} \\
 \hline
 -23z - 207 - 598z^{-1} - 552z^{-2} \\
 \hline
 0 \quad +129 + 526z^{-1} + 552z^{-2} \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

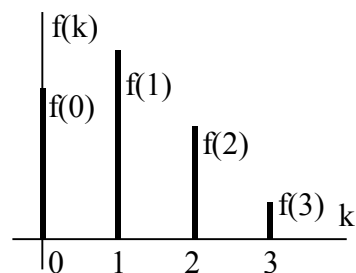
$$f(0) = 0; f(T) = 3; f(2T) = -23; f(3T) = 129;$$

k	$f(kT)$
0	0
1	3
2	-23
3	129
...	...

4.3 Diferenční rovnice

Tak jako základním tvarem matematického popisu spojitéch systémů jsou diferenciální rovnice, tak základem matematického popisu diskrétních systémů jsou diferenční rovnice.

V minulých kapitolách byl zaveden pojem diskrétní funkce $f(kT)$, což je posloupnost diskrétních hodnot $f(0), f(T), f(2T), \dots$ v ekvidistantních časových okamžicích $t = kT$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$ atd. V diferenčních rovnicích budeme bez vlivu na obecnost předpokládat $T = 1$ [s] a diskrétní čas bude k místo kT . Posloupnost diskrétních



Obr. 4.8

funkčních hodnot tedy bude $f(0), f(1), f(2), \dots$ atd., viz obr. 4.8.

Základem diferenčních rovnic je pojem **diference funkce** (zde už stále máme na mysli diskretní funkci). První difference je dána rozdílem dvou sousedních diskretních hodnot. Přitom je možno použít dvou způsobů definování diferencí, a to jako dopřednou diferenci anebo jako zpětnou diferenci:

$$\begin{array}{ll} \text{dopředná difference} & \text{zpětná difference} \\ \Delta f(k) = f(k+1) - f(k) & \nabla f(k) = f(k) - f(k-1) \end{array} \quad (4.9)$$

V obou případech je první difference analogií první derivace u spojitých funkcí (určuje rychlost změny funkce a geometricky je to směrnice tečny). Druhá difference (dopředná i zpětná) je zavedena vztahem

$$\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) \quad \nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) \quad (4.10)$$

a je možno ji vyčíslit z funkčních hodnot

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(k) &= f(k+2) - f(k+1) - f(k+1) + f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) \\ \nabla^2 f(k) &= f(k) - f(k-1) - f(k-1) + f(k-2) = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Postupně můžeme zavést vyšší difference a vždy je možné je vyčíslit funkčními hodnotami (přitom platí, že řád difference je roven nejvyššímu posunutí u funkčních hodnot).



Obr. 4.9

Lineární diferenční rovnici diskretního systému podle obr. 4.9 n -tého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou můžeme napsat v tzv. **diferenčním tvaru**

s dopřednými diferencemi

$$\alpha_n \Delta^n y(k) + \dots + \alpha_1 \Delta y(k) + \alpha_0 y(k) = \beta_m \Delta^m u(k) + \dots + \beta_1 \Delta u(k) + \beta_0 u(k) \quad (4.12)$$

se zpětnými diferencemi

$$\alpha_n \nabla^n y(k) + \dots + \alpha_1 \nabla y(k) + \alpha_0 y(k) = \beta_m \nabla^m u(k) + \dots + \beta_1 \nabla u(k) + \beta_0 u(k) \quad (4.13)$$

kde $u(k)$ je známá vstupní diskretní funkce systému

$y(k)$ je hledaná výstupní diskretní funkce systému.

Jestliže v těchto diferenčních rovnicích nahradíme difference jejich funkčními hodnotami podle vztahů (4.11) ... atd., dostaneme **rekurentní tvar** diferenční rovnice

z dopředných diferencí

$$a_n y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \quad (4.14)$$

ze zpětných diferencí

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \quad (4.15)$$

Diferenční rovnice z dopředných diferencí (4.14) je uváděna jako **diferenční rovnice s kladnými posunutími**. Počáteční podmínky jsou zde dány funkčními hodnotami $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$. Tento tvar je běžný v matematické literatuře, ale v technických disciplínách se užívá a je výhodnější druhý tvar (4.15) ze zpětných diferencí, který se nazývá tvar diferenční rovnice **se zápornými posunutími**. Počáteční podmínky jsou zde dány posloupností hodnot $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ a tyto jsou většinou nulové.

Nyní si ukážeme, jak se diferenční rovnice řeší. Běžné a v praxi používané je **numerické** někdy nazývané **rekurentní** řešení diferenčních rovnic.

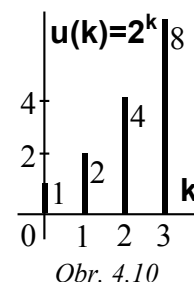
Příklad 4.6: Řešte numericky diferenční rovnici (kladná posunutí)

$$y(k+3) + 4y(k+2) - 0,5y(k+1) + 3y(k) = 6u(k+1) - 2u(k)$$

Protože se jedná o diferenční rovnici třetího řádu, jsou zadány tři počáteční podmínky

$$y(0) = 1; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 4$$

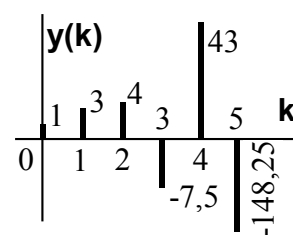
a funkce na pravé straně rovnice (vstupní funkce) $u(k) = 2^k$ (obr. 4.10).



Řešení: Rovnici upravíme tak, aby na levé straně byla hodnota výstupní funkce y s největším posunutím. Řešení neboli posloupnost hodnot $y(k)$ pak spočítáme postupným dosazováním $k = 0, 1, 2, \dots$ atd. pro libovolný počet hodnot.

$$y(k+3) = -4y(k+2) + 0,5y(k+1) - 3y(k) + 6u(k+1) - 2u(k)$$

$$\text{počáteční podmínky} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$



$$k = 0: \quad y(3) = -4y(2) + 0,5y(1) - 3y(0) + 6u(1) - 2u(0) = -4 \cdot 4 + 0,5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -7,5$$

$$k = 1: \quad y(4) = -4y(3) + 0,5y(2) - 3y(1) + 6u(2) - 2u(1) = -4 \cdot (-7,5) + 0,5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 43$$

$$k = 2: \quad y(5) = -4y(4) + 0,5y(3) - 3y(2) + 6u(3) - 2u(2) =$$

$$= -4 \cdot 43 + 0,5 \cdot (-7,5) - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = -148,25$$

..... atd., graf řešení je na obr. 4.11.

Poznámka: Řešení nedostáváme v uzavřeném tvaru. Postup je velice snadno algoritmizovatelný a převoditelný do programu.

Příklad 4.7: Řešte numericky diferenční rovnici (záporná posunutí)

$$y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = 0,5u(k) - u(k-1)$$

pro vstupní funkci $u(k) = \sin k$ pro $k \geq 0$ a pro nulové počáteční podmínky $y(-1) = y(-2) = 0$.

Řešení: Vyjádříme na levé straně rovnice člen s „nejmenším“ posunutím

$$y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) + 0,5u(k) - u(k-1)$$

a postupně dosazujeme $k = 0, 1, 2, \dots$ a dostáváme řešení diferenční rovnice

$$k = 0: \quad y(0) = 2y(-1) - y(-2) + 0,5u(0) - u(-1) = 2 \cdot 0 - 0 + 0,5 \cdot 0 = 0$$

$$k = 1: \quad y(1) = 2y(0) - y(-1) + 0,5u(1) - u(0) = 2 \cdot 0 - 0 + 0,5 \cdot 0,84 = 0,42$$

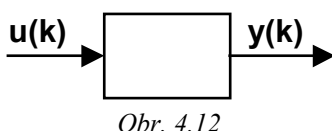
$$k = 2: \quad y(2) = 2y(1) - y(0) + 0,5u(2) - u(1) = 2 \cdot 0,42 - 0 + 0,5 \cdot 0,91 = 1,295 \quad \dots \text{atd}$$

4.4 Matematický popis diskretních členů

Prakticky stejné matematické popisy jako známe u spojitých systémů jsou i u diskretních systémů, pouze místo diferenciálních rovnic používáme diferenční rovnice a místo Laplaceovy transformace používáme Z – transformaci. Seznámíme se s běžně užívanými popisy diskretních členů (frekvenčním přenosem a charakteristikou, jejichž používání není u diskretních členů tak časté jako u spojitých se zabývat nebudeme):

- diferenční rovnice
- Z – přenos
- impulsní funkce a charakteristika
- přechodová funkce a charakteristika
- frekvenční přenos
- frekvenční charakteristika

Diferenční rovnice a Z – přenos



Mějme diskretní systém s jednou vstupní veličinou $u(k)$ a jednou výstupní veličinou $y(k)$ podle obr. 4.12. Jak vstupní tak výstupní veličina jsou diskretní časové funkce. Tento systém můžeme popsat diferenční rovnicí se zápornými posunutími

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \quad (4.16)$$

anebo diferenční rovnicí s kladnými posunutími

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_0 u(k) \quad (4.17)$$

V regulační technice a v technické praxi vůbec se více používají diferenční rovnice se záporným posunutím. Koeficient a_0 u hodnoty $y(k)$ (u rovnic se zápornými posunutími (4.16)) bývá standardně normalizován na hodnotu 1, což umožňuje výhodně určit řešení $y(k)$ numerickým způsobem. Jedná se o dělení celé rovnice tímto koeficientem, pokud tento není jednotkou – při numerickém řešení pak není třeba neustálého dělení koeficientem a_0 .

Tak jako u lineárních spojitých systémů vyjadřujeme jejich popis pomocí přenosu v Laplaceově transformaci, můžeme vlastnosti diskretních systémů vyjádřit pomocí Z – přenosu, který je definovaný jako **poměr Z – obrazu výstupu a vstupu při nulových počátečních podmínkách**

$$G(z) = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (4.18)$$

Z – přenos získáme z diferenční rovnice (4.16), což je samozřejmě rovnice se zápornými posunutími podle vzorce, který je analogický se vzorcem pro přenos spojitého systému z jeho diferenciální rovnice

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.19)$$

Z – přenos $G(z)$ diskretního systému sehrává stejnou úlohu jako přenos (Laplaceův) spojitého systému.

Poznámka 1: Z – přenos můžeme kdykoliv vynásobením čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou z převést na Z – přenos s kladnými exponenty.

Příklad 4.8: Diskrétní regulační člen je popsán diferenční rovnicí

$$y(k) - 5y(k-1) + 1,2y(k-2) = 3,5u(k) + 2u(k-1) - 4u(k-2)$$

Určete Z – přenos a převeďte ho na přenos s kladnými exponenty.

Řešení:

$$G(z) = \frac{3,5 + 2z^{-1} - 4z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 1,2z^{-2}} \quad G(z) = \frac{3,5z^2 + 2z - 4}{z^2 - 5z + 1,2}$$

Použití Z – přenosu pro určení odezvy systému: Analogicky k přenosu u spojitých systémů lze pomocí Z – přenosu určit Z – obraz výstupu $Y(z)$ pro daný vstupní signál $u(k)$ a jemu příslušný Z – obraz $U(z)$ (za předpokladu nulových počátečních podmínek)

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (4.20)$$

a zpětnou Z – transformací určit odezvu $y(k)$

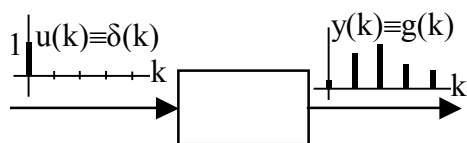
$$y = Z^{-1}\{G(z)U(z)\} \quad (4.21)$$

Poznámka 2: Při používání diferenční rovnice systému s kladnými posunutími (4.17) lze stejným způsobem jako u rovnice se zápornými posunutími odvodit vzorec pro Z – přenos z této rovnice

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (4.22)$$

Impulsní funkce a charakteristika

Diskrétní impulsní funkce je odezva systému na jednotkový impuls $\delta(k)$ na vstupu (obr. 4.13). Jednotkový impuls $\delta(k)$ byl již definován a znázorněn (trochu odlišně od definice pro spojitý systémy) v příkladu 4.1



Obr. 4.13

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

V operátorovém slovníku Z – transformace můžeme nalézt, že jeho Z – obraz je roven jedné neboli $Z\{\delta(k)\} = 1$. Graf impulsní funkce je impulsní charakteristika. Pro impulsní funkci je zavedeno označení $g(k)$.

Jelikož je Z – obraz jednotkového impulsu roven jedné $Z\{\delta(k)\} = 1$ plyne z definice Z – přenosu

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{g(k)\}}{Z\{\delta(k)\}} = Z\{g(k)\} \quad (4.24)$$

kam jsme za vstupní funkci dosadili jednotkový impuls a za výstupní funkci impulsní funkci, že **Z – obraz impulsní funkce je roven právě Z – obrazu přenosu**. Tím pádem můžeme napsat, že

$$Z\{g(k)\} = G(z)$$

a tedy mezi impulsní funkcí a Z - přenosem je vztah mezi originálem a Z – obrazem. Impulsní funkci získáme ze Z – přenosu zpětnou Z – transformací

$$\boxed{g(k) = Z^{-1}\{G(z)\}} \quad (4.25)$$

Druhý způsob jak získat výpočtem impulsní funkci je z diferenční rovnice systému, kde se za vstupní funkci dosadí jednotkový impuls $\delta(k)$ a to bude ukázáno v následujícím příkladu.

Příklad 4.9: Systém je popsán diferenční rovnicí

$$y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = 2u(k) - 7u(k-1)$$

Určete impulsní funkci různými způsoby a potom k ní načrtněte impulsní charakteristiku.

Řešení: Stanovíme Z – přenos a převedeme ho na tvar s kladnými exponenty

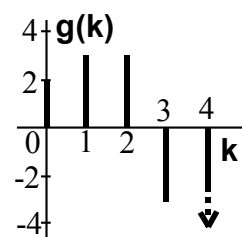
$$G(z) = \frac{2 - 7z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{2z^2 - 7z}{z^2 - 5z + 6}$$

Z $G(z)$ získáme $g(k)$ zpětnou transformací podle (4.31)

Zpětnou Z – transformaci můžeme provést dělením polynomů čitatele a jmenovatele.

$$\begin{array}{r} (2z^2 - 7z) : (z^2 - 5z + 6) = 2 + 3z^{-1} + 3z^{-2} - 3z^{-3} - 33z^{-4} + \dots \\ \underline{2z^2 - 10z + 12} \phantom{+ 3z^{-1} + 3z^{-2} - 3z^{-3} - 33z^{-4} + \dots} \\ 0 + 3z - 12 \phantom{+ 3z^{-1} + 3z^{-2} - 3z^{-3} - 33z^{-4} + \dots} \\ \underline{3z - 15 + 18z^{-1}} \\ 0 + 3 - 18z^{-1} \phantom{+ 3z^{-2} - 3z^{-3} - 33z^{-4} + \dots} \\ \underline{3 - 15z^{-1} + 18z^{-2}} \\ 0 - 3z^{-1} - 18z^{-2} \phantom{+ 3z^{-3} - 33z^{-4} + \dots} \\ \underline{-3z^{-1} + 15z^{-2} - 18z^{-3}} \\ 0 - 33z^{-2} + 18z^{-3} \end{array}$$

k	$g(k)$
0	2
1	3
2	3
3	-3
4	-33



Obr. 4.14

atd., impulsní funkce je na obr. 4.14.

A teď více méně pro kontrolu řešení diferenční rovnici, do které za $u(k)$ dosazujeme $\delta(k)$:

$$g(k) - 5g(k-1) + 6g(k-2) = 2\delta(k) - 7\delta(k-1)$$

$$g(k) = 5g(k-1) - 6g(k-2) + 2\delta(k) - 7\delta(k-1)$$

$$k=0: g(0) = 5g(-1) - 6g(-2) + 2\delta(0) - 7\delta(-1) = 2$$

$$k=1: g(1) = 5g(0) - 6g(-1) + 2\delta(1) - 7\delta(0) = 3$$

$$k=2: g(2) = 5g(1) - 6g(0) + 2\delta(2) - 7\delta(1) = 3$$

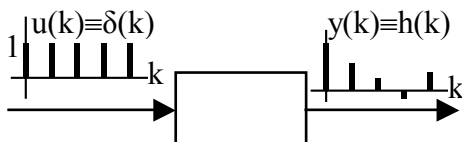
$$k=3: g(3) = 5g(2) - 6g(1) + 2\delta(3) - 7\delta(2) = -3$$

$$k=4: g(4) = 5g(3) - 6g(2) + 2\delta(4) - 7\delta(3) = -33$$

Přechodová funkce a charakteristika

Diskrétní přechodová funkce je odezva systému na jednotkový skok $\eta(k)$ na vstupu (obr. 4.15). Jednotkový skok $\eta(k)$ byl již definován a znázorněn v příkladu 4.1

$$\eta(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (4.26)$$



Obr. 4.15

Ve slovníku Z – transformace můžeme nalézt, že jeho Z – obraz je $Z\{\eta(k)\} = \frac{z}{z-1}$.

Graf přechodové funkce je přechodová charakteristika. Pro přechodovou funkci je zavedeno označení $h(k)$.

Dosazením $\eta(k)$ do definice Z – přenosu dostaneme

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{h(k)\}}{Z\{\eta(k)\}} = \frac{Z\{h(k)\}}{\frac{z}{z-1}} \quad (4.27)$$

když jsme za vstupní funkci dosadili jednotkový skok a výstupní funkce tím pádem vyšla přechodová funkce. Ze vztahu

$$Z\{h(k)\} = \frac{z}{z-1} G(z) \quad \text{neboli} \quad H(z) = \frac{z}{z-1} G(z) \quad (4.28)$$

dostaneme vztah pro získání přechodové funkce ze Z - přenosu

$$h(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{z-1}{z} G(z) \right\} \quad (4.29)$$

Druhý způsob jak získat výpočtem přechodovou funkci je z diferenční rovnice systému, podobně jako tomu bylo u impulsní funkce. Zde se za vstupní funkci dosadí jednotkový impuls $\delta(k)$ a to bude opět ukázáno v následujícím příkladu.

Příklad 4.10: Systém je popsán diferenční rovnicí

$$y(k) + 0,5 y(k-1) = u(k) + 2 u(k-1)$$

Určete přechodovou funkci a načrtněte přechodovou charakteristiku.

Řešení : Určíme Z – přenos včetně jeho tvaru s kladnými exponenty

$$G(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}} = \frac{z + 2}{z + 0,5}$$

Ze Z – přenosu získáme přechodovou funkci podle vztahu (4.29) a to rozkladem v parciální zlomky a použitím slovníku Z - transformace

$$h(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z+2}{z+0,5} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z+0,5} \right\} = 2 - (-0,5)^k \quad \text{pro } k \geq 0$$

Druhá možnost zpětné Z – transformace je dělení polynomu čitatele polynomem jmenovatele

$$(z^2 + 2z) : (z^2 - 0,5z - 0,5) = 1 + 2,5z^{-1} + 1,75z^{-2} + 2,125z^{-3} + \dots$$

$$\frac{z^2 - 0,5z - 0,5}{z^2 - 0,5z - 0,5}$$

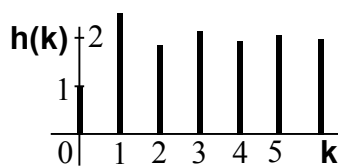
$$0 + 2,5z + 0,5$$

$$\frac{2,5z - 1,25 - 1,25z^{-1}}{0 + 1,75 + 1,25z^{-1}}$$

$$0 + 1,75 + 1,25z^{-1}$$

$$\frac{1,75 - 0,875z^{-1} - 0,875z^{-2}}{0 + 2,125z^{-1} + 0,875z^{-2}}$$

$$0 + 2,125z^{-1} + 0,875z^{-2}$$



Obr. 4.16

k	g(k)	h(k)
0	1	1
1	1,5	2,5
2	-0,75	1,75
3	0,375	2,125
4	-0,187	1,938
5	0,156	2,031
6	-0,047	1,984
...	...	...

Třetí metoda pro získání přechodové funkce je řešení diferenční rovnice, kde za vstupní funkci dosadíme $\eta(k)$

$$h(k) = \eta(k) + 2 \eta(k-1) - 0,5 h(k-1)$$

$$k = 0: \quad h(0) = \eta(0) + 2 \eta(-1) - 0,5 h(-1) = 1$$

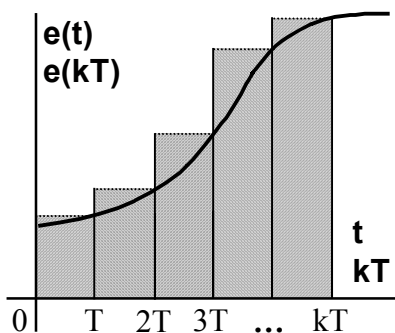
$$k = 1: \quad h(1) = \eta(1) + 2 \eta(0) - 0,5 h(0) = 2,5$$

$$k = 2: \quad h(2) = \eta(2) + 2 \eta(1) - 0,5 h(1) = 1,75$$

$$k = 3: \quad h(3) = \eta(3) + 2 \eta(2) - 0,5 h(2) = 2,125 \quad \dots \text{atd.}$$

4.5 Číslicové regulátory

Od číslicového regulátoru budeme očekávat stejnou funkci jako od spojitého regulátoru a to je vstupující regulační odchylku zesilovat, integrovat a derivovat. Proto při sestavování algoritmu pro číslicový regulátor vyjdeme z funkce a tím i rovnice spojitého PID regulátoru. PID regulátor je popsán rovnicí (3.77), kterou upravíme vytknutím r_0 stejně, jako tomu bylo u přenosu PID regulátoru, abychom získali tvar s časovými konstantami. Takže výchozí rovnice PID regulátoru je



Obr. 4.17

$$u(t) = r_0 \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (4.30)$$

Číslicovou verzi regulátoru získáme z této rovnice diskretizací integrace a derivace. Integraci provedeme náhradou spojitého signálu tzv. stupňovitou náhradou zleva (obdélníky zleva – mohli jsme také použít obdélníky zprava či sečnovou náhradou lichoběžníky). Určení hodnoty integrálu se provádí jako součet ploch pod náhradním průběhem a je uvedeno na obr. 4.17

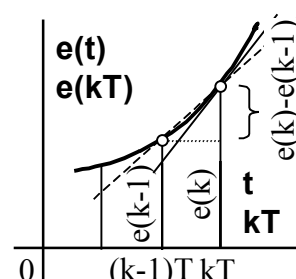
$$\int_0^{kT} e(t) dt \cong T \sum_{i=1}^k e(i) \quad (4.31)$$

Derivaci získáme nahrazením diferencemi podle obr. 4.18

$$\frac{de}{dt} \cong \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (4.32)$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnice spojitého PID regulátoru (3.53), kam současně dosadíme diskrétní čas kT respektive k , dostaneme

$$u(k) = r_0 \left\{ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^k e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\} \quad (4.33)$$



Obr. 4.18

Tomuto algoritmu číslicového regulátoru se říká **polohový algoritmus** a moc se nepoužívá. Hodnota integrálu se zde získává **sumací** a hodnota derivace se získává pomocí **diference**. Proto se tyto regulátory nazývají **proporcionálně-sumačně-diferenční**, a označují zkratkou **PSD**. Ale také se nazývají **číslíkové PID regulátory**. Polohový algoritmus se nepoužívá hlavně pro sumaci, která znamená komplikaci při výpočtu akčního zásahu $u(k)$.

Proto se přechází k tzv. **přírůstkovému algoritmu** PSD regulátoru. Podle tohoto algoritmu se určuje nikoliv hodnota $u(k)$ akční veličiny v daném okamžiku, ale pouze její změna, čili přírůstek

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (4.34)$$

oproti hodnotě $u(k-1)$ akční veličiny v předchozím kroku.

Využijeme-li platnosti rovnice polohového algoritmu (4.33) tak, že podle ní vyjádříme také hodnotu $u(k-1)$ v předchozím kroku

$$u(k-1) = r_0 \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\} \quad (4.35)$$

můžeme vypočítat přírůstek $\Delta u(k)$, a tím i definovat rovnici přírůstkového algoritmu odečtením rovnice (4.35) od rovnice (4.33). Po malé úpravě dostaneme přírůstkový tvar algoritmu PSD regulátoru

$$u(k) - u(k-1) = r_0 \underbrace{\left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i}\right)}_{q_0} e(k) - r_0 \underbrace{\left(1 + 2\frac{T_d}{T}\right)}_{q_1} e(k-1) + r_0 \underbrace{\frac{T_d}{T}}_{q_2} e(k-2) \quad (4.36)$$

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (4.37)$$

To je přírůstkový tvar algoritmu PSD regulátoru. Koeficienty rovnice jsou dány vztahy

$$q_0 = r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i}\right) \quad q_1 = -r_0 \left(1 + 2\frac{T_d}{T}\right) \quad q_2 = r_0 \frac{T_d}{T} \quad (4.38)$$

Akční zásah $u(k)$ je funkcí současné regulační odchylky, předcházející regulační odchylky, předcházející regulační odchylky a předcházejícího akčního zásahu

$$u(k) = f[e(k), e(k-1), e(k-2), u(k-1)]$$

Algoritmus je jednoduchý a neklade větší požadavky na paměť počítače.

Z této rovnice určíme podle rovnice (4.19) Z – přenos PSD regulátoru

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (4.39)$$

Příklad 4.11: Převeďte spojitý regulátor PID, jehož parametry byly k dané soustavě navrženy některou z optimalizačních metod na číslicový PSD regulátor při vzorkovací periodě $T = 0,1$ s. Určete jeho diferenční rovnici a Z – přenos. Regulátor je dán přenosem

$$G_R(s) = 0,4 \left(1 + \frac{1}{0,5s} + 0,1s\right)$$

Řešení: Parametry q_0 , q_1 a q_2 určíme ze vztahů (4.38). Z daného přenosu regulátoru je patrné že $r_0 = 0,4$, $T_i = 0,5$ s a $T_d = 0,1$ s.

$$q_0 = r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i}\right) = 0,4 \left(1 + \frac{0,1}{0,1} + \frac{0,1}{0,5}\right) = 0,88 \quad q_1 = -r_0 \left(1 + 2\frac{T_d}{T}\right) = -0,4 \left(1 + 2\frac{0,1}{0,1}\right) = -1,2$$

$$q_2 = r_0 \frac{T_d}{T} = 0,4 \frac{0,1}{0,1} = 0,4$$

Diferenční rovnice je $u(k) - u(k-1) = 0,88 e(k) - 1,2 e(k-1) + 0,4 e(k-2)$

$$Z - \text{přenos je } G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{0,88 - 1,2z^{-1} + 0,4z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

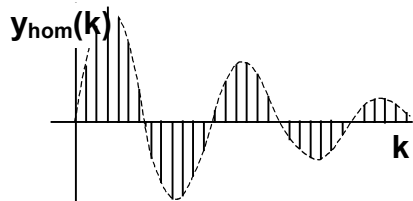
Rovnice spojitého PID regulátoru je idealizací chování skutečného PID regulátoru. Na rozdíl od toho probíhá výpočet akčního zásahu u číslicového PSD regulátoru přesně podle příslušné diferenční rovnice. To činí praktické problémy v praktickém nasazení číslicových regulátorů, neboť nedochází k přirozenému útlumu velkých a prudkých změn hodnot regulační odchylky a tím i akční veličiny jak je tomu u spojitých regulátorů.

A ještě s dalšími technickými problémy se potýká nasazení číslicových regulátorů, avšak dnes převažují především jejich výhody. A tou je snadná spolupráce s vyššími řídicími počítači, cenová dostupnost a další. A proto se používají stále více a stále více vytlačují klasické spojitě regulátory.

4.6 Stabilita diskretních obvodů

Obecná podmínka stability

Pro diskretní systémy platí stejná definice stability jako pro každý lineární systém: **Systém je stabilní, jestliže se po odeznění budicího signálu vrátí do rovnovážného stavu.** Názorně zobrazeno je to na obr. 4.19 a matematicky zapsáno (už pro diskretní systémy)

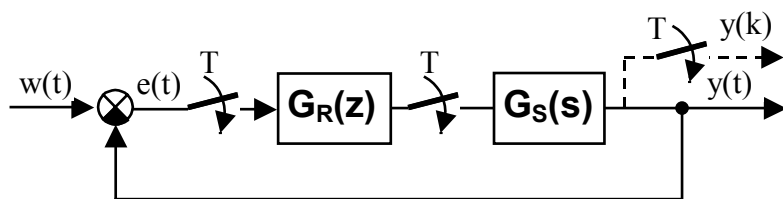


Obr. 4.19

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{hom}(k) = 0 \quad (4.40)$$

Uvažujme diskretní regulační obvod podle obr. 4.20. Charakteristická rovnice je obdobně jako u spojitých systémů dána

vztahem



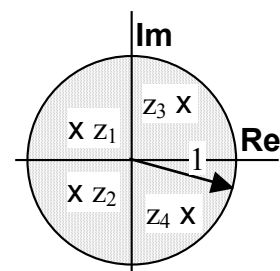
Obr. 4.20

$$1 + G_R(z)G_S(z) = 0$$

(4.41)
kde přenosy regulované soustavy a regulátoru jsou jako Z – přenosy pochopitelně v Z – transformaci. Tato rovnice má

obecně tvar

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (4.42)$$



Obr. 4.21

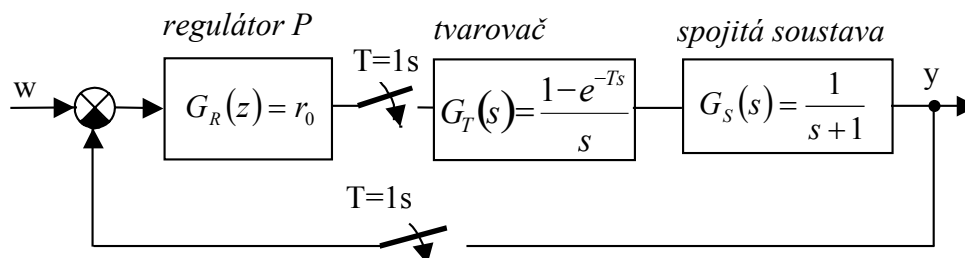
Určíme-li její kořeny $z_1, z_2, \dots, z_n$, můžeme vyslovit obecnou podmínku stability diskretních regulačních obvodů, která se trochu liší od obecné podmínky stability spojitých obvodů:

Diskretní obvod je stabilní, leží-li kořeny charakteristické rovnice (4.41) uvnitř jednotkové kružnice – obr. 4.21.

$$|z_i| < 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.43)$$

Poznámka: u diskretních obvodů neplatí žádná podmínka kladnosti koeficientů charakteristické rovnice – není důvodu, proč by měla platit.

Příklad 4.12: Určete pro jaké hodnoty r_0 číslicového P regulátoru bude obvod na obr. 4.22 stabilní.



Obr. 4.22

Řešení: Přenos zapojení vzorkovač – tvarovač – soustava je

$$G_C(z) = Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right\} = Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} - Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)} e^{-Ts} \right\} = Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} - z^{-1} Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} =$$

$$= (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\} = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} \right) = \frac{0,632}{z-0,368}$$

Při výpočtu jsme použili pravidlo, že posunutí originální funkce o jednu vzorkovací periodu se projevilo v Laplaceově obrazu násobením výrazem e^{-Ts} a to v Z – obrazu násobením z^{-1} .

Do charakteristické rovnice (4.41) dosadíme $G_R(z) = r_0$, ale za $G_S(z)$ musíme dosadit $G_C(z)$, takže

$$1 + G_R(z)G_S(z) = 1 + r_0 \frac{0,632}{z-0,368} = 0$$

Charakteristická rovnice $z - 0,368 + 0,632r_0 = 0$ má jeden kořen $z_1 = 0,368 - 0,632r_0$ a tento kořen musí splňovat podmínku (je reálný) $-1 < z_1 < 1$. Nerovnost $-1 < 0,368 - 0,632r_0 < 1$ má řešení $-1 < r_0 < 2,16$. Řešením problému je tedy kladná hodnota konstanty P regulátoru

$$r_0 < 2,16.$$

Kritéria stability

Abychom nemuseli řešit charakteristickou rovnici, která bývá většinou vyšších stupňů než druhého, používáme stejně jako u spojitých systémů kritéria stability. Některá jsou diskrétní verze kritérií, známých ze spojitých obvodů. Seznámíme se s jedním algebraickým kritériem a jedním frekvenčním, která se používají nejčastěji.

Nejdříve si opět uvědomme, co musí platit o koeficientech charakteristické rovnice (4.42)

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

když její kořeny jsou $z_1, z_2, \dots, z_n$. Rovnici podělíme koeficientem a_n , čímž dostaneme tvar

$$z^n + \dots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

a můžeme provést rozklad v součin kořenových činitelů

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0$$

Podmínka stability diskrétních systémů je, že kořeny této rovnice musí ležet uvnitř jednotkové kružnice, tedy $|z_i| < 1$. Pochopitelně mohou být koeficienty charakteristické rovnice kladné nebo záporné, zde není žádné omezení jako u spojitých systémů. Jediné co musí být splněno je, že absolutní člen uvedené rovnice

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |z_1 \cdot z_2 \dots z_n| < 1$$

musí být v absolutní hodnotě menší než jedna, protože součin čísel menších v absolutní hodnotě než jedna musí být také menší než jedna. Z tohoto poznatku vychází následující kritérium.

Diskrétní verze Routh-Schurovo kritéria. Uvedeme si algoritmus, kterým snižujeme postupně stupeň charakteristické rovnice až zbude jediný koeficient.

Mějme charakteristickou rovnici (4.42)

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Z koeficientů rovnice utvoříme následující schéma

a_n	a_{n-1}		a_2	a_1	a_0	
a_0	a_1		a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	$k = -\frac{a_0}{a_n}$
ka_0	ka_1		ka_{n-2}	ka_{n-1}	ka_n	$= -a_0$
$a_n + ka_0$	$a_{n-1} + ka_1$		$a_2 + ka_{n-2}$	$a_1 + ka_{n-1}$	0	

V tomto schématu je čtvrtý řádek výsledkem součtu prvního a třetího řádku. Třetí řádek dostaneme z prvního vynásobením koeficientem

$$k = -\frac{a_0}{a_n}$$

Pokud je tento koeficient

$$|k| < 1$$

při všech dalších snižováních stupně charakteristické rovnice (až zbude jeden koeficient), je daný systém **stabilní**. Pokud během redukce stupně bude k větší než jedna, je systém nestabilní a výpočet je možno ukončit.

Příklad 4.13: Určete stabilitu diskrétního obvodu, jehož charakteristická rovnice je

$$z^4 - 1,655z^3 + 1,012z^2 - 0,323z + 0,047 = 0$$

Řešení: Routh-Schurův algoritmus pro snižování stupně charakteristické rovnice je následující:

1	-1,655	1,012	-0,323	0,047	
0,047	-0,323	1,012	-1,655	1	$ k = -0,047$
-0,002	0,016	-0,048	0,078	-0,047	
0,998	-1,639	0,964	-0,245	0	
-0,245	0,964	-1,639	0,998		$ k = 0,245$
-0,06	0,237	-0,403	0,245		
0,938	-1,402	0,561	0		
0,561	-1,402	0,938			$ k = -0,598$
-0,335	0,838	-0,561			
0,603	-0,564	0			
-0,564	0,603				$ k = 0,935$
-0,527	0,564				
0,076	0				

Protože pro všechna k platí $|k| < 1$ je obvod stabilní.

Bilineární transformace

Odvodili jsme si, že leží-li kořeny charakteristické rovnice (4.42)

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

uvnitř jednotkové kružnice, je diskretní obvod stabilní. Leží-li jeden z kořenů vně jednotkové kružnice je obvod nestabilní a poloha na jednotkové kružnici znamená hranici stability. Výpočet kořenů charakteristické rovnice vyššího než druhého stupně je numericky náročné a proto se stabilita zjišťuje podobně jako u spojitých systémů kritérii stability. My jsme si některé z nich uvedli. Jsou to buď diskretní verze kritérií používaných u spojitých systémů anebo speciální kri-

téria pro diskretní systémy. Je však ještě jedna možnost vyšetřování stability diskretních systémů a ta je převést vnitřek jednotkové kružnice na levou komplexní polorovinu a pak používat kritéria známá pro spojité systémy, to je kritéria, která zjišťují, zda kořeny rovnice leží v levé komplexní polorovině.

Mezi rovinou „ s “ v níž leží kořeny charakteristické rovnice spojitých obvodů a rovinou „ z “ s kořeny charakteristické rovnice diskretních obvodů platí vztah (4.4)

$$z = e^{sT}$$

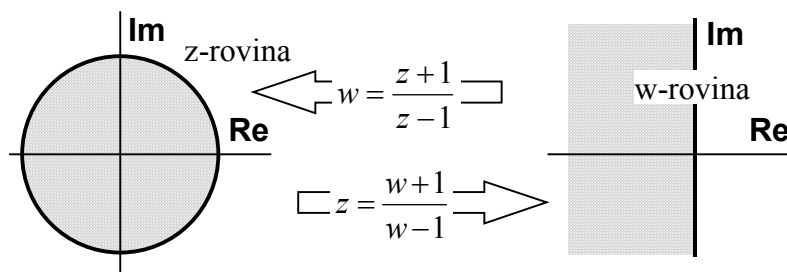
a mezi kořeny v těchto rovinách platí vztah $z_i = e^{s_i T}$. Imaginární osa v rovině „ s “ (hranice stability) se tímto přiřazením transformuje na jednotkovou kružnici v rovině „ z “. Levá komplexní polorovina v rovině „ s “ (stabilní oblast) odpovídá vnitřku jednotkové kružnice v rovině „ z “. Toto tvrzení není matematicky zcela přesné – protože ale tuto transformaci nebudeme používat, není potřeba to upřesňovat.

Zobrazení roviny „ z “ do roviny „ s “ umožňuje kontrolovat stabilitu diskretních systémů stejně jako u spojitých a využít tak kritéria, hlavně algebraická, která už jsou známá ze spojitých systémů.

Transformace vztahem (4.4) $z = e^{sT}$ a odpovídající inverzní transformace $s = \frac{1}{T} \ln z$ není pro praktické využití příliš vhodná. Proto se používá transformace, která má prakticky stejné vlastnosti, ale je daleko jednodušší. Je to tzv. **bilinéární transformace**, definovaná vztahem

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad (4.44)$$

Touto transformací je jednotková kružnice v rovině „ z “ zobrazená jako imaginární osa roviny „ w “ a vnitřek jednotkové kružnice jako levá komplexní polorovina roviny „ w “. Můžete si



Obr. 4.23

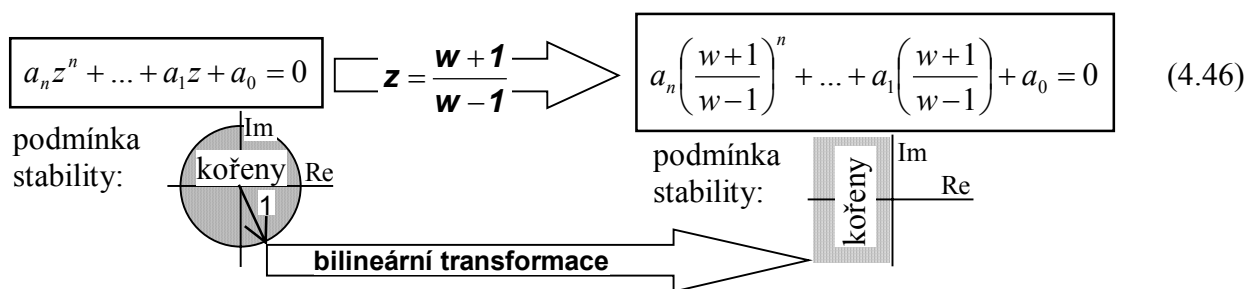
snadno ověřit, že např. bodu $w_1 = -1$ v levé polorovině roviny „ w “ odpovídá bod $z_1 = 0$ uvnitř jednotkové kružnice v rovině „ z “, bodu $w_2 = 3$ v pravé komplexní polorovině odpovídá bod $z_2 = 2$ vně jednotkové kružnice a třeba bodu $w_3 = j$ na hraniční imaginární ose odpovídá bod z_3

$= -j$ na hraniční jednotkové kružnici. Na obr. 4.23 je symbolicky ukázána tato transformace včetně transformace inverzní, která je

$$w = \frac{z+1}{z-1} \quad (4.45)$$

což je náhodou formálně velmi podobný vztah.

Přetřansformujeme-li charakteristickou rovnici (4.41) bilinéární transformací, potom protože kořeny původní rovnice měly v případě stability ležet uvnitř jednotkové kružnice, musí **kořeny přetřansformované rovnice (4.46) ležet v levé komplexní polorovině**. A toto už můžeme zjistit použitím některého ze známých kritérií stability pro spojité systémy, neboť pro tento účel byla uvedena kritéria sestavena – obr. 4.24.



Obr. 4.24

Poznámka: Pro úpravu zde musíme často použít matematických vztahů známých jako binomická věta:

$$\begin{aligned}
 (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
 (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
 (a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \\
 (a \pm b)^5 &= a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

Příklad 4.13: Určete bilineární transformací stabilitu diskrétního obvodu z příkladu 4.12.

Řešení: Ze jmenovatele přenosu řízení máme charakteristickou rovnici obvodu

$$z^4 - 1,655z^3 + 1,012z^2 - 0,323z + 0,047 = 0$$

Použijeme bilineární transformaci

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^4 - 1,655\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 1,012\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0,323\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0,047 = 0$$

Po úpravě dostaneme

$$0,081w^4 + 6,476w^3 + 0,948w^2 + 4,458w + 0,081 = 0$$

Lépe vypadá tato rovnice po vydělení koeficientem u nejvyšší mocniny

$$w^4 + 80w^3 + 11,7w^2 + 55w + 1 = 0$$

Hurwitzovým kritériem zjistíme, zda kořeny této rovnice leží v levé komplexní polorovině

$$H_3 = \begin{vmatrix} 80 & 55 & 0 \\ 1 & 11,7 & 1 \\ 0 & 80 & 55 \end{vmatrix} = 42\,055 > 0$$

Hurwitzův determinant je kladný a proto kořeny této rovnice leží v levé komplexní polorovině. Proto leží kořeny původní rovnice, z které se tato rovnice transformovala, v jednotkové kružnici. A proto je obvod stabilní. Výsledek potvrzuje závěr z příkladu 4.12, kde byla stabilita řešena Routh-Schurovým kritériem.

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete pojem diskrétní funkce. Kdy jsou v regulačních obvodech diskrétní veličiny – uveďte příklady.
2. Nakreslete schéma diskrétního regulačního obvodu. Jaká je funkce vzorkovače a tvarovače?
3. Podejte definici Z – transformace. Pomocí definičního vztahu spočítejte Z – obraz jednotkového impulsu a jednotkového skoku.
4. Jak se provádí zpětná Z – transformace?
5. Spočítejte příklady na určení originálu k Z – obrazu jednotkového impulsu a jednotkového skoku.
6. Jaká je souvislost difference funkcí a diferenčních rovnic?
7. Numericky řešte příklady diferenčních rovnic s kladnými i zápornými posunutími typu

$$y(k) + 2y(k-1) - 3y(k-2) = u(k) - 2u(k-1)$$

$$u(k) = e^{2k} \quad ; \quad y(-1) = 1 \quad ; \quad y(-2) = 3$$

8. Jaká je obecná diferenční rovnice systému?
9. Podejte definici Z – přenosu a řekněte, jak se počítá z koeficientů diferenční rovnice.
10. Pro diferenční rovnice podobného typu jako v příkladu 7 určete Z – přenos se zápornými i kladnými koeficienty.
11. Definice diskrétní impulsní funkce. Jaký je vztah mezi impulsní funkcí a Z – přenosem?
12. Definice diskrétní přechodové funkce. Jaký je vztah mezi přechodovou funkcí a Z – přenosem?
13. Pro diferenční rovnice systému typu

$$y(k) + 2y(k-1) + 2y(k-2) = u(k) - 3u(k-1)$$

vypočítejte všemi možnými způsoby

- a) Z – přenos
 - b) impulsní funkci
 - c) přechodovou funkci
14. Popište funkci číslicového regulátoru ve srovnání se spojitým regulátorem. Co je to polohový a přírůstkový algoritmus.
 15. Diferenční rovnice a Z – přenos PSD regulátoru.
 16. Stabilita diskrétních regulačních obvodů. Obecná podmínka stability.
 17. Diskrétní verze Routh-Schurova kritéria.
 18. Vyšetřete stabilitu diskrétního regulačního obvodu, jehož charakteristická rovnice je 3.stupně, např.

$$z^3 + 4z^2 + 6z + 2 = 0$$

19. Bilineární transformace. Vyřešte stabilitu obvodu z příkladu 18 bilineární transformací a porovnejte výsledek.

LITERATURA

- [1] Balátě, J.: Vybrané statě z automatického řízení. Skriptum VUT, Brno, 1996
- [2] Bartsch, H.J.: Matematické vzorce. SNTL, Praha, 1983
- [3] Dorf, R.C.- Bishop, H.R.: Modern Control Systems. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1995
- [4] Hoffmann, Z.- Mykiska, A.- Kára, J.: Základy automatického řízení. Příklady, úlohy. skriptum ČVUT, Praha, 1993
- [5] Hofreiter, M. a kolektiv: Příklady a úlohy z automatického řízení. Skriptum ČVUT, Praha, 1999
- [6] Isermann, R.: Digital Control Systems. Volume 1. Springer-Verlag, Berlin, 1989
- [7] Kubík, S.- Kotek, Z.- Strejc, V.- Štecha, J.: Teorie automatického řízení I. SNTL, Praha, 1982
- [8] Levine, W.S.: The Control Handbook. CRC Press, Inc. Boca Raton, Florida, 1996
- [9] Pech, J.: Teorie automatického řízení. Skriptum ČVUT, Praha, 1988
- [10] Pivoňka, P.: Co je to, když se řekne PID regulátor. Automatizace, roč.43, č.1, Praha, 2000
- [11] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užití matematiky. SNTL, Praha, 1981
- [12] Škrášek, J.- Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I-III. SNTL, Praha, 1983
- [13] Šmejkal, L.- Martinásková, M.: PLC a automatizace. 1.díl. BEN – technická literatura, Praha 1999
- [14] Štecha, J.- Havlena, V.: Teorie dynamických systémů. Skriptum ČVUT, Praha, 1999
- [15] Šulc, B.: Teorie automatického řízení II. Číslicová regulace. Skriptum ČVUT, Praha, 1988
- [16] Švarc, I.: Teorie automatického řízení I. Skriptum VUT, Brno, 1989
- [17] Švarc, I.: Teorie automatického řízení II. Skriptum VUT, Brno, 1993
- [18] Švarc, I.: Teorie automatického řízení . Sbírka příkladů. Skriptum VUT, Brno, 1993
- [19] Švarc, I.: Základy automatizace a regulace. Sbírka příkladů. Skriptum VUT, Brno, 1989
- [20] Švarc, I.- Lacko, B.- Němec, Z.: Automatizace. Skriptum VUT, Brno, 1995
- [21] Vavřín, P.: Teorie automatického řízení I. Skriptum VUT, Brno, 1988
- [22] Vavřín, P.- Zelina, F.: Automatické řízení počítačem, SNTL Praha, 1977
- [23] Víteček, A.: Matematické metody automatického řízení. Transformace L a Z. Skriptum VŠB, Ostrava, 1988
- [24] Voráček, R. a kolektiv: Automatizace a automatizační technika II. Automatické řízení. Computer Press, Praha, 2000
- [25] Zítek, P.- Hofreiter, M.- Hlava, J.: Automatické řízení. Skriptum ČVUT, Praha, 2000
- [26] Zítek, P.- Víteček, A.: Doporučované značky, zkratky a názvy z oblasti automatického řízení. Interní publikace. VŠB, Ostrava, 1995
- [27] Zítek, P.- Petrová, R.: Matematické a simulační modely. Skriptum ČVUT, Praha, 1999