



FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Jiří Bouchala

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Bouchala
Funkce komplexní proměnné

© Jiří Bouchala, 18. září 2012
ISBN

Můj dům by měl dveře bez petlice
a okna nezasklená,
aby každý mohl vejít dovnitř,

...

Jan Skácel

Předmluva

Tento text vznikl tak, že jsem přepracovával své poznámky k přednáškám, které jsem vedl pro studenty Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB-TU Ostrava od roku 1994.

Jistě v něm zůstaly nedostatky a možná i chyby. Prosím proto čtenáře o shovívavost a sdělení všech připomínek.¹

Chci poděkovat svému kamarádovi Mgr. Jaroslavu Drobkovi, Ph.D., který celý text pečlivě přečetl a svými připomínkami ho pomohl vylepšit.

Tento i ostatní v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>. Podívejte se na ně!

V Orlové, 2012

Jiří Bouchala

¹Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhrůžky a dary) zasílejte (prosím) na moji e-mailovou adresu: jiri.bouchala@vsb.cz

Obsah

Předmluva	iv
1 Komplexní čísla, rozšířená Gaussova rovina	1
1.1 Komplexní čísla	1
1.2 Geometrická interpretace, argument komplexního čísla	2
1.3 Nekonečno	4
1.4 Okolí bodu	5
1.5 Posloupnosti komplexních čísel	6
2 Komplexní funkce reálné a komplexní proměnné	8
2.1 Komplexní funkce	8
2.2 Některé důležité komplexní funkce	9
2.2.1 Exponenciální funkce	9
2.2.2 Goniometrické funkce	10
2.2.3 Hyperbolické funkce	11
2.2.4 Logaritmická funkce	11
2.2.5 Obecná mocninná funkce	12
2.2.6 n -tá odmocnina	13
2.3 Reálná a imaginární část funkce	13
2.4 Limita funkce komplexní proměnné	14
2.5 Spojitost funkce komplexní proměnné	16
2.6 Komplexní funkce reálné proměnné. Křivky	17
3 Derivace komplexní funkce komplexní proměnné	20
3.1 Derivace funkce	20
3.2 Harmonické funkce, harmonicky sdružené funkce	23
3.3 Poznámka ke „geometrickému významu“ derivace	25
4 Konformní zobrazení	27
4.1 Základní vlastnosti	27
4.2 Lineární lomené funkce	28

5	Integrál komplexní funkce. Cauchyho věty. Cauchyho vzorce.	30
5.1	Integrál komplexní funkce reálné a komplexní proměnné	30
5.2	Cauchyho věty	32
5.3	Cauchyho integrální vzorce	34
5.4	Primitivní funkce, nezávislost integrálu na cestě	36
6	Číselné řady. Posloupnosti a řady funkcí.	40
6.1	Číselné řady	40
6.2	Posloupnosti funkcí. Bodová a stejnoměrná konvergence	43
7	Mocninné řady. Taylorovy řady.	45
7.1	Mocninné řady	45
7.2	Taylorovy řady	51
8	Laurentovy řady. Klasifikace singulárních bodů.	55
8.1	Laurentovy řady	55
8.2	Izolované singularity a jejich klasifikace	59
8.3	Laurentova řada o středu ∞ , klasifikace bodu ∞	60
9	Rezidua. Reziduová věta	63
9.1	Reziduum funkce a jeho výpočet	63
9.2	Reziduová věta	65
9.3	Výpočet integrálů funkcí reálné proměnné pomocí reziduové věty . . .	66
10	Příklady k procvičení	69
	Literatura	89
	Rejstřík	90

Kapitola 1

Komplexní čísla, rozšířená Gaussova rovina

1.1 Komplexní čísla

Všichni se už od střední školy setkáváme s komplexními čísly. Připomeňme si základní pojmy a vztahy, s nimiž budeme v dalším pracovat.

- Komplexní číslo z je číslo tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.¹

- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná a ryze imaginární. Reálná čísla z jsou charakterizována podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$, ryze imaginární čísla podmínkou $\operatorname{Re} z = 0$.
- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow [\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2].$$

- Pro každé komplexní číslo $z = x + iy$ definujme jeho absolutní hodnotu jako nezáporné (reálné!) číslo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

a číslo komplexně sdružené vztahem

$$\bar{z} := x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z.$$

¹**Domluvme se:** napíšeme-li $z = x + iy$, myslíme tím (nebude-li řečeno jinak), že $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ a $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

- Pro každá dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ definujeme

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 := (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

a je-li $z_2 \neq 0 = 0 + 0i$, definujeme taky

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{1}{|z_2|^2} (z_1 \bar{z}_2).$$

- Pro každé komplexní číslo $z = x + iy$ platí:

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Poznámka 1.1. Jedním ze zásadních rozdílů mezi reálnými a komplexními čísly je skutečnost, že *komplexní čísla nejsou uspořádaná*. Vztah $z_1 < z_2$ není mezi komplexními čísly z_1 a z_2 definován, nejsou-li obě čísla z_1 a z_2 reálná.

Příklad 1.2. Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li

$$z = \frac{2 + 3i}{1 - 2i}.$$

Řešení.

$$z = \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{-4 + 7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i,$$

a proto

$$\operatorname{Re} z = -\frac{4}{5} \quad \text{a} \quad \operatorname{Im} z = \frac{7}{5}.$$

▲

1.2 Geometrická interpretace, argument komplexního čísla

Protože zřejmě existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi body $\mathbb{R}^2$ a komplexními čísly:

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy,$$

je přirozené znázorňovat si komplexní čísla jako body roviny. Množinu všech komplexních čísel budeme nazývat Gaussovou rovinou a značit $\mathbb{C}$.

S geometrickou interpretací souvisí i tzv. goniometrický tvar komplexního čísla z . Uvažujme $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Pak zřejmě existuje $\varphi \in \mathbb{R}$ takové, že ¹

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.1)$$

Z periodicity funkcí sinus a kosinus vyplývá, že číslo (úhel) φ není vztahem (1.1) určeno jednoznačně.

Definice 1.3. Množinu všech reálných čísel φ , pro něž platí rovnost (1.1), nazýváme argumentem komplexního čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a značíme $\text{Arg } z$, tj.

$$\text{Arg } z := \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}.$$

Poznámka 1.4. Je-li $z = 0$, je i $|z| = 0$ a rovnost (1.1) platí při jakémkoliv volbě $\varphi \in \mathbb{R}$. Z tohoto důvodu argument čísla 0 není definován!

Věta 1.5. Buď $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\varphi \in \text{Arg } z$. Potom

$$\text{Arg } z = \{\varphi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Důkaz. Z periodicity funkcí sinus a kosinus a z předpokladu $\varphi \in \text{Arg } z$ plyne, že

$$\{\varphi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Arg } z.$$

Přesvědčme se, že platí i opačná inkluze. Buď $\psi \in \text{Arg } z$ libovolný bod. Chceme dokázat, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $\psi = \varphi + 2k\pi$.

$$\varphi, \psi \in \text{Arg } z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \psi + i \sin \psi) \wedge |z| \neq 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi + i \sin \varphi = \cos \psi + i \sin \psi \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \varphi = \cos \psi \\ \wedge \\ \sin \varphi = \sin \psi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi = \cos \psi \cos \varphi \\ \wedge \\ \sin^2 \varphi = \sin \psi \sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \cos(\psi - \varphi) \Rightarrow [\exists k \in \mathbb{Z} : \psi - \varphi = 2k\pi] \Rightarrow [\exists k \in \mathbb{Z} : \psi = \varphi + 2k\pi].$$

□

¹Bystrý čtenář nepřehlédne souvislost s *polárními souřadnicemi* v $\mathbb{R}^2$.

Definice 1.6. Takovou hodnotu argumentu $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, pro kterou platí

$$-\pi < \varphi \leq \pi,$$

nazýváme hlavní hodnotou argumentu komplexního čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a značíme $\arg z$.

Příklad 1.7. Určete $\operatorname{Arg} z$ a $\arg z$, je-li $z = -\sqrt{3} - i$.

Řešení. Zřejmě¹

$$\pi + \arcsin \frac{1}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in \operatorname{Arg} z,$$

a proto²

$$\operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \arg z = -\frac{5\pi}{6}.$$

▲

1.3 Nekonečno

Podobně jako je v reálném oboru užitečné doplnit konečná reálná čísla o $+\infty$ a $-\infty$, ukazuje se i v komplexním oboru potřeba rozšířit Gaussovu rovinu $\mathbb{C}$. Nejúčelnější je přidat pouze *jediný* bod; budeme jej značit ∞ a nazývat nekonečno.

Ukažme si ještě jednu geometrickou interpretaci komplexních čísel, tzv. stereografickou projekci, která nám přiblíží volbu bodu ∞ . Uvažujme kulovou plochu umístěnou tak, že se dotýká svým „jižním pólem“ roviny komplexních čísel právě v bodě 0, a označme si její „severní pól“ N . Nyní přiřadíme každému nenulovému komplexnímu číslu z bod $z^* \neq N$ ležící na dané kulové ploše tak, aby z^* byl průsečíkem této plochy s přímkou spojující obraz čísla z s bodem N . Tímto způsobem získáme vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi (konečnými) komplexními čísly (nule odpovídá „jižní pól“) a body dané kulové plochy (samozřejmě zmenšené o bod N).

Všimněme si, že čím větší je $|z|$, tím menší je vzdálenost bodů z^* a N dané sféry. I to nás vede k tomu přidat k $\mathbb{C}$ pouze jediný bod (∞) a přiřadit mu při výše popsané projekci právě bod N .

Množinu

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \mathbb{C}_\infty$$

budeme nazývat rozšířenou (nebo taky uzavřenou) Gaussovou rovinou.

¹Rada čtenáři: nakreslete si obrázek.

²Viz větu 1.5 a definici hlavní hodnoty argumentu.

Definujme nyní pro každé $z \in \mathbb{C}$:

- $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$,
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, je-li navíc $z \neq 0$,
- $\frac{z}{\infty} = 0$,
- $\frac{z}{0} = \infty$, je-li navíc $z \neq 0$,
- $\frac{\infty}{z} = \infty$,
- $\infty^n = \infty$, $\infty^{-n} = 0$, $0^{-n} = \infty$, je-li $n \in \mathbb{N}$,
- $|\infty| = \infty$, $\overline{\infty} = \infty$.¹

1.4 Okolí bodu

Definice 1.8. Okolím bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ resp. ∞ s poloměrem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rozumíme množinu

$$U(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

resp. množinu

$$U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}.$$

Prstencovým okolím bodu $z \in \mathbb{C}_\infty$ s poloměrem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rozumíme množinu

$$P(z, \varepsilon) := U(z, \varepsilon) \setminus \{z\}.$$

Nezáleží-li nám na „velikosti“ okolí (tj. na konkrétní hodnotě ε), píšeme krátce $U(z)$ resp. $P(z)$ a mluvíme o okolí resp. prstencovém okolí bodu z .

Definice 1.9. Množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$ se nazývá otevřená, obsahuje-li s každým svým bodem i nějaké okolí tohoto bodu. Tzn.

$$M \text{ je otevřená} \iff (\forall z \in M) (\exists U(z)) : U(z) \subset M.$$

Příklady 1.10.

a) $\emptyset$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}_\infty$ jsou otevřené množiny,

¹**Pozor**, není definováno: $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\text{Arg } \infty$, $\arg \infty$.

- b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < |z + 2 - i|\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 1\}$ jsou otevřené množiny,
 c) $\{2 + \sqrt{3}i\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z = 7\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 1\}$ nejsou otevřené množiny.

1.5 Posloupnosti komplexních čísel

Definice 1.11. Buď $z \in \mathbb{C}_\infty$ a buď (z_n) posloupnost v $\mathbb{C}_\infty$.^a Řekneme, že posloupnost (z_n) má limitu z a píšeme $\lim z_n = z$ nebo $z_n \rightarrow z$, platí-li

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : z_n \in U(z, \varepsilon).$$

Posloupnost (z_n) nazveme konvergentní, existuje-li číslo $z \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\lim z_n = z.$$

^aPosloupností v $\mathbb{C}_\infty$ rozumíme – podobně jako u reálných posloupností – zobrazení $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, jehož definiční obor obsahuje všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.12.

- Definice limity posloupnosti vlastně říká, že vně libovolného (tzn. jakkoliv malého) okolí bodu z leží nejvýše konečně mnoho členů posloupnosti (z_n) .
- Uvažujme posloupnost (z_n) a bod z v $\mathbb{C}_\infty$ a – při stereografické projekci odpovídající – posloupnost (z_n^*) a bod z^* na kulové ploše v $\mathbb{R}^3$. Pak platí

$$z_n \rightarrow z \text{ (v } \mathbb{C}_\infty) \Leftrightarrow z_n^* \rightarrow z^* \text{ (v } \mathbb{R}^3).$$

Věta 1.13. Nechť $z_n = x_n + iy_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ a nechť $z = x + iy$. Potom platí

$$\lim z_n = z \Leftrightarrow [\lim x_n = x \wedge \lim y_n = y].$$

Příklad 1.14. Určete

$$\lim \frac{(2n - i)i}{n}.$$

Řešení.

$$\lim \frac{(2n - i)i}{n} = \lim \left(\frac{1}{n} + 2i \right) = \lim \frac{1}{n} + i \lim 2 = 0 + 2i = 2i.$$



Poznámka 1.15. Definice limity je formálně stejná jako definice limity reálných posloupností. Platí proto i analogie mnoha vět. Uvedme pro ilustraci některé z nich.

Věta 1.16. *Každá posloupnost komplexních čísel má nejvýš jednu limitu.*

Věta 1.17. *Posloupnost komplexních čísel má limitu $z \in \mathbb{C}_\infty$ právě tehdy, když každá posloupnost z ní vybraná má tutéž limitu z .*

Věta 1.18. *Je-li posloupnost (z_n) konvergentní a taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_n \in \mathbb{C}$, je posloupnost (z_n) omezená (tzn. že existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|z_n| \leq k$).*

Kapitola 2

Komplexní funkce reálné a komplexní proměnné

2.1 Komplexní funkce

Definice 2.1. Komplexní funkcí (komplexní proměnné) rozumíme každé zobrazení $z \in \mathbb{C}_\infty$ do množiny všech neprázdných podmnožin $\mathbb{C}_\infty$. Jinými slovy: komplexní funkcí f rozumíme předpis, který každému číslu $z \in Df \subset \mathbb{C}_\infty$ (a nikoho nepřekvapí, že množinu Df nazýváme definičním oborem funkce f) přiřadí jedno nebo více komplexních čísel $z \in \mathbb{C}_\infty$. Toto nebo tato komplexní čísla značíme $f(z)$ a nazýváme f – obrazem čísla z .

Pokud je pro každé $z \in Df$ množina $f(z)$ jednoprvková, nazýváme funkci f jednoznačnou. Pokud tomu tak není, nazýváme funkci f mnohoznačnou, případně – podle počtu prvků $f(z)$ – dvojjznačnou, trojjznačnou, $\dots$, nekonečněznačnou. Je-li $Df \subset \mathbb{R}$, nazýváme funkci f komplexní funkcí reálné proměnné.

Úmluva. Zadáme-li funkci pouze předpisem, rozumíme jejím definičním oborem množinu všech čísel $z \in \mathbb{C}_\infty$, pro něž má daný předpis smysl.¹

Příklady 2.2.

- a) $f(z) := z^2 \dots$ jednoznačná funkce, $Df = \mathbb{C}_\infty$;
- b) $f(z) := \operatorname{Arg} z \dots$ nekonečněznačná funkce, $Df = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

¹Například: definičním oborem funkce f definované předpisem

$$f(z) := \frac{1}{z}$$

je množina $Df = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Úmluva. Někdy budeme – nepříliš přesně – psát

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

místo správného zápisu

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(Podobně i pro jiné mnohoznačné funkce.)

Definice 2.3. Buď f mnohoznačná funkce. Jednoznačnou funkci φ nazýváme jednoznačnou větví (mnohoznačné) funkce f , platí-li současně

$$(1) \quad D\varphi \subset Df,$$

$$(2) \quad \forall z \in D\varphi : \varphi(z) \in f(z).$$

Příklad 2.4. Funkce

$$\varphi_1(z) := \arg z,$$

$$\varphi_2(z) := \arg z + 2\pi$$

jsou dvě – navzájem různé – jednoznačné větve funkce $f(z) := \operatorname{Arg} z$.

2.2 Některé důležité komplexní funkce

2.2.1 Exponenciální funkce

Exponenciální funkci definujeme pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ předpisem ¹

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y).$$

¹ Pozorný čtenář může být touto definicí zneklidněn, značíme totiž symbolem „e“ dvě různé funkce:

$$e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{a} \quad e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Nemusíme se však bát, protože pro $z = x + 0i = x$ je

$$e^z = e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x;$$

jinak řečeno: „komplexní“ exponenciální funkce je rozšířením „reálné“ exponenciální funkce na $\mathbb{C}$.

Ze stejného důvodu nebudeme v dalším měnit označení ani některých jiných komplexních funkcí (např. $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, $\ln$, ...).

Věta 2.5 (Vlastnosti exponenciální funkce).

- (i) e^z je funkce jednoznačná.
- (ii) Oborem hodnot funkce e^z je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- (iii) Funkce e^z je periodická s periodou $2\pi i$.

Důkaz uvedených tvrzení plyne přímo z definice a vlastností reálných funkcí e^x , $\sin x$, $\cos x$. Ukažme si pro ilustraci, jak lze například dokázat $2\pi i$ -periodicitu exponenciální funkce:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z. \end{aligned}$$

□

2.2.2 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce jsou definovány předpisy

$$\begin{aligned} \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \operatorname{tg} z &:= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned}$$

Věta 2.6 (Vlastnosti goniometrických funkcí).

- (i) Všechny goniometrické funkce jsou jednoznačné.
- (ii) $\sin z$ a $\cos z$ jsou funkce periodické s periodou 2π ,
 $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ jsou funkce periodické s periodou π .
- (iii) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \sin(-z) &= -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \\ \operatorname{tg}(-z) &= -\operatorname{tg} z, \quad \operatorname{cotg}(-z) = -\operatorname{cotg} z. \end{aligned}$$

- (iv) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí tzv. Eulerův vzorec

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

- (v)

$$\begin{aligned} \sin z = 0 &\Leftrightarrow [\exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi], \\ \cos z = 0 &\Leftrightarrow \left[\exists k \in \mathbb{Z} : z = \frac{\pi}{2} + k\pi \right]. \end{aligned}$$

Příklad 2.7. Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li $z = \cos(4 + i)$.

Řešení.

$$\begin{aligned} z = \cos(4 + i) &= \frac{e^{i(4+i)} + e^{-i(4+i)}}{2} = \\ &= \frac{e^{-1}(\cos 4 + i \sin 4) + e(\cos(-4) + i \sin(-4))}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \cos 4 + i \frac{e^{-1} - e}{2} \sin 4, \end{aligned}$$

a proto

$$\operatorname{Re} z = \cosh 1 \cos 4, \quad \operatorname{Im} z = -\sinh 1 \sin 4.$$

▲

2.2.3 Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{tgh} z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{cotgh} z := \frac{\cosh z}{\sinh z}. \end{aligned}$$

Poznámka 2.8. Podobně jako v reálném oboru můžeme i pro komplexní funkce zavést pojem inverzní funkce. Na rozdíl od funkcí reálných však budeme definovat inverzní funkci i pro funkce, které **nejsou prosté**. V takovém případě pak bude příslušná inverzní funkce funkcí mnohoznačnou. Příkladem může být níže definovaná logaritmická funkce.

2.2.4 Logaritmická funkce

Logaritmickou funkci definujeme jako funkci inverzní k funkci exponenciální, tzn.

$$\operatorname{Ln} z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}.$$

Z vlastnosti (ii) exponenciální funkce (viz větu 2.5) vyplývá, že definičním oborem funkce $\operatorname{Ln} z$ je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bud'

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde $|z| > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$, a položíme

$$\operatorname{Ln} z = u + iv.$$

Potom je

$$e^{u+iv} = z,$$

tj.

$$e^u (\cos v + i \sin v) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

a proto ¹

$$u = \ln |z| \wedge [\exists k \in \mathbb{Z} : v = \varphi + 2k\pi].$$

Zjistili jsme, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

neboli, že

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.}$$

Příklad 2.9.

$$\operatorname{Ln}(-1 + i) = \ln \sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definice 2.10. Funkci hlavní hodnota logaritmu definujeme na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ předpisem

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z.$$

Příklad 2.11.

$$\ln(-1 - i) = \ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

2.2.5 Obecná mocninná funkce

Připomeňme si: je-li $n \in \mathbb{N}$ resp. $-n \in \mathbb{N}$, je funkce $z \mapsto z^n$ definovaná předpisem

$$z^n := \underbrace{z z z \dots z}_{n\text{-krát}} \quad \text{resp.} \quad z^n := \frac{1}{z^{-n}}.$$

Definujme nyní mocninnou funkci i pro $a \in \mathbb{C}$ takové, že $\pm a \notin \mathbb{N}$:

$$z^a := \{e^{as} : s \in \operatorname{Ln} z\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Příklad 2.12.

$$2^i = e^{i \operatorname{Ln} 2} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi + i \ln 2} = e^{-2k\pi} (\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

¹Symbol „ln“ zde znamená **přirozený logaritmus**, tj. funkci $z \in \mathbb{R}^+$ do $\mathbb{R}$.

2.2.6 n -tá odmocnina

Funkci n -tá odmocnina ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) definujeme předpisem

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}.$$

Cvičení 2.13.

a) Dokažte, že pro každé $0 \neq z \in \mathbb{C}$ a $1 < n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

a že funkce $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ je právě n -značná.

b) Dokažte, že pro $a = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$ jsou navzájem **nesoudělná** čísla, je funkce $z \mapsto z^a$ právě n -značná.

c) Dokažte, že pro $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ je funkce $z \mapsto z^a$ **nekonečněznačná**.

Příklad 2.14.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{i} &= i^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4} \operatorname{Ln} i} = e^{\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i)} = e^{\frac{\pi}{8}i + k\frac{\pi}{2}i} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

2.3 Reálná a imaginární část funkce

Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, budeme pojmem komplexní funkce rozumět funkci jednoznačnou.

Poznámka 2.15. Ukažme si, jak lze každou konečnou komplexní funkci f , pro níž platí $Df \subset \mathbb{C}$, tzn. že

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

vyjádřit pomocí dvou reálných funkcí dvou reálných proměnných.

Definice 2.16. Buď $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Funkci

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{resp.} \quad v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

definovanou na množině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in Df\}$$

předpisem

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{resp.} \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$$

nazýváme reálnou resp. imaginární částí funkce f .

Skutečnost, že u resp. v je reálnou resp. imaginární částí funkce f budeme zapisovat symbolem

$$f = u + iv.$$

Příklad 2.17. Najděme reálnou a imaginární část funkce

$$f(z) := \frac{z}{\bar{z}}.$$

Řešení.

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

a proto $f = u + iv$, kde

$$u(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad v(x, y) := \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

▲

2.4 Limita funkce komplexní proměnné

Úmluva. Píšeme-li

$$z_0 \neq z_n \rightarrow z_0,$$

myslíme tím, že $z_n \rightarrow z_0$ a že pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ je $z_n \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$.

Definice 2.18. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ limitu $a \in \mathbb{C}_\infty$ a píšeme $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$, platí-li implikace

$$z_0 \neq z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow a$$

(tím rozumíme: pro každou posloupnost (z_n) takovou, že $z_0 \neq z_n \rightarrow z_0$, platí, že $f(z_n) \rightarrow a$).

Věta 2.19. Nechť $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ a nechť $z_0, a \in \mathbb{C}_\infty$. Potom $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ právě tehdy, platí-li

$$(\forall U(a)) (\exists P(z_0)) (\forall z \in P(z_0)) : f(z) \in U(a).$$

Věta 2.20. Nechť $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a nechť $z_0 = x_0 + iy_0$ a $a = \alpha + i\beta$. Potom $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ právě tehdy, platí-li

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \quad \wedge \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = \beta.$$

Příklady 2.21.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z-i}{z^2+1} \right) &= \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{z+i} \right) = \lim_{x+iy \rightarrow i} \left(\frac{1}{x+i(y+1)} \right) = \\ &= \lim_{x+iy \rightarrow i} \left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2} + i \frac{-(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \right) = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2} \right) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(\frac{-(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \right) = 0 - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

b) $\lim_{z \rightarrow -1} \arg z$ neexistuje, protože

- $-1 \neq z_n := \cos \left(\pi + \frac{(-1)^n}{n} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{(-1)^n}{n} \right) \rightarrow -1$,
- $\arg(z_{2n}) \rightarrow -\pi$,
- $\arg(z_{2n+1}) \rightarrow \pi$.

2.5 Spojitost funkce komplexní proměnné

Definice 2.22. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, platí-li

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subset \mathbb{C}_\infty$, platí-li pro každé $z_0 \in M$ implikace

$$\left. \begin{array}{l} z_n \rightarrow z_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : z_n \in M \end{array} \right\} \Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(z_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá, je-li spojitá na svém definičním oboru.

Věta 2.23. *Nechť $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ a necht $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i)

f je spojitá v bodě z_0 ,

(ii)

$$z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(z_0),$$

(iii)

$$(\forall U(f(z_0))) (\exists U(z_0)) (\forall z \in U(z_0)) : f(z) \in U(f(z_0)).$$

Cvičení 2.24. Rozmyslete si, jak spolu souvisí **spojitost** funkce

$$f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

se **spojitostí** funkcí

$$u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Příklady 2.25.

a) Funkce $\arg z$ není spojitá, neboť není spojitá (např.) v bodě -1 (viz příklad 2.21 b)).

b) Funkce $\arg z$ je spojitá na množině $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{R}^- \wedge z \neq 0\}$.

2.6 Komplexní funkce reálné proměnné. Křivky

Buď f komplexní funkcí reálné proměnné, tj. buď f zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}_\infty$. Podobně jako u komplexních funkcí komplexní proměnné můžeme i zde zavést pojem limity a spojitosti.

Definice 2.26. Buď $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$.

Řekneme, že funkce f má v bodě $t_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{C}_\infty$ a píšeme $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a$, platí-li

$$t_0 \neq t_n \rightarrow t_0 \quad (\text{v } \mathbb{R}) \Rightarrow f(t_n) \rightarrow a.$$

Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $t_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}$, platí-li pro každé $t_0 \in M$ implikace

$$\left. \begin{array}{l} t_n \rightarrow t_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : t_n \in M \end{array} \right\} \Rightarrow f(t_n) \rightarrow f(t_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá, je-li spojitá na svém definičním oboru.

Velice důležitou třídu spojitých funkcí tvoří křivky.

Definice 2.27. Křivkou v $\mathbb{C}_\infty$ (resp. v $\mathbb{C}$) rozumíme každou spojitou komplexní funkci reálné proměnné

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}_\infty \quad (\text{resp. } \gamma : I \rightarrow \mathbb{C}),$$

kde $I = D\gamma \subset \mathbb{R}$ je interval.

Množinu

$$\langle \gamma \rangle := \gamma(I) = \{ \gamma(t) : t \in I \} \subset \mathbb{C}_\infty$$

pak nazýváme geometrickým obrazem křivky γ . Je-li $M = \langle \gamma \rangle$, říkáme, že γ je parametrizací množiny M .

Poznámka 2.28. Již jsme si všimli, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi body $\mathbb{R}^2$ a body $\mathbb{C}$:

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy.$$

Podobně si lze všimnout, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi křivkami v $\mathbb{R}^2$ a křivkami v $\mathbb{C}$:

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \leftrightarrow \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2.$$

Můžeme proto i pro křivky v $\mathbb{C}$ považovat za známé pojmy zavedené pro křivky v $\mathbb{R}^2$ (viz [1]). Uvedme pro příklad některé z nich:

- jednoduchá křivka,
- uzavřená křivka,
- jednoduchá uzavřená křivka,
- opačně orientovaná křivka,
- hladký oblouk,
- po částech hladká křivka,
- počáteční a koncový bod křivky,
- derivace křivky v bodě,
- tečný vektor křivky,

Cvičení 2.29. Znázorněte v Gaussově rovině geometrický obraz křivky γ , je-li

a) $\gamma(t) := 2 - 3i + 2e^{-2it}$, $t \in \langle 0, \frac{3}{4}\pi \rangle$;

b) $\gamma(t) := \begin{cases} 4e^{it}, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ i(4 + \frac{\pi}{2} - t), & t \in \langle \frac{\pi}{2}, 4 + \frac{\pi}{2} \rangle, \\ t - 4 - \frac{\pi}{2}, & t \in \langle 4 + \frac{\pi}{2}, 8 + \frac{\pi}{2} \rangle. \end{cases}$

Definice 2.30.

- Uzavěrem množiny $M \subset \mathbb{C}_\infty$ rozumíme množinu

$$\overline{M} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \text{existuje posloupnost } (z_n) \text{ v } M \text{ taková, že } z_n \rightarrow z\}.$$

(Rozumíme-li uzavřenými množinami doplňky množin otevřených, lze $\overline{M}$ ekvivalentně definovat jako nejmenší uzavřenou množinu obsahující M .)

- Množiny $A, B \subset \mathbb{C}_\infty$ nazýváme oddělenými, platí-li

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

- Množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$ se nazývá souvislá, nelze-li ji napsat jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Tzn. že $M \subset \mathbb{C}_\infty$ je souvislá, platí-li implikace

$$\left. \begin{array}{l} M = A \cup B \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow [A = \emptyset \vee B = \emptyset].$$

Definice 2.31. Množina $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ se nazývá oblastí, platí-li současně tyto dvě podmínky:

- (1) Ω je otevřená množina (viz definici 1.9),
- (2) Ω je souvislá množina (tzn. – v případě otevřené množiny – že každé dva body Ω lze spojit křivkou v Ω ; přesněji: pro každé dva body $z_1, z_2 \in \Omega$ existuje křivka $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega$ taková, že $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$).

Definice 2.32. Buď $M \subset \mathbb{C}_\infty$. Množinu $K \subset M$ nazýváme komponentou množiny M , má-li současně tyto dvě vlastnosti:

- (1) K je souvislá množina;
- (2) je-li $K^* \subset M$ souvislá množina obsahující K (tzn. $K \subset K^*$), je $K = K^*$.^a

^aKomponentou množiny tedy nazýváme každou její maximální souvislou podmnožinu.

Poznámka 2.33. Dá se ukázat,¹ že každá množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$ je sjednocením systému všech svých komponent; tento systém je přitom disjunktí.

Definice 2.34. Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, jejíž doplněk v $\mathbb{C}_\infty$ (tj. množina $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$) má právě n různých komponent, se nazývá n -násobně souvislá oblast. Jednonásobně souvislá oblast se nazývá jednoduše souvislá oblast.

Příklady 2.35.

- a) $\emptyset$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_\infty$, $U(z)$, kde $z \in \mathbb{C}_\infty$, jsou jednoduše souvislé oblasti.
- b) $P(z)$, $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, kde $z \in \mathbb{C}$, jsou dvojnásobně souvislé oblasti.
- c) $U(1, 2010) \setminus \{2, 4, 5 + i\}$ je čtyřnásobně souvislá oblast.
- d) $U(3, 2) \cup U(4i, 3)$ není oblast (není souvislá).
- e) $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle\}$ není oblast (není otevřená).

¹Viz např. [4].

Kapitola 3

Derivace komplexní funkce komplexní proměnné

3.1 Derivace funkce

Definice 3.1. Buď $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Derivaci funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme rovností

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existuje-li limita vpravo a je-li **konečná**.

Řekneme, že funkce f je holomorfní na množině Ω , je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a existuje-li $f'(z)$ pro každé $z \in \Omega$.

Řekneme, že funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, je-li f holomorfní na nějakém okolí bodu z_0 (tj. má-li derivaci v každém bodě nějakého okolí $U(z_0)$).

Poznámka 3.2. Všimněme si, že definice derivace je **formálně** totožná s definicí derivace reálné funkce reálné proměnné. Formálně stejné by byly formulace i důkazy mnoha vět o „počítání“ derivací.¹ Nebudeme je proto uvádět.

Věta 3.3. Má-li funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivaci v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, je f v bodě z_0 *spojitá*.

Důkaz. Z předpokladu

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

¹Máme na mysli např. věty o derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu, složené funkce,

plyne existence prstencového okolí $P(z_0)$ takového, že platí

$$\forall z \in P(z_0) : \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < |f'(z_0)| + 1,$$

a proto taky

$$\forall z \in P(z_0) : 0 \leq |f(z) - f(z_0)| < (|f'(z_0)| + 1) |z - z_0|.$$

Vezměme nyní libovolnou posloupnost (z_n) takovou, že $z_n \rightarrow z_0$. Z výše uvedeného tvrzení pak vyplývá, že $|f(z_n) - f(z_0)| \rightarrow 0$, a proto $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Právě jsme dokázali spojitost funkce f v bodě z_0 (viz větu 2.23).

□

Věta 3.4. Funkce $f = u + iv$ má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ derivaci právě tehdy, platí-li tyto dvě podmínky:

- (i) u a v jsou diferencovatelné v bodě (x_0, y_0) ,^a
- (ii) u a v splňují v bodě (x_0, y_0) tzv. Cauchyho–Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Navíc, pokud $f'(z_0)$ existuje, platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

^aPřipomeňme si důležité tvrzení - postačující podmínku diferencovatelnosti:

Bud' $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Jsou-li funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ spojité v bodě (x_0, y_0) , je funkce φ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) .

Poznámka 3.5. Vyjádření f' pomocí parciálních derivací funkcí u a v a z něho plynoucí Cauchyho–Riemannovy podmínky by neměly být po prohlédnutí následujících řádků žádným překvapením.¹

¹Je třeba si ovšem domyslet smysl výrazů typu: „ $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \dots$ “.

Všimněme si: existuje-li $f'(z_0)$, je

$$\begin{aligned}
 \underline{f'(z_0)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + h + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{(x_0 + h + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \\
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x_0 + h - x_0) + i(y_0 - y_0)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} = \\
 &= \underline{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)},
 \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}
 \underline{f'(z_0)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + i(y_0 + s)) - f(x_0 + iy_0)}{(x_0 + i(y_0 + s)) - (x_0 + iy_0)} = \\
 &= \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \in \mathbb{R}}} \frac{u(x_0, y_0 + s) + iv(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x_0 - x_0) + i(y_0 + s - y_0)} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{s} + \frac{1}{i} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{s} = \\
 &= \underline{\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)}.
 \end{aligned}$$

Příklad 3.6. Zjistíme, ve kterých bodech má funkce

$$f(z) := e^z$$

derivaci, a vyjádříme ji.

Řešení.

Pro každé $x + iy \in \mathbb{C}$ platí:

$$f(x + iy) = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{=: u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{=: v(x,y)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Protože funkce u a v jsou navíc zřejmě diferencovatelné v každém bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, platí pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$, že

$$\begin{aligned}\underline{f'(z)} &= f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y = e^{x+iy} = f(x + iy) = \underline{f(z)}.\end{aligned}$$

▲

3.2 Harmonické funkce, harmonicky sdružené funkce

Definice 3.7. Buď $M \subset \mathbb{R}^2$ otevřená množina. Řekneme, že funkce $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je harmonická na množině M , platí-li pro každý bod $(x, y) \in M$ tyto dvě podmínky:

- (1) φ má v bodě (x, y) spojitě všechny parciální derivace až do druhého řádu včetně (tj. φ je třídy C^2 na M),
- (2) $\Delta\varphi(x, y) := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

Příklady 3.8.

- a) Funkce $\varphi(x, y) := x + y + e^x \cos y$ je harmonická na $\mathbb{R}^2$.
- b) Funkce $\varphi(x, y) := \operatorname{Im}(\ln(x + iy))$ není harmonická na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.¹

Úmluva. V dalším budeme psát zkráceně (ale nepřiliš přesně), že „funkce φ je harmonická na množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ “, místo správného „funkce φ je harmonická na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$ “.

Pozorování 3.9. Předpokládejme, že funkce $f = u + iv$ má v každém bodě oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ derivaci druhého řádu² a že funkce u a v jsou třídy C^2 na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$. Z věty 3.4 pak plyne, že pro každý bod $x + iy \in \Omega$ platí

¹Otázka čtenáři: Proč?

²Buď $n \in \mathbb{N}$. Definujme $(n+1)$ -ní derivaci funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ indukci

$$f^{(n+1)}(z_0) = \left(f^{(n)}\right)'(z_0),$$

tj.

$$f^{(n+1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)}{z - z_0},$$

existuje-li limita vpravo a je-li **konečná**.

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

$$f''(x + iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y).$$

Zaměřme nyní svoji pozornost na poslední z uvedených rovností: porovnáním reálných a imaginárních částí zjistíme, že

$$\forall x + iy \in \Omega : \Delta u(x, y) = 0 = \Delta v(x, y),$$

neboli, že funkce u a v jsou na oblasti Ω harmonické.

Následující věta toto pozorování ještě zobecňuje.

Věta 3.10. *Nechť funkce $f = u + iv$ je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak funkce u a v jsou harmonické na Ω .*

Definice 3.11. Řekneme, že funkce $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou harmonicky sdružené na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, platí-li současně:

- (1) u a v jsou harmonické na Ω ,
- (2) u a v splňují na Ω Cauchyho–Riemannovy podmínky.

Pozorování 3.12. Všimněme si, že harmonicky sdružené funkce tvoří právě reálné a imaginární části holomorfních funkcí.

Příklad 3.13. Najděme (existuje-li) holomorfní funkci $f = u + iv$, je-li

$$u(x, y) := x^2 - y^2 + 2xy.$$

Řešení. Hledejme funkci $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ „svázanou“ Cauchyho–Riemannovými podmínkami s funkcí u :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \Rightarrow v(x, y) = 2xy + y^2 + \varphi(x),$$

kde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nyní dosadíme do druhé z Cauchyho–Riemannových podmínek:

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2y + \varphi'(x),$$

a proto

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -x^2 + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}, \\ v(x, y) &= 2xy + y^2 - x^2 + c.\end{aligned}$$

Snadno se lze přesvědčit,¹ že funkce

$$f(x + iy) := x^2 - y^2 + 2xy + i(2xy + y^2 - x^2 + c)$$

je při každé volbě $c \in \mathbb{R}$ holomorfní na $\mathbb{C}$.

▲

Věta 3.14. *Nechť u resp. v je harmonická funkce na **jednoduše souvislé** oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Potom existuje až na ryze imaginární resp. reálnou konstantu jednoznačně určená funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ taková, že*

- (i) *f je holomorfní na Ω ,*
- (ii) *pro každé $x + iy \in \Omega$ platí: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ resp. $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.*

Cvičení 3.15.

a) Najděte všechny na oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfní funkce $f = u + iv$, kde

$$v(x, y) := \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

b) Dokažte, že je funkce

$$v(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$$

harmonická na oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a že přesto neexistuje funkce $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, aby $f := u + iv$ byla holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.3 Poznámka ke „geometrickému významu“ derivace

Předpokládejme, že je funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a že

$$0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \arg f'(z_0)}.$$

Z definice derivace pak plyne, že

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)| \in \mathbb{R}^+,$$

¹Stačí ověřit podmínky (i) a (ii) z věty 3.4.

a proto pro z „blízké“ bodu z_0 je číslo $|f(z) - f(z_0)|$ „blízké“ číslu $|f'(z_0)| \cdot |z - z_0|$.
Jinak řečeno: pro „malá“ $\delta > 0$ se f -obraz kružnice $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \delta\}$ „málo liší“ od kružnice $\{w \in \mathbb{C} : |w - f(z_0)| = |f'(z_0)| \cdot \delta\}$.

Ukažme si nyní, jak lze geometricky interpretovat $\arg f'(z_0)$. Buď γ libovolný hladký oblouk v $\mathbb{C}$ takový, že $\gamma(t_0) = z_0$. Pak číslo $\arg \gamma'(t_0)$ udává úhel, který svírá tečný vektor $\gamma'(t_0)$ s kladnou částí reálné osy.¹ Teď uvažujme (na „dostatečně malém“ okolí bodu t_0 korektně definovanou) křivku $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$ a zkoumejme odchylku tečného vektoru $\Gamma'(t_0)$ od kladné části reálné osy, tj. argument $\Gamma'(t_0)$. Protože $\Gamma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0)$, je

$$\arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0) \in \text{Arg } \Gamma'(t_0).$$

Jinak řečeno: číslo $\arg f'(z_0)$ udává úhel, o který je třeba otočit směrový vektor tečny hladkého oblouku γ v bodě $\gamma(t_0) = z_0$ tak, abychom dostali směrový vektor tečny křivky $\Gamma := f \circ \gamma$ v bodě $\Gamma(t_0) = f(z_0)$, přičemž na konkrétní volbě křivky γ nezáleží.

Tyto úvahy nás vedou k následující definici.

Definice 3.16. Buď funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfní v bodě z_0 a buď $f'(z_0) \neq 0$.

Číslo $|f'(z_0)|$ nazýváme koeficientem roztažnosti funkce f v bodě z_0 .^a

Číslo $\arg f'(z_0)$ nazýváme úhlem otočení funkce f v bodě z_0 .

^aJe-li navíc $|f'(z_0)| < 1$ resp. $|f'(z_0)| > 1$, mluvíme někdy o kontrakci resp. dilataci funkce f v bodě z_0 .

¹Kreslete si obrázek!

Kapitola 4

Konformní zobrazení

4.1 Základní vlastnosti

Definice 4.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ je konformní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}_\infty$, platí-li současně:

- (1) f je spojitá a prostá na G ,
- (2) f' existuje ve všech bodech množiny G s výjimkou nejvýše konečně mnoha.

Cvičení 4.2. Rozmyslete si, na jakých oblastech jsou konformní funkce:

$$e^z, \ln z, \sin z, z^2, z^4, \dots$$

Definice 4.3. Řekneme, že otevřené množiny $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ jsou konformně ekvivalentní, existuje-li funkce $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ taková, že

- (1) f je konformní na G_1 ,
- (2) $f(G_1) = G_2$.

Vlastnosti konformních funkcí

- i) Je-li f konformní na G , je $0 \neq f'(z) \in \mathbb{C}$ pro všechna $z \in G$ s výjimkou nejvýše dvou bodů: bodu ∞ (pokud patří do G) a bodu (je-li v G takový), jehož f -obrazem je ∞ .¹
- ii) Funkce inverzní ke konformnímu zobrazení je konformní.

¹Všimněme si, že odtud vyplývá, že konformní funkce f zachovává úhly mezi křivkami vycházejícími z bodu z_0 ($z_0 \in G$, $z_0 \neq \infty \neq f(z_0)$) – viz geometrický význam $\arg f'(z_0)$ na straně 26. Této vlastnosti funkce f se říká konformnost v bodě z_0 .

iii) Obrazem oblasti při konformním zobrazení je oblast.

iv) Rozdělme nyní všechny jednoduše souvislé oblasti v $\mathbb{C}_\infty$ do čtyř skupin:

1. skupina obsahuje pouze prázdnou množinu,
2. skupina obsahuje pouze $\mathbb{C}_\infty$,
3. skupina obsahuje všechny oblasti tvaru $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$, kde $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$,
4. skupina obsahuje všechny ostatní jednoduše souvislé oblasti.¹

Pak platí: jednoduše souvislé oblasti Ω_1 a Ω_2 jsou konformně ekvivalentní právě tehdy, patří-li obě do stejné skupiny.

Prozkoumejme nyní podrobněji jeden velice důležitý typ konformních zobrazení.

4.2 Lineární lomené funkce

Definice 4.4. Lineární lomenou funkcí rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, k němuž existují čísla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ taková, že $ad - bc \neq 0$ a že

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{je-li } z \in \mathbb{C}, \\ \frac{a}{c}, & \text{je-li } z = \infty. \end{cases}$$

Vlastnosti lineárních lomených funkcí

- i) Lineární lomené funkce jsou **jediná** konformní zobrazení $\mathbb{C}_\infty$ na $\mathbb{C}_\infty$.
- ii) Inverzní zobrazení k lineární lomené funkci je lineární lomená funkce.
- iii) Obrazem zobecněné kružnice při lineárním lomeném zobrazení je zobecněná kružnice. (Zobecněnou kružnicí rozumíme kružnici (v $\mathbb{C}$) nebo přímku – k té počítáme i bod ∞ .)
- iv) Necht každá z množin $\{z_1, z_2, z_3\}$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ obsahuje tři navzájem různá čísla z $\mathbb{C}_\infty$. Pak existuje právě jedna lineární lomená funkce f , pro niž je $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ a $f(z_3) = w_3$.
- v) Speciálním případem lineárních lomených zobrazení jsou lineární funkce, tj. funkce definované předpisem $f(z) := az + b$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.²

¹Tzn. všechny **neprázdné** jednoduše souvislé oblasti, jejichž doplněk obsahuje alespoň dva body.

²Rozmyslete si, že každou lineární funkci lze získat složením tří zobrazení: *otočení* ($z \mapsto e^{i \arg a} z$), *stejnolehlosti* ($z \mapsto |a|z$) a *posunutí* ($z \mapsto z + b$).

Příklad 4.5. Najděte obraz kružnice

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$$

při zobrazení

$$f(z) := \frac{1}{z}.$$

Řešení. Protože pro body $0, 2, 1+i \in K$ platí: $f(0) = \infty$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(1+i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, je obrazem kružnice K přímka: ¹

$$f(K) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\} \cup \{\infty\}.$$

▲

¹Viz vlastnost iii) lineárních lomených funkcí.

Kapitola 5

Integrál komplexní funkce. Cauchyho věty. Cauchyho vzorce.

5.1 Integrál komplexní funkce reálné a komplexní proměnné

Věta 5.1 (Jordanova). *Nechť γ je jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{C}$. Potom*

$$\mathbb{C}_\infty \setminus \langle \gamma \rangle = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde Ω_1 a Ω_2 jsou dvě disjunktní,^a neprázdné a jednoduše souvislé oblasti, jejichž společnou hranicí je $\langle \gamma \rangle$.

^aTzn. $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Definice 5.2. Uvažujme situaci z Jordanovy věty. Tu z oblastí Ω_1, Ω_2 , která neobsahuje ∞ , nazýváme vnitřkem křivky γ a značíme $\text{int } \gamma$, tu, která ∞ obsahuje, nazýváme vnějškem křivky γ a značíme $\text{ext } \gamma$.

Definice 5.3. Buď funkce $f = u + iv : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}; a < b$).^a Pak definujeme

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b u(t) + iv(t) \, dt := \int_a^b u(t) \, dt + i \int_a^b v(t) \, dt.$$

^aTzn., že funkce $u(t) := \text{Re } f(t), v(t) := \text{Im } f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě na $\langle a, b \rangle$.

Definice 5.4. Buď $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ po částech hladká křivka a buď funkce $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na $\langle \gamma \rangle$. Pak definujeme^a

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{(\gamma)} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{(\gamma)} v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

kde integrály na pravé straně rovnosti jsou křivkové integrály 2. druhu^b (γ zde chápeme jako křivku v $\mathbb{R}^2$).

^aPomůcka pro snadnější zapamatování:

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy).$$

^bDefinici křivkového integrálu 2. druhu si lze připomenout v [1].

Věta 5.5. Necht $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je hladký oblouk a necht funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle \gamma \rangle$. Potom platí

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Důkaz. Označme $f = u + iv$ a $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$. Potom platí

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{(\gamma)} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{(\gamma)} v(x, y) dx + u(x, y) dy = \\ &= \int_a^b u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) - v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt + \\ &+ i \int_a^b v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) + u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt = \\ &= \int_a^b (u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \gamma_1'(t) + \\ &+ i(u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) \gamma_2'(t) dt = \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t) + i\gamma_2(t)) (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \end{aligned}$$

□

Příklad 5.6. Vypočtěte

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

kde $\gamma(t) := 5e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení.

– užitím definice 5.4:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_{(\gamma)} \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy + i \int_{(\gamma)} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-25 \sin t \cos t}{25} + \frac{25 \sin t \cos t}{25} dt + i \int_0^{2\pi} \frac{25 \sin^2 t}{25} + \frac{25 \cos^2 t}{25} dt = \\ &= 0 + i \int_0^{2\pi} 1 dt = \underline{2\pi i}; \end{aligned}$$

– pomocí věty 5.5:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5e^{it}} 5ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = \underline{2\pi i}.$$

▲

5.2 Cauchyho věty

Věta 5.7 (Cauchyho). *Nechť funkce f je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak pro každou uzavřenou po částech hladkou křivku γ v Ω (tzn. $\langle \gamma \rangle \subset \Omega$) platí*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Důkaz. Označme $f = u + iv$ a definujme vektorová pole

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= (u(x, y), -v(x, y)), \\ f_2(x, y) &:= (v(x, y), u(x, y)). \end{aligned}$$

Potom f_1 a f_2 jsou třídy C^2 na jednoduše souvislé oblasti

$$\Omega^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$$

(viz větu 3.10), a protože navíc v Ω^* platí

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

(viz větu 3.4), jsou i potenciální na Ω^* (viz [1]). Proto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{(\gamma)} f_1(x, y) ds + i \int_{(\gamma)} f_2(x, y) ds = 0 + i0 = 0.$$

□

Věta 5.8 (zobecnění Cauchyho věty). *Nechť $\Omega = \text{int } \gamma$, kde γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka v $\mathbb{C}$. Pak pro každou funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, která je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle \gamma \rangle$, platí^a*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

^aVšimněme si souvislosti s Greenovou větou – viz [1].

Pozorování 5.9. Buďte

$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$$

takové jednoduché uzavřené po částech hladké a kladně orientované křivky v $\mathbb{C}$, že pro každé $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_i \rangle &\subset \text{ext } \gamma_j, \text{ je-li } i \neq j, \\ \langle \gamma_i \rangle &\subset \text{int } \gamma. \end{aligned}$$

Pak množina

$$\Omega = \text{int } \gamma \cap \text{ext } \gamma_1 \cap \text{ext } \gamma_2 \cap \dots \cap \text{ext } \gamma_n$$

je $(n + 1)$ -násobně souvislou oblastí.¹

Věta 5.10 (Cauchyho věta pro vícenásobně souvislou oblast). *Nechť Ω je $(n + 1)$ -násobně souvislou oblastí výše popsaného typu a nechť $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na*

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle \gamma \rangle \cup \langle \gamma_1 \rangle \cup \langle \gamma_2 \rangle \cup \dots \cup \langle \gamma_n \rangle.$$

Pak platí

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

¹Namalujte si obrázek!

5.3 Cauchyho integrální vzorce

Věta 5.11. *Nechť γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v $\mathbb{C}$ a nechť funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní na $\Omega = \text{int } \gamma$ a spojitá na $\bar{\Omega} = \Omega \cup \langle \gamma \rangle$. Potom pro každé $z_0 \in \Omega$ platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (\clubsuit)$$

Navíc: je-li $n \in \mathbb{N}$, existuje $f^{(n)}(z_0)$ pro každé $z_0 \in \Omega$ a platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (\spadesuit)$$

Důkaz. Dokažme pouze tvrzení $(\clubsuit)$.

Buď $z_0 \in \Omega$ libovolný bod. Definujme pro každé $r > 0$ křivku

$$\gamma_r(t) := z_0 + re^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Z věty 5.10 pak plyne, že

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0+} \left[\int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right].$$

Z předpokladu

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

plyne

$$(\exists \delta > 0, k > 0)(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta) : \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq k,$$

a proto pro všechna „dost malá“ $r > 0$ platí¹

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq k 2\pi r,$$

¹Využíváme tohoto odhadu křivkového integrálu: Buď $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ hladký oblouk a buď funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na $\langle \gamma \rangle$. Potom platí

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{\dots \text{ délka křivky } \gamma}.$$

neboli

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Navíc platí

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0+} \left(f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt \right) = \lim_{r \rightarrow 0+} (f(z_0)2\pi i) = \underline{f(z_0)2\pi i},$$

a proto (stačí „zkombinovat“ podtržená tvrzení)

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i.$$

□

Pozorování 5.12.

- Z věty 5.11 vyplývá, že derivací holomorfní funkce získáme opět holomorfní funkci; jinak řečeno: je-li funkce f holomorfní na otevřené množině Ω a $n \in \mathbb{N}$, je funkce $f^{(n)}$ holomorfní na Ω .
- Uvažujme situaci z věty 5.11 Pak hodnoty funkce f na Ω jsou jednoznačně určeny hodnotami f na $\langle \gamma \rangle$.
- Vzorec (♠) můžeme získat, zderivujeme-li formálně n -krát podle z_0 obě strany rovnosti (♣).

Příklad 5.13. Vypočtěte

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz,$$

kde $\gamma(t) := \frac{3}{2}e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení. Z věty 5.10 plyne, že

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz,$$

kde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= \frac{1}{4}e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle; \\ \gamma_2(t) &:= 1 + \frac{1}{4}e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Nyní aplikujme tvrzení věty 5.11:

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z-0} dz = 2\pi i \left[\frac{e^z}{(1-z)^3} \right]_{z=0} = 2\pi i,$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \int_{\gamma_2} \frac{-\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left[\left(-\frac{e^z}{z} \right)'' \right]_{z=1} = \pi i(-e),$$

a proto

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \pi i(2-e).$$

▲

5.4 Primitivní funkce, nezávislost integrálu na cestě

Definice 5.14. Řekneme, že funkce $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je primitivní k funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, platí-li pro každé $z \in \Omega$, že $F'(z) = f(z)$.

Věta 5.15. *Nechť F je primitivní funkcí k f na oblasti Ω . Pak funkce tvaru $F + k$, kde $k \in \mathbb{C}$, tvoří právě všechny primitivní funkce k f na Ω .*

Důkaz. Máme dokázat:

- i) $k \in \mathbb{C} \Rightarrow F + k$ je primitivní k f na Ω ,
- ii) Φ je primitivní k f na $\Omega \Rightarrow \exists k \in \mathbb{C} : \Phi = F + k$.

Ad i). $(F + k)' = F' + 0 = f$ v Ω .

Ad ii). Definujme funkci $G = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ předpisem

$$G(z) := \Phi(z) - F(z).$$

Pak pro každé $z \in \Omega$ platí $G'(z) = 0$, a proto¹

$$\forall x + iy \in \Omega : 0 = G'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

a tedy taky

$$\forall x + iy \in \Omega : \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Odtud plyne, že funkce u a v jsou na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$ konstantní. Dokázali jsme, že funkce $G = u + iv = \Phi - F$ je na Ω konstantní.

□

¹Viz větu 3.4

Definice 5.16. Řekneme, že integrál funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nezávisí v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ na cestě, platí-li pro každé dvě po částech hladké křivky γ_1 a γ_2 takové, že

- $\langle \gamma_1 \rangle \cup \langle \gamma_2 \rangle \subset \Omega$,
- p.b. γ_1 = p.b. $\gamma_2 \stackrel{\text{ozn.}}{=} z_1$,
- k.b. γ_1 = k.b. $\gamma_2 \stackrel{\text{ozn.}}{=} z_2$,

rovnost

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \stackrel{\text{ozn.}}{=} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz.$$

Věta 5.17. *Nechť funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak integrál funkce f nezávisí v Ω na cestě.*

Důkaz ponechme jako cvičení; dokazované tvrzení je přímým důsledkem věty 5.7. □

Věta 5.18 (Moreroova). *Nechť funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť pro každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou křivku γ v Ω platí*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Pak f je holomorfní na Ω .

Věta 5.19. *Nechť integrál spojitě funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nezávisí v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ na cestě. Pak existuje primitivní funkce k f na Ω .*

Navíc: je-li $z_0 \in \Omega$ libovolný bod, je funkce F definovaná předpisem ^a

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

primitivní funkcí k f na Ω .

^aSymbolem „ $\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ “ rozumíme integrál $\int_{\gamma} f(\xi) d\xi$, kde γ je libovolná po částech hladká křivka v Ω , pro níž je p.b. $\gamma = z_0$ a k.b. $\gamma = z$.

Důkaz. Buď $z_0 \in \Omega$ a $F(z) := \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$.

Máme dokázat, že pro každé $z \in \Omega$ platí:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = 0.$$

Buď $z \in \Omega$ libovolný bod.

Vezměme $P(0)$ takové, aby

$$\forall h \in P(0) : z + h \in \Omega,$$

a definujme pro každé $h \in P(0)$ křivku γ_h předpisem

$$\gamma_h(t) := z + th, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pak pro každé $h \in P(0)$ platí:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi - f(z)h \right| = \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma_h} f(\xi) d\xi - f(z) \int_{\gamma_h} 1 d\xi \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma_h} f(\xi) - f(z) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \sup_{\xi \in \langle \gamma_h \rangle} |f(\xi) - f(z)| \cdot |h| = \sup_{\xi \in \langle \gamma_h \rangle} |f(\xi) - f(z)| \rightarrow 0 \text{ pro } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

protože f je podle předpokladů spojitá v bodě z . □

Příklad 5.20. Funkce

$$f(z) := \frac{1}{z}$$

je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$, a proto (integrujeme přes křivky ležící v Ω) funkce

$$F(z) := \int_1^z f(\xi) d\xi = \int_1^{|z|} \frac{1}{x} dx + \int_{|z|}^z \frac{1}{\xi} d\xi = [\ln x]_1^{|z|} + i \int_0^{\arg z} dt = \ln z$$

je primitivní funkcí k funkci f na Ω .¹

Pozorování 5.21. Buď funkce F primitivní k funkci f na jednoduše souvislé oblasti Ω a buď $z_1, z_2 \in \Omega$. Zkoumejme $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$.²

Zvolme libovolně bod $z_0 \in \Omega$. Pak existuje konstanta $k \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\forall z \in \Omega : F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + k$$

(viz věty 5.15, 5.17 a 5.19), a proto

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz &= \int_{z_1}^{z_0} f(z) dz + \int_{z_0}^{z_2} f(z) dz = \\ &= - \left(\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz + k \right) + \left(\int_{z_0}^{z_2} f(z) dz + k \right) = \underline{F(z_2) - F(z_1)} \stackrel{\text{ozn.}}{=} [F(z)]_{z_1}^{z_2}. \end{aligned}$$

¹Promyslete si podrobně!

²Opět integrujeme přes po částech hladké křivky ležící v Ω .

Toto pozorování lze zobecnit:

Věta 5.22. *Nechť existuje primitivní funkce k funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak integrál funkce f nezávisí v oblasti Ω na cestě. Navíc: je-li F primitivní funkcí k funkci f na oblasti Ω a je-li γ po částech hladká křivka v Ω , je*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(k.b. \gamma) - F(p.b. \gamma).$$

Příklady 5.23.

- a) Buď $\gamma(t) := e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0$, protože $\left(-\frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{z^2}$ v oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- b) $\int_0^{1+i} \sin z \cos z dz = \int_0^{1+i} \frac{1}{2} \sin(2z) dz = \frac{1}{4} [-\cos(2z)]_0^{1+i} = \frac{1}{4} (1 - \cos(2 + 2i))$.
- c) $\int_0^{2\pi i} ze^z dz = [ze^z]_0^{2\pi i} - \int_0^{2\pi i} e^z dz = 2\pi i - [e^z]_0^{2\pi i} = 2\pi i$
(počítali jsme „per partes“).

Kapitola 6

Číselné řady. Posloupnosti a řady funkcí.

6.1 Číselné řady

Definice 6.1. Řadou (komplexních čísel) rozumíme výraz

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (\heartsuit)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_n \in \mathbb{C}$.

Číslo z_n nazýváme n -tým členem řady ($\heartsuit$), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=1}^n z_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady ($\heartsuit$).

Říkáme, že řada ($\heartsuit$) konverguje, existuje-li (**konečná**) $\lim s_n \in \mathbb{C}$; v takovém případě pak číslo

$$s = \lim s_n$$

nazýváme součtem řady ($\heartsuit$) a píšeme ^a

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

(Řadu, která není konvergentní, nazýváme divergentní řadou.)

^aZde nepřehlédněme, že symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ značíme řadu i její součet, tj. číslo! Ale nebojme se, z kontextu bude vždy jasné, o které z těchto dvou možností právě mluvíme.

Věta 6.2. Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Pak platí:^a

(i) (nutná podmínka konvergence)

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim z_n = 0.$$

(ii) („konvergence řady = konvergence řady reálných a řady imaginárních částí“)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \text{konvergují řady } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} y_n;$$

navíc, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$, platí pro její součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

(iii) (Bolzanova–Cauchyho podmínka)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, m \in \mathbb{N}; n, m > n_0) : |s_n - s_m| < \varepsilon \\ &\quad (s_n := \sum_{k=1}^n z_k). \end{aligned}$$

(iv) („absolutní konvergence řady $\Rightarrow$ konvergence řady“)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje}.$$

(Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Řadu, která konverguje, ale nekonverguje absolutně, nazýváme neabsolutně konvergentní řadou.)

(v) (srovnávací kritérium)

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| \leq a_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje absolutně.}$$

^aDoporučuji čtenáři, aby si prohlédl [2].

(vi) (*d'Alembertovo kritérium*)

$$\lim \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje absolutně,}$$

$$\lim \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ diverguje.}$$

(vii) (*Cauchyho kritérium*)

$$\lim \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje absolutně,}$$

$$\lim \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ diverguje.}$$

(viii) (*integrální kritérium*)

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **nezáporná**, **nerostoucí** a **spojitá** na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ a necht' pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|z_n| = f(n)$. Pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$

(ix) (*Leibnizovo kritérium*)

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq z_{n+1} \leq z_n \\ \lim z_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z_n \text{ konverguje.}$$

(x) (*tvrzení o konvergenci geometrické řady*)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, kde $q \in \mathbb{C}$, konverguje právě tehdy, je-li $|q| < 1$. V takovém případě pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Příklady 6.3.

a) Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (1+i)^n$$

konverguje absolutně, protože

$$\left| \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}} (1+i)^{n+1}}{\frac{n}{3^n} (1+i)^n} \right| = \left| \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} (1+i) \right| \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

b) Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$$

diverguje, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n} + i \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n}$ a současně řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n}$ diverguje.¹

6.2 Posloupnosti funkcí. Bodová a stejnoměrná konvergence

Definice 6.4. Řekneme, že posloupnost komplexních funkcí (f_n) konverguje bodově na množině $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$ k funkci f , a píšeme $f_n \rightarrow f$ na Ω , platí-li

$$\forall z \in \Omega : \lim f_n(z) = f(z),$$

tj. platí-li

$$(\forall z \in \Omega) (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : f_n(z) \in U(f(z), \varepsilon).$$

Poznámka 6.5. Přirozené číslo n_0 vyskytující se ve výše uvedené podmínce závisí obecně na volbě $z \in \Omega$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Jestliže lze číslo n_0 zvolit nezávisle na volbě bodu $z \in \Omega$ a jsou-li funkce f_n a f konečné, mluvíme o stejnoměrné konvergenci na Ω . Řekneme to přesněji:

Definice 6.6. Buďte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a f konečné a definované na množině $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$. Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) konverguje stejnoměrně na množině Ω k funkci f , a píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na Ω , platí-li

$$\lim \left[\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \right] = 0,$$

tj. platí-li

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) (\forall z \in \Omega) : f_n(z) \in U(f(z), \varepsilon).$$

Věta 6.7. *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na Ω a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce f_n spojitá na Ω . Pak funkce f je spojitá na Ω .*

¹Rozmyslete si podrobně!

Definice 6.8. Budte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a f **konečné** a definované na množině $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$. Řekneme, že funkční řada

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \dots \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad (\spadesuit)$$

konverguje bodově resp. stejněměrně na množině Ω ke svému součtu f ,
konverguje-li posloupnost (s_n) částečných součtů funkční řady $(\spadesuit)^a$ bodově resp.
stejněměrně na Ω k funkci f .

$$^a s_n(z) := \sum_{k=1}^n f_k(z).$$

Věta 6.9 (Weierstrassova). *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce f_n holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a necht funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konverguje na Ω lokálně stejnoměrně, tzn. že*

$$(\forall z \in \Omega) (\exists U(z) \subset \Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ konverguje stejnoměrně na } U(z).$$

Potom je funkce f definovaná předpisem

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

holomorfní na oblasti Ω a pro každé $p \in \mathbb{N}$ a $z \in \Omega$ platí rovnost

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z).$$

Navíc: je-li γ po částech hladká křivka v Ω , platí

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad ^a$$

^aZapsáno symbolicky:

$$\left(\sum \dots \right)' = \sum (\dots)', \quad \int \left(\sum \dots \right) = \sum \left(\int \dots \right).$$

Kapitola 7

Mocninné řady. Taylorovy řady.

7.1 Mocninné řady

Definice 7.1. Mocninnou řadou o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme funkční řadu tvaru

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (\clubsuit)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.

Zabývejme se nyní konvergencí řady $(\clubsuit)$, tj. zkoumejme, pro jaká $z \in \mathbb{C}$ daná řada konverguje. Je zřejmé, že řada $(\clubsuit)$ konverguje pro $z = z_0$, tj. ve svém středu, a má tam součet a_0 . Předpokládejme nyní, že řada $(\clubsuit)$ konverguje v bodě $z_1 \neq z_0$, a buď $z \in \mathbb{C}$ takový bod, že $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n. \quad (\star)$$

Nyní aplikujme větu 6.2. Z předpokladu, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ konverguje, vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n(z_1 - z_0)^n) = 0,$$

a proto existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq k$.

Navíc, z předpokladu $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$ plyne konvergence (geometrické) řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} k \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n,$$

a proto ze vztahu $(\star)$ (a srovnávacího kritéria) vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ absolutně konverguje. Toto zjištění je zobecněno v následující větě.

Věta 7.2 (Abelova). *Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje v bodě $z_1 \neq z_0$. Pak konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $U(z_0, |z_1 - z_0|)$.*

Důsledek. *Pokud mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverguje v bodě $z_2 \in \mathbb{C}$, diverguje i v každém bodě množiny*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > |z_2 - z_0|\}.$$

Věta 7.3. *Pro každou mocninnou řadu (♣) o středu z_0 existuje právě jedno číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$ (řekněme mu poloměr konvergence mocninné řady (♣) takové, že*

- (i) řada (♣) konverguje absolutně, je-li $|z - z_0| < R$,
- (ii) řada (♣) diverguje, je-li $|z - z_0| > R$.

Důkaz. Dokazované tvrzení je snadným důsledkem předchozí věty 7.2. Stačí definovat

$$R := \sup \left\{ |z - z_0| : z \in \mathbb{C} \wedge \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje} \right\}.$$

□

Definice 7.4. Platí-li pro poloměr konvergence R mocninné řady (♣), že $0 < R < +\infty$, nazýváme $U(z_0, R)$ kruhem konvergence mocninné řady (♣); je-li $R = +\infty$, rozumíme kruhem konvergence mocninné řady (♣) množinu $U(z_0, +\infty) := \mathbb{C}$.

Poznámka 7.5. Předpokládejme, že pro poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ platí, že $0 < R < +\infty$. Uvědomme si, že obecně nelze říci nic o konvergenci této řady v bodech kružnice

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}.$$

Situaci ilustrujme těmito třemi mocninnými řadami:¹

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

¹Jedná se ve všech třech případech o mocninné řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, kde $z_0 = 0$ a $a_0 = 0$.

Protože

$$\left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| \rightarrow |z|, \quad \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{n+1}}{\frac{z^n}{n}} \right| \rightarrow |z|, \quad \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{z^n}{n^2}} \right| \rightarrow |z|,$$

je (viz d'Alembertovo kritérium) poloměr konvergence každé z těchto mocninných řad roven 1. Navíc platí:

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ diverguje v každém bodě kružnice $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (pro žádné $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, není totiž splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, tj. podmínka $\lim z^n = 0$);
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (neabsolutně) pro $z = -1$ (viz Leibnizovo kritérium) a diverguje pro $z = 1$ (viz integrální kritérium);
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konverguje (absolutně) pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ (viz integrální kritérium).

Věta 7.6. *Nechť existuje*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \stackrel{\text{ozn.}}{=} L, \quad \text{resp.} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{\text{ozn.}}{=} K.$$

Pak pro poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ platí:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{je-li } L \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{je-li } L = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } L = 0, \end{cases} \quad \text{resp.} \quad R = \begin{cases} \frac{1}{K}, & \text{je-li } K \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{je-li } K = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } K = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro $z \neq z_0$ je

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = L|z - z_0|, \quad \text{resp.} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = K|z - z_0|,$$

a užít d'Alembertovo, resp. Cauchyho kritérium. □

Příklad 7.7. Určete obor konvergence mocninné řady ¹

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n.$$

¹Tzn. určete množinu všech $z \in \mathbb{C}$, pro něž daná řada konverguje.

Řešení.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2},$$

a proto $R = 2$; daná řada konverguje (absolutně) pro každé $z \in U(0, 2)$ a diverguje pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 2$.

Je-li $|z| = 2$, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{2^n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0,$$

a proto řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$ diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

▲

Příklad 7.8. Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n.$$

Řešení.

$$\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \rightarrow 4,$$

a proto $R = \frac{1}{4}$.

▲

Věta 7.9. *Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak je funkce f definovaná předpisem*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

holomorfní na oblasti $U(z_0, R)$.

Navíc: pro každé $p \in \mathbb{N}$ a $z \in U(z_0, R)$ platí rovnost

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n (z - z_0)^{n-p}$$

a mocninná řada $\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n (z - z_0)^{n-p}$ má taky poloměr konvergence R .

Důkaz. Věta je přímým důsledkem Weierstrassovy a Abelovy věty (viz věty 6.9 a 7.2). $\square$

Příklad 7.10. Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

v kruhu konvergence.

Řešení. Protože

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1,$$

je kruhem konvergence dané mocninné řady oblast $U(0, 1)$. Definujme funkci f předpisem

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Pak pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, platí

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1 - (-z)} = \frac{1}{1 + z},$$

a proto existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že pro každé $z \in U(0, 1)$ je

$$f(z) = \ln(1 + z) + c.$$

Protože ale zřejmě platí:

$$0 = f(0) = \ln 1 + c = c,$$

je pro každé $z \in U(0, 1)$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \ln(1 + z).$$



Věta 7.11 (Abelova). *Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R \in (0, +\infty)$ a nechť tato řada konverguje v bodě*

$$z_1 = z_0 + Re^{i\varphi}, \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Pak je funkce f definovaná předpisem

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

spojitá na úsečce s krajními body z_0 a z_1 , tj. na množině

$$\{z_0 + re^{i\varphi} : r \in \langle 0, R \rangle\} = \{z_0 + (z_1 - z_0)t : t \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Speciálně:

$$f(z_1) = f(z_0 + Re^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R-} f(z_0 + re^{i\varphi}) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(z_0 + (z_1 - z_0)t).$$

Příklad 7.12. Vypočtěte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Řešení. Předně si uvědomme, že uvedená řada konverguje.¹ Uvažujme nyní funkci f definovanou předpisem:

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Z věty 7.11 a předcházejícího příkladu pak vyplývá, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = f(1) = \lim_{z \rightarrow 1-} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1-} (\ln(1+z)) = \underline{\ln 2}.$$

▲

¹Viz Leibnizovo kritérium.

7.2 Taylorovy řady

Dosud jsme ukázali, že součtem mocninné řady je (v kruhu konvergence) holomorfní funkce. Následující věta říká, že **každá** holomorfní funkce je (alespoň lokálně) součtem jisté mocninné řady.

Věta 7.13 (o rozvoji holomorfní funkce do Taylorovy řady).

Nechť funkce f je holomorfní na $U(z_0, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Pak existuje právě jedna mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ taková, že pro každé $z \in U(z_0, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Navíc, je-li ϱ libovolné reálné číslo takové, že $0 < \varrho < R$, platí pro koeficienty výše uvedené (tzv. Taylorovy) řady

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \varrho e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$(n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}).$$

Pozorování 7.14. Je-li f holomorfní na $\mathbb{C}$, je poloměr konvergence její Taylorovy řady (o středu v libovolném bodě $z_0 \in \mathbb{C}$) roven $+\infty$. Příklady takovýchto funkcí (a jejich Taylorových řad o středu 0):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Příklad 7.15. Najděte Taylorovu řadu funkce f o středu z_0 , je-li

a) $f(z) := \frac{1}{3-z}, \quad z_0 = 0,$

b) $f(z) := \frac{1}{3-z}, \quad z_0 = -1 + 3i,$

c) $f(z) := \ln z, \quad z_0 = 2.$

Řešení.

Ad a) Předně si uvědomme, že funkce f je holomorfní na $U(0, 3)$. Při hledání její Taylorovy řady nám dobře poslouží tvrzení o konvergenci geometrické řady: ¹

$$\forall z \in U(0, 3) : \underline{f(z)} = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

¹Viz větu 6.2.

Ad b) Postupujme podobně jako před chvílíčkou. Pro každé

$$z \in U(-1 + 3i, |3 - (-1 + 3i)|) = U(-1 + 3i, 5)$$

platí

$$\underline{f(z)} = \frac{1}{3 - z} = \frac{1}{4 - 3i - (z - (-1 + 3i))} = \frac{1}{4 - 3i} \frac{1}{1 - \frac{z+1-3i}{4-3i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-3i)^n}{(4-3i)^{n+1}}.$$

Ad c) Funkce f je zřejmě holomorfní na $U(2, 2)$. Pro každé $z \in U(2, 2)$ platí:

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^n,$$

a proto existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že pro každé $z \in U(2, 2)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{(z-2)^{n+1}}{n+1} + c.$$

Protože zřejmě

$$f(2) = \ln 2 = c,$$

je

$$\forall z \in U(2, 2) : f(z) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} (z-2)^n.$$

▲

Věta 7.16 (Liouvillova). *Nechť funkce f je na $\mathbb{C}$ holomorfní a omezená (tzn., že existuje $M \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $|f(z)| \leq M$). Pak je f na $\mathbb{C}$ konstantní.*

Důkaz. Už víme (viz větu 7.13), že

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

kde – pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $\varrho \in (0, +\infty)$ –

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho e^{it})}{(\varrho e^{it})^{n+1}} \varrho i e^{it} dt$$

$$(\gamma(t) := \varrho e^{it}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle).$$

Odtud plyne (opět pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a **každé** $\varrho \in (0, +\infty)$), že

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho e^{it})}{(\varrho e^{it})^n} i dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\varrho^n} dt = \frac{M}{\varrho^n}.$$

Protože konstantu $\varrho \in \mathbb{R}^+$ lze volit libovolně velkou, plyne z odhadů $|a_n| \leq \frac{M}{\varrho^n}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = 0$. Dokázali jsme, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $f(z) = a_0$; funkce f je tedy konstantní. $\square$

Věta 7.17 (Základní věta algebry). *Každý polynom kladného stupně má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen. Jinak řečeno: buď funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem:*

$$f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

kde

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0.$$

Pak existuje $z \in \mathbb{C}$ takové, že $f(z) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme sporem, že

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) \neq 0,$$

a uvažujme funkci

$$F(z) := \frac{1}{f(z)}.$$

Pak zřejmě platí:

- F je holomorfní na $\mathbb{C}$
 $\left(\forall z \in \mathbb{C} : F'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)} \right),$
- F je omezená na $\mathbb{C}$
 $\left(\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n (a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n})} = \frac{1}{\infty (a_n)} = \frac{1}{\infty} = 0 \right),$

a proto je (viz větu 7.16) funkce F na $\mathbb{C}$ konstantní. To je však spor s definicí funkce F . $\square$

Definice 7.18. Buď funkce f holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a buď $p \in \mathbb{N}$. Řekneme, že z_0 je p – násobným kořenem (nebo p – násobným nulovým bodem) funkce f , je-li

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(p)}(z_0).$$

Věta 7.19. *Nechť funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a nechť $f(z_0) = 0$. Pak existuje $U(z_0)$ takové, že platí právě jedna z možností:*

- (i) f je nulová na $U(z_0)$,
- (ii) $f(z) \neq 0$ pro každé $z \in U(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Důkaz. Jak víme, z výše uvedených předpokladů vyplývá, že funkce f je na nějakém okolí bodu z_0 rovna součtu své Taylorovy řady (o středu z_0). Není-li tato řada nulová (tj. není-li f nulová na žádném okolí bodu z_0), existuje zřejmě $p \in \mathbb{N}$ takové, že z_0 je p – násobným kořenem funkce f ; tj. na nějakém okolí bodu z_0 platí:

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-p} = (z - z_0)^p \varphi(z),$$

kde funkce

$$\varphi(z) := \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-p}$$

je holomorfní (a proto spojitá) a nenulová v bodě z_0 .¹ Odtud plyne, že existuje $U(z_0)$ takové, že funkce φ je nenulová v $U(z_0)$, a proto

$$\forall z \in U(z_0) \setminus \{z_0\} : f(z) = (z - z_0)^p \varphi(z) \neq 0.$$

□

Ukažme si jeden důležitý důsledek věty 7.19.

Věta 7.20. *Nechť funkce f a g jsou holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť γ je taková jednoduchá křivka v Ω , že $f = g$ na $\langle \gamma \rangle$. Pak $f = g$ na Ω .*

Cvičení 7.21. Dokažte pomocí věty 7.20, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

- a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- b) $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$,
- c) $\cos^2 z = \frac{1+\cos(2z)}{2}$, $\sin^2 z = \frac{1-\cos(2z)}{2}$,
- d) $\operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \ln(z^2) = 2 \ln z$.

¹ $\varphi(z_0) = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$

Kapitola 8

Laurentovy řady. Klasifikace singulárních bodů.

8.1 Laurentovy řady

Definice 8.1. Laurentovou řadou o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (\spadesuit)$$

kde pro každé $n \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.

Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

nazýváme regulární částí Laurentovy řady (

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

hlavní částí Laurentovy řady (

Řekneme, že Laurentova řada (konverguje na množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, konverguje-li na Ω její regulární i hlavní část. V takovém případě pak funkci f definovanou na Ω předpisem $f(z) := f_1(z) + f_2(z)$, kde f_1 resp. f_2 je součtem regulární resp. hlavní části Laurentovy řady (součtem Laurentovy řady (

Zabývejme se nyní konvergencí Laurentovy řady (

$$\xi = \frac{1}{z - z_0},$$

bude

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \xi^n,$$

kde řada napravo je **mocninnou řadou** o středu 0 („v proměnné“ ξ). Buď ρ její poloměr konvergence. Pak platí: ¹

- je-li $|\xi| < \rho$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \xi^n$ konverguje absolutně,
- je-li $|\xi| > \rho$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \xi^n$ diverguje.

Definujeme-li číslo

$$r := \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \text{je-li } 0 < \rho < +\infty, \\ 0, & \text{je-li } \rho = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } \rho = 0, \end{cases}$$

tak z předchozích úvah plyne:

- je-li $|z - z_0| > r$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$ konverguje absolutně,
- je-li $|z - z_0| < r$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$ diverguje.

Nyní si označme R poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tj. regulární části Laurentovy řady ($\spadesuit$). Nastane právě jedna z možností:

$$r < R, \quad r = R, \quad r > R.$$

- i) Je-li $r < R$, konverguje Laurentova řada ($\spadesuit$) absolutně (a lokálně stejnoměrně) na mezikruží

$$P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

a diverguje v každém bodě množiny

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \text{ nebo } |z - z_0| > R\}.$$

¹Viz větu 7.3.

Navíc se dá ukázat, že součet f Laurentovy řady ($\spadesuit$) je funkce holomorfní na $P(z_0, r, R)$ a že pro každé $p \in \mathbb{N}$ a $z \in P(z_0, r, R)$ platí

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{d^p ((z - z_0)^n)}{dz^p}.$$

ii) Při rovnosti $\underline{r = R}$ Laurentova řada ($\spadesuit$) diverguje v každém bodě množiny

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \neq r = R\}.$$

iii) V posledním z případů, tj. je-li $\underline{r > R}$, neexistuje žádné $z \in \mathbb{C}$, ve kterém Laurentova řada ($\spadesuit$) konverguje.

Situace je podobná té z podkapitoly 7.1. Ukázali jsme, že součtem Laurentovy řady je (samozřejmě za předpokladu $r < R$) funkce holomorfní na mezikruží $P(z_0, r, R)$. Následující věta říká, že každá funkce holomorfní na mezikruží $P(z_0, r, R)$ je součtem jisté Laurentovy řady.

Věta 8.2 (o rozvoji holomorfní funkce do Laurentovy řady).

Nechť funkce f je holomorfní na $P(z_0, r, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$.

Pak existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ taková, že pro každé $z \in P(z_0, r, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Navíc, je-li ϱ libovolné reálné číslo takové, že $r < \varrho < R$, platí pro koeficienty výše uvedené Laurentovy řady (tzv. Laurentova rozvoje funkce f), že

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= z_0 + \varrho e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ (n &\in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}). \end{aligned}$$

Příklad 8.3. Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) := \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}$$

na všech maximálních mezikruzích se středem $z_0 = 0$, na nichž je f holomorfní.

Řešení. Laurentův rozvoj funkce f máme zřejmě najít na těchto třech mezikružích:

$$P(0, 0, 1), \quad P(0, 1, 2), \quad P(0, 2, +\infty).$$

Nejdříve si uvědomme, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ je

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Nyní přistupme zvlášť k jednotlivým mezikružím.

a) Protože platí implikace:

$$\begin{aligned} |z| < 2 &\Rightarrow \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n, \\ |z| < 1 &\Rightarrow -\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \end{aligned}$$

je pro každé $z \in \underline{P(0, 0, 1)} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

(Všimněme si, že jsme našli – jak bylo lze čekat – Taylorovu řadu.)

b) Již víme (viz část a), že pro každé $z \in \mathbb{C}$ takové, že $1 < |z| < 2$, platí

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

Protože navíc platí

$$|z| > 1 \Rightarrow -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z^{n+1}},$$

je pro každé $z \in \underline{P(0, 1, 2)} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{z^n}.$$

c) Z implikace uvedené v části b) a z pozorování

$$|z| > 2 \Rightarrow \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

snadno plyne, že pro každé $z \in \underline{P(0, 2, +\infty)} = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$ platí

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \frac{1}{z^n}.$$

▲

Cvičení 8.4. Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

na všech maximálních mezikružích se středem $z_0 = 1$, na nichž je f holomorfní.

8.2 Izolované singularity a jejich klasifikace

Definice 8.5. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme izolovanou singularitou funkce f , jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

- (1) funkce f není holomorfní v bodě z_0 ,
- (2) existuje prstencové okolí $P(z_0)$, na němž je f holomorfní.

Je-li bod z_0 izolovanou singularitou funkce f , existuje číslo $R \in \mathbb{R}^+$ takové, že f je holomorfní na $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$, a proto^a

$$\forall z \in P(z_0, R) : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Podle počtu nenulových koeficientů hlavní části této Laurentovy řady rozlišme tři případy:

- a) všechny koeficienty hlavní části jsou nulové (tj. $a_{-n} = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$),
- b) existuje aspoň jeden ale nejvýše konečně mnoho nenulových koeficientů hlavní části (tzn. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{-n} \neq 0$ a že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k > n$, je $a_{-k} = 0$),
- c) existuje nekonečně mnoho nenulových koeficientů hlavní části.

Nastane-li případ a), nazýváme bod z_0 odstranitelnou singularitou funkce f , v případě b) se bod z_0 nazývá pólem (násobnosti n) funkce f ^b a za situace c) budeme bodu z_0 říkat podstatná singularita funkce f .

^aViz větu 8.2.

^bPól násobnosti 1 nazýváme taky jednoduchým pólem.

Věta 8.6. Bud' $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Pak platí:

- (i) z_0 je odstranitelnou singularitou funkce f právě tehdy, je-li

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C};$$

- (ii) z_0 je pólem funkce f (resp. pólem násobnosti n funkce f) právě tehdy, je-li

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

$$\left(\text{resp. je-li } \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right);$$

- (iii) z_0 je podstatnou singularitou funkce f právě tehdy, jestliže $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje.

Věta 8.7 (Velká Picardova). *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je podstatnou singularitou funkce f . Pak f nabývá na libovolném prstencovém okolí bodu z_0 všech hodnot $z \in \mathbb{C}$ s výjimkou nejvýš jedné, tzn.*

$$(\forall P(z_0)) (\exists z \in \mathbb{C}) : \mathbb{C} \setminus \{z\} \subset f(P(z_0)).$$

8.3 Laurentova řada o středu ∞ , klasifikace bodu ∞

Definice 8.8. Laurentovou řadou o středu ∞ rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad (\spadesuit)$$

kde pro každé $n \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.

Mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$$

nazýváme hlavní částí Laurentovy řady ($\spadesuit$), funkční řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

regulární částí Laurentovy řady ($\spadesuit$).^a

^aVšimněme si, že formálně **není rozdíl** mezi Laurentovou řadou o středu 0 a Laurentovou řadou o středu ∞ . Chceme-li tyto dva případy rozlišit, je nutno udat střed řady nebo určit její hlavní resp. regulární část.

Podobně jako u Laurentových řad o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ zavádíme pojem konvergence Laurentovy řady o středu ∞ a jejího součtu; podobně bychom dospěli k mezikruží konvergence – tentokrát tvaru

$$P(\infty, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < \frac{1}{r}\}.$$

I zde platí: konverguje-li Laurentova řada ($\spadesuit$) na mezikruží $P(\infty, r, R) \neq \emptyset$, je součet této řady na $P(\infty, r, R)$ holomorfní funkcí. Platí i analogie věty 8.2:

Věta 8.9. *Nechť funkce f je holomorfní na $P(\infty, r, R) \neq \emptyset$. Pak existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ taková, že pro každé $z \in P(\infty, r, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Navíc, je-li ϱ libovolné reálné číslo takové, že

$$\frac{1}{R} < \varrho < \frac{1}{r},$$

platí pro koeficienty výše uvedené Laurentovy řady

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) z^{n-1} dz,$$

kde

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \varrho e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ (n &\in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}). \end{aligned}$$

Definice 8.10. Řekneme, že ∞ je izolovanou singularitou funkce f , existuje-li $P(\infty)$, na němž je f holomorfní.

Je-li ∞ izolovanou singularitou funkce f , můžeme na nějakém $P(\infty)$ funkci f rozložit v Laurentovu řadu o středu ∞ ; tzn.

$$\forall z \in P(\infty) : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Stejně jako u konečných izolovaných singularit i zde podle počtu nenulových koeficientů hlavní části této Laurentovy řady klasifikujeme bod ∞ . Platí i analogie věty 8.6:

Věta 8.11. *Bud' ∞ izolovanou singularitou funkce f . Pak platí:*

(i) ∞ je odstranitelnou singularitou funkce f právě tehdy, je-li

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C};$$

(ii) ∞ je pólem funkce f (resp. pólem násobnosti n funkce f) právě tehdy, je-li

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

$$\left(\text{resp. je-li } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right);$$

(iii) ∞ je podstatnou singularitou funkce f právě tehdy, jestliže $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ neexistuje.

Kapitola 9

Rezidua. Reziduová věta

9.1 Reziduum funkce a jeho výpočet

Definice 9.1. Buď $z_0 \in \mathbb{C}$ (resp. ∞) izolovanou singularitou funkce f a buď

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{resp.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n})$$

Laurentův rozvoj funkce f na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 (resp. ∞). Číslo a_{-1} (resp. $-a_1$) nazýváme reziduum funkce f v bodě z_0 (resp. ∞) a značíme $\text{res } f(z_0)$ (resp. $\text{res } f(\infty)$).^a

^aNěkdy budeme používat i značení: $\text{res}_{z=z_0} f(z)$ (resp. $\text{res}_{z=\infty} f(z)$).

Poznámka 9.2. Na místě je přirozená otázka, proč se číslo a_{-1} (resp. $-a_1$) nazývá „reziduum funkce“. ¹ K odpovědi si stačí uvědomit, že za situace z výše uvedené definice platí²

$$\begin{aligned} \text{res } f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) dz \\ (\text{resp.} \quad \text{res } f(\infty) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \right) dz). \end{aligned}$$

¹ „Reziduum“ znamená „zbytek“ nebo „zůstatek“.

²Viz větu 8.2 (resp. větu 8.9).

Věta 9.3. Platí:

- (i) Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ odstranitelnou singularitou funkce f , je $\operatorname{res} f(z_0) = 0$.^a
 (ii) Je-li funkce f holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a má-li funkce g v bodě z_0 jednoduchý pól, je

$$\operatorname{res}_{z=z_0} (f(z)g(z)) = f(z_0) \operatorname{res}_{z=z_0} g(z).$$

- (iii) Jsou-li funkce f a g holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a je-li bod z_0 jednonásobným kořenem funkce g ,^b je

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

- (iv) Je-li bod $z_0 \in \mathbb{C}$, resp. ∞ pólem násobnosti k funkce f , je

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z)(z-z_0)^k) \right),$$

resp.

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^{k+2} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} f(z) \right).$$

- (v) Je-li funkce f holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, kde $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ jsou (navzájem různé) izolované singularity funkce f , je

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i) = 0.$$

^a**Varovný příklad!** Uvažujeme-li funkci $f(z) := \frac{1}{z}$, je ∞ odstranitelnou singularitou funkce f , a přesto platí: $\operatorname{res} f(\infty) = -1 \neq 0$.

^bTzn. $g(z_0) = 0 \neq g'(z_0)$.

Cvičení 9.4. Pokuste se o důkaz věty 9.3.

Příklady 9.5. Vypočtěte

a) $\operatorname{res}_{z=0} \left(z^2 \sin \frac{1}{z} \right),$

b) $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{\cos(2z)},$

c) $\operatorname{res}_{z=2\pi i} \frac{1}{(e^z - 1)^2}.$

Řešení.

Ad a)

Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}},$$

a proto

$$\operatorname{res}_{z=0} \left(z^2 \sin \frac{1}{z} \right) = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Ad b)

Protože $\frac{\pi}{4}$ je zřejmě jednonásobným kořenem funkce

$$g(z) := \cos(2z),$$

je ¹

$$\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{\cos(2z)} = \left[\frac{z^3 \sin z}{-2 \sin(2z)} \right]_{z=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}\pi^3}{256}.$$

Ad c)

Protože $2\pi i$ je zřejmě pólem násobnosti 2 funkce, jejíž reziduum počítáme, je ²

$$\operatorname{res}_{z=2\pi i} \frac{1}{(e^z - 1)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 2\pi i} \left[\frac{(z - 2\pi i)^2}{(e^z - 1)^2} \right]' = \dots = -1.$$

▲

9.2 Reziduová věta

Věta 9.6 (Reziduová). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, nechť γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v Ω a nechť funkce f je holomorfní na $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, kde $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \operatorname{int} \gamma$ jsou (navzájem různé) izolované singularity funkce f .*

Potom platí:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i).$$

Důkaz je snadným důsledkem definice rezidua a vět [5.10](#) a [8.2](#).

□

¹Viz větu [9.3](#) – část (iii).

²Viz větu [9.3](#) – část (iv).

Příklad 9.7. Vypočtěte

$$\int_{\gamma} z^2 \sin \frac{1}{z+1} dz,$$

kde

$$\gamma(t) := 2e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení. Z reziduové věty plyne, že

$$\int_{\gamma} z^2 \sin \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} z^2 \sin \frac{1}{z+1}.$$

Protože pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ platí:

$$z^2 \sin \frac{1}{z+1} = ((z+1)^2 - 2(z+1) + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2n+1}},$$

je ¹

$$\int_{\gamma} z^2 \sin \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} z^2 \sin \frac{1}{z+1} = 2\pi i \left(1 \frac{(-1)^1}{3!} + 0 + 1 \frac{(-1)^0}{1!} \right) = \frac{5}{3} \pi i.$$

▲

9.3 Výpočet integrálů funkcí reálné proměnné pomocí reziduové věty

a) Integrály typu $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$,

kde $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je racionální funkce dvou proměnných a integrovaná funkce (tj. funkce $x \mapsto R(\sin x, \cos x)$) je spojitá na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zvolme substituci

$$e^{ix} = z.$$

Pak (zatím pouze formálně) dostaneme:

$$\sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \quad \cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad dz = e^{ix} i dx, \quad \text{tj.} \quad dx = \frac{1}{iz} dz,$$

a proto

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx = \int_{\gamma} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{1}{iz} dz, \quad (9.1)$$

¹Rozmyslete si podrobně!

kde

$$\gamma(x) := e^{ix}, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Správnost rovnosti (9.1), kterou jsme získali pouze „formálním dosazením“, plyne přímo z věty 5.5. Integrál vystupující napravo lze často spočítat pomocí reziduové věty.

Příklad 9.8.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4} - \cos x} &= \int_{\gamma} \frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{1}{iz} dz = \\ &= -\frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = -\frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} \right) = -4\pi \frac{1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{8}{3}\pi \\ &(\gamma(x) = e^{ix}, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle). \end{aligned}$$

b) Integrály typu $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx},$

kde $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou polynomy, pro něž platí:

- Q nemá reálný kořen,
- stupeň polynomu Q je alespoň o 2 větší než stupeň polynomu P .

Z výše uvedených předpokladů vyplývá, že

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

kde

$$\alpha_k(t) := t, \quad t \in \langle -k, k \rangle,$$

a že

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\beta_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0,$$

kde

$$\beta_k(t) := ke^{it}, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Proto platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz,$$

kde¹

$$\gamma_k(t) := \begin{cases} \alpha_k(t+k), & \text{je-li } t \in \langle -2k, 0 \rangle, \\ \beta_k(t), & \text{je-li } t \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Nyní uvažujme kruh $U(0, r) \subset \mathbb{C}$ tak velký, aby obsahoval všechny kořeny polynomu Q (takový jistě existuje!). Pak pro každé reálné číslo $k > r$ platí

$$\int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz,$$

a proto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz.$$

A teď aplikujme reziduovou větu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \in \mathbb{C}: \\ Q(z_k)=0, \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res}_{z=z_k} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right).$$

Příklad 9.9.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{((x - (-1 + i))(x - (-1 - i)))^2} dx = \\ &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1+i} \frac{1}{((z - (-1 + i))(z - (-1 - i)))^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1+i} \left(\frac{1}{(z - (-1 - i))^2} \right)' = \\ &= 2\pi i \left[-2 \frac{1}{(z - (-1 - i))^3} \right]_{z=-1+i} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

¹Namalujte si geometrické obrazy křivek α_k , β_k , γ_k .

Kapitola 10

Příklady k procvičení

Příklad 10.1.

Určete reálnou a imaginární část daného komplexního čísla

a) $z = (1 + i)(3 - 2i)$;

b) $z = \frac{2-3i}{3+4i}$;

c) $z = \frac{1+i}{1-i}$;

d) $z = 2i - \frac{2-4i}{2}$.

Příklad 10.2.

Zapište dané komplexní číslo v goniometrickém tvaru

a) $z = -1 + \sqrt{3}i$;

b) $z = i$;

c) $z = -8$;

d) $z = -1 - \sqrt{3}i$;

e) $z = \frac{2+i}{3-2i}$;

f) $z = \frac{3-i}{2+i}$.

Příklad 10.3.

Dokažte (matematickou indukcí) tzv. *Moiwrovu větu*:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \varphi \in \mathbb{R}) : (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

Příklad 10.4.

Bud' $\varphi \in \mathbb{R}$. Vyjádřete $\sin(4\varphi)$ a $\cos(4\varphi)$ pomocí $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$.

Příklad 10.5.

Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li $z = \left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \right)^{24}$.

Příklad 10.6.

Určete $\operatorname{Arg} z$ a $\arg z$, je-li

a) $z = (\sqrt{3} + i)^{126}$;

b) $z = (1 + i)^{137}$;

c) $z = -1 - 5i$.

Příklad 10.7.

Znázorněte v Gaussově rovině množinu

a) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Re} z \leq 1\}$;

b) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Re}(z^2) = 2\}$;

c) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{4}\}$;

d) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |\operatorname{Im} z| < 1\}$;

e) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| = \operatorname{Re} z + 1\}$;

f) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z - 2| = |1 - 2\bar{z}|\}$;

g) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \left| \frac{z-2}{z-3} \right| = 1\}$;

h) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |1 + z| < |1 - z|\}$;

i) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z + 1| = 2|z - 1|\}$;

j) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : 2 < |z + 2 - 3i| < 4\}$;

k) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 2i) \leq \frac{\pi}{2}\}$;

l) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| + \operatorname{Re} z \leq 1 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Příklad 10.8.

Bud' $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dokažte následující implikace:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \varphi_1 \in \text{Arg } z_1 \\ \varphi_2 \in \text{Arg } z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \in \text{Arg } (z_1 z_2);$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \varphi_1 \in \text{Arg } z_1 \\ \varphi_2 \in \text{Arg } z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in \text{Arg } \left(\frac{z_1}{z_2} \right).$$

Příklad 10.9.

Rozhodněte, zda daná limita existuje, a pokud ano, vypočtete ji

$$\text{a) } \lim (3 - 4i)^n,$$

$$\text{b) } \lim \left((-1)^n + \frac{i}{n} \right),$$

$$\text{c) } \lim \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n,$$

$$\text{d) } \lim \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right)^{6n}.$$

Příklad 10.10.

Bud' (z_n) posloupnost komplexních čísel. Dokažte následující tvrzení:

$$\text{a) } z_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \rightarrow \infty;$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} |z_n| \rightarrow r \in \mathbb{R} \\ \arg z_n \rightarrow \varphi \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow z_n \rightarrow r(\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

a ukažte, že implikaci v tvrzení b) nelze obrátit.

Příklad 10.11.

Najděte všechna $z \in \mathbb{C}_\infty$, pro která platí

$$\text{a) } z^3 = 1;$$

$$\text{b) } z^2 = i;$$

$$\text{c) } z^2 = 24i - 7;$$

$$\text{d) } \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 = 2i;$$

- e) $z^4 = -1$;
- f) $z^3 = i - 1$;
- g) $z^5 = 1$;
- h) $z^2 = -11 + 60i$;
- i) $z^2 = 3 + 4i$.

Příklad 10.12.

Určete a znázorněte množinu $M = \{\frac{1}{z} : z \in \Omega\}$, je-li

- a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \alpha\}, \alpha \in (-\pi, \pi)$;
- b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$;
- c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$;
- d) $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = 1\}$;
- e) $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0\}$.

Příklad 10.13.

Určete a znázorněte množinu $M = \{f(z) : z \in \Omega\}$, je-li

- a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{6}\}, f(z) := z^2$;
- b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}, f(z) := e^z$;
- c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi \wedge \operatorname{Im} z > 0\}, f(z) := e^{iz}$;
- d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\}, f(z) := z^2$.

Příklad 10.14.

Vypočtěte

- a) $\sin(2 - 3i)$;
- b) $\cos i$;
- c) $\cosh i$;
- d) $\operatorname{Ln}(-5 + 3i)$ a $\ln(-5 + 3i)$;

e) $\operatorname{Ln}(-4 - \sqrt{3}i)$ a $\ln(-4 - \sqrt{3}i)$;

f) $\operatorname{Ln}(ie^2)$.

Příklad 10.15.

Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí

a) $\sin z = 3$;

b) $\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\sin z + \cos z = 2$;

d) $\sin z - \cos z = 3$;

e) $z^2 + 2z + 9 + 6i = 0$.

Příklad 10.16.

Vypočtěte

a) 2^i ;

b) $(-2)^{\sqrt{2}}$;

c) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;

d) $i^{\frac{3}{4}}$;

e) $(-1)^{\sqrt{3}}$;

f) $(-\sqrt{3}i + 1)^{-3}$.

Příklad 10.17.

Najděte reálnou a imaginární část funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované předpisem

a) $f(z) := \sin z$;

b) $f(z) := z^2 \cos z$;

c) $f(z) := z^3 + 5z - 1$;

d) $f(z) := |z| \bar{z}$;

e) $f(z) := z^2 \bar{z}$;

f) $f(z) := \frac{1}{z}$.

Příklad 10.18.

Zjistěte, zda je funkce $f(z) := z^3$ prostá na množině Ω , je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$;

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle\}$.

Příklad 10.19.

Určete, zda existuje daná limita, a pokud ano, vypočtěte ji

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$;

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{z\bar{z}}$;

c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Im} z}{|z|}$;

d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$;

e) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{|z|^2}$;

f) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + z(2-i) - 2i}{z^2 + 1}$;

g) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}$.

Příklad 10.20.

Znázorněte množinu $\langle \varphi \rangle := \{\varphi(t) : t \in D\varphi\}$, je-li

a) $\varphi(t) := 1 - it$, $D\varphi = \langle 0, 2 \rangle$;

b) $\varphi(t) := t - it^2$, $D\varphi = \langle -1, 2 \rangle$;

c) $\varphi(t) := 1 + e^{-it}$, $D\varphi = \langle 0, 2\pi \rangle$;

d) $\varphi(t) := e^{2it} - 1$, $D\varphi = \langle 0, 2\pi \rangle$;

$$\text{e) } \varphi(t) := \begin{cases} e^{i\pi t}, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ t - 2, & t \in \langle 1, 3 \rangle; \end{cases}$$

$$\text{f) } \varphi(t) := \begin{cases} e^{it}, & t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \pi \rangle, \\ \frac{3t}{\pi} - 4, & t \in \langle \pi, 2\pi \rangle. \end{cases}$$

Příklad 10.21.

Parametrizujte množinu Ω (tzn. najděte křivku $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ takovou, aby $\langle \varphi \rangle = \Omega$), je-li

$$\text{a) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + 3i| = 2\};$$

$$\text{b) } \Omega \text{ úsečka s krajními body } a, b \in \mathbb{C}, a \neq b;$$

$$\text{c) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z\};$$

$$\text{d) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z}\right) = 2\}.$$

Příklad 10.22.

Znázorněte množinu Ω a rozhodněte, zda je Ω oblastí a zda je Ω otevřenou množinou, je-li

$$\text{a) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1 \vee |z + i| < 1\};$$

$$\text{b) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1 \wedge |z - 2| < 2\};$$

$$\text{c) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < |z + 1|\};$$

$$\text{d) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| > 2|z|\};$$

$$\text{e) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\};$$

$$\text{f) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \arg z \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}\};$$

$$\text{g) } \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |2z| < |1 + z^2|\}.$$

Příklad 10.23.

Zjistěte, ve kterých bodech má funkce f derivaci a ve kterých bodech je funkce f holomorfní, je-li

$$\text{a) } f(z) := \operatorname{Re} z;$$

- b) $f(z) := |z^2|$;
- c) $f(z) := ze^z$;
- d) $f(z) := \bar{z}|z|$;
- e) $f(z) := \frac{\operatorname{Re} z}{z}$;
- f) $f(z) := z^2 \bar{z}$;
- g) $f(z) := z^2 + 2z - 1$.

Příklad 10.24.

Zjistěte, zda je funkce Φ harmonická na oblasti Ω , je-li

- a) $\Phi(x, y) := x^2 - y^2 + 2011$, $\Omega = \mathbb{C}$;
- b) $\Phi(x, y) := \frac{x}{x^2+y^2} + x^2 - y^2 + x - y$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 10.25.

Najděte (existuje-li) na oblasti Ω holomorfní funkci $f = u + iv$, je-li

- a) $u(x, y) := x^3 - 3xy^2 - 2y$, $\Omega = \mathbb{C}$;
- b) $u(x, y) := \frac{x}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- c) $u(x, y) := 3x^2 - y^2 + 3x + y$, $\Omega = \mathbb{C}$;
- d) $u(x, y) := x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 10.26.

Buď $u(x, y) := x^3 - 3xy^2 - 2y + 2$. Najděte (existuje-li) na $\mathbb{C}$ holomorfní funkci $f = u + iv$, pro niž platí

- a) $f(0) = i$;
- b) $f(1) = 3 - i$.

Příklad 10.27.

Najděte (existuje-li) na oblasti Ω holomorfní funkci $f = u + iv$, je-li

- a) $v(x, y) := -3xy^2 + x^3 + 5$, $\Omega = \mathbb{C}$;
 b) $v(x, y) := \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Příklad 10.28.

Buď $v(x, y) := 1 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Najděte (existuje-li) na oblasti $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorfní funkci $f = u + iv$, pro niž platí

- a) $f(3) = \ln 3 + 6 + i$;
 b) $f(e) = 1 - i$.

Příklad 10.29.

Dokažte, že je funkce

$$v(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$$

harmonická na (dvojnásobně souvislé) oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a že přesto neexistuje funkce $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, aby funkce $f := u + iv$ byla holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 10.30.

Určete *úhel otočení* a *koefficient roztažnosti* funkce f v bodě z_0 , je-li

- a) $f(z) := e^z$, $z_0 = -1 - \frac{\pi}{2}i$;
 b) $f(z) := z^3$, $z_0 = -3 + 4i$;
 c) $f(z) := \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 2i$.

Příklad 10.31.

Určete, ve kterých bodech Gaussovy roviny dochází při daném zobrazení ke *kontrakci*

- a) $f(z) := \frac{2}{z}$;
 b) $f(z) := \ln(z + 4)$.

Příklad 10.32.

Znáznorněte množiny Ω a $f(\Omega) = \{f(z) : z \in \Omega\}$, je-li ¹

- a) $\Omega = U(1, 2)$, $f(z) := 1 - 2iz$;
- b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$, $f(z) := (1 + i)z + 1$;
- c) $\Omega = U(1, 2)$, $f(z) := \frac{1}{z}$;
- d) $\Omega = U(1, 2)$, $f(z) := \frac{2iz}{z+3}$;
- e) $\Omega = U(1, 2)$, $f(z) := \frac{z-1}{2z-6}$;
- f) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$, $f(z) := \frac{1}{z}$;
- g) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$, $f(z) := \frac{z}{z-1+i}$;
- h) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$, $f(z) := \frac{z}{z-2}$;
- i) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0 \wedge \operatorname{Im} z < 0\}$, $f(z) := \frac{1}{z}$;
- j) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) := \frac{z-1}{z+1}$;
- k) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 0 \wedge \operatorname{Im} z < 0\}$, $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$;
- l) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Re} z < 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) := \frac{z}{z-i}$.

Příklad 10.33.

Najděte lineární lomenou funkci f takovou, aby

- a) $f(-1) = 0$, $f(i) = 2i$, $f(1+i) = 1-i$;
- b) $f(i) = \infty$, $f(6) = 0$, $f(\infty) = 3$;
- c) $f(0) = i$, $f(i) = 0$, $f(-1) = -i$.

Příklad 10.34.

Najděte lineární funkci, která zobrazí čtverec s vrcholy 0 , $1-i$, 2 , $1+i$ na čtverec s vrcholy $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

¹Nápověda k některým z níže uvedených příkladů. Uvědomte si (a dokažte), že platí tvrzení:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ je konformní na oblasti } \Omega \subset \mathbb{C}_\infty, \\ A, B \subset \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Příklad 10.35.

Buď

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}.$$

Najděte lineární lomenou funkci f takovou, aby $f(\Omega) = U(0, 1)$.

Příklad 10.36.

Najděte konformní zobrazení, které zobrazí oblast

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Re} z > 0\}$$

na oblast

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Příklad 10.37.

Buď

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \wedge \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Najděte lineární lomenou funkci f takovou, aby

$$f(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Příklad 10.38.

Najděte konformní zobrazení, které zobrazí oblast

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z > 0\}$$

na oblast $U(0, 1)$.

Příklad 10.39.

Nalezněte obrazy přímek rovnoběžných s reálnou resp. imaginární osou při zobrazení $f(z) := \frac{1}{z}$ (přímky uvažujte včetně bodu ∞).

Příklad 10.40.

Nalezněte obrazy množin

$$M_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \alpha\}, \quad N_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\},$$

kde $\alpha \in (-\pi, \pi)$, $r \in \mathbb{R}^+$, při zobrazení $f(z) := \ln z$.

Příklad 10.41.

Vypočtěte

$$\int_{\gamma} |z| \, dz,$$

je-li

$$\gamma(t) := \begin{cases} 3e^{it}, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ i(3 + \frac{\pi}{2} - t), & t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 3 \rangle, \\ t - \frac{\pi}{2} - 3, & t \in \langle \frac{\pi}{2} + 3, \frac{\pi}{2} + 6 \rangle. \end{cases}$$

Příklad 10.42.

Vypočtěte

$$\int_{\gamma} z^3 \, dz,$$

je-li

$$\gamma(t) := \begin{cases} e^{it}, & t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \pi \rangle, \\ \frac{3}{\pi}t - 4, & t \in \langle \pi, 2\pi \rangle, \\ -\frac{2+i}{\pi}t + 6 + 2i, & t \in \langle 2\pi, 3\pi \rangle. \end{cases}$$

Příklad 10.43.

Vypočtěte

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} \, dz,$$

je-li γ taková jednoduchá uzavřená po částech hladká a kladně orientovaná křivka, že $\langle \gamma \rangle$ je hranicí množiny

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Příklad 10.44.Vypočtěte pomocí Cauchyho integrálních vzorců daný integrál ¹

a)

$$\int_k \frac{z^2 + i}{z} \, dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\};$$

¹Úmluva. Symbolem $\int_k f(z) \, dz$, kde $k \subset \mathbb{C}$, rozumíme $\int_{\gamma} f(z) \, dz$, kde γ je taková jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, že $\langle \gamma \rangle = k$.

b)

$$\int_k \frac{\sin z}{z+i} dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 1\};$$

c)

$$\int_k \frac{\sin z}{z^2 - 7z + 10} dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\};$$

d)

$$\int_k \frac{\sin z}{(z-2i)^3} dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\};$$

e)

$$\int_k \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\};$$

f)

$$\int_k \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2 - 4)^2} dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\};$$

g)

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos(\pi z)}{z^2 + 2z} dz, \quad \text{kde } \gamma(t) := \frac{3}{2}e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle;$$

h)

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2 - 1)^3}, \quad \text{kde } \gamma(t) := \frac{-2 + e^{-4\pi it}}{2}, \quad t \in \langle 0, 4 \rangle;$$

i)

$$\int_\gamma \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2},$$

kde γ je taková jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, že $-2 \in \text{int } \gamma$, $i \in \text{int } \gamma$, $1 \in \text{ext } \gamma$.

Příklad 10.45.

Vypočtete

a) $\int_0^{1+i} e^z dz;$

b) $\int_0^{1+i} z^3 dz;$

c) $\int_0^i z^2 \sin z dz;$

d) $\int_0^i z \sin z dz.$

Příklad 10.46.

Rozhodněte, zda daná řada konverguje

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (1+i)^n;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{3n-17}.$

Příklad 10.47.

Určete obor konvergence dané řady ¹

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n;$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n} \right).$

Příklad 10.48.

Určete poloměr konvergence dané mocninné řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{2011}};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z-1)^n;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}};$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{3^{n(n-i)}};$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n;$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos(in)) z^n;$

¹Tzn. najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která daná řada konverguje.

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n - 2)z^n;$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+8)!}.$$

Příklad 10.49.

Najděte součet dané mocninné řady v kruhu konvergence

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} nz^n;$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n+1};$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n - 2)z^n.$$

Příklad 10.50.

Najděte součet dané řady

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}.$$

Příklad 10.51.

Najděte Taylorovu řadu funkce f o středu z_0 a určete její poloměr konvergence, je-li

$$a) f(z) := \frac{z+1}{z^2+4z-5}, \quad z_0 = -1;$$

$$b) f(z) := \frac{z}{z^2+i}, \quad z_0 = 0;$$

$$c) f(z) := \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad z_0 = 0;$$

$$d) f(z) := e^{3z-2}, \quad z_0 = 1;$$

e) $f(z) := \sin(3z^2 + 2)$, $z_0 = 0$;

f) $f(z) := \frac{1}{(z-1)^3}$, $z_0 = 3$;

g) $f(z) := \sin^2 z$, $z_0 = 0$.

Příklad 10.52.

Určete obor konvergence dané Laurentovy řady ¹

a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$;

b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2+1}$.

Příklad 10.53.

Najděte Laurentovu řadu funkce f na daném „mezikruží“

a) $f(z) := \frac{\cos z}{z^2}$, $0 < |z| < 1$;

b) $f(z) := \frac{1}{z^2+1}$, $|z| > 1$;

c) $f(z) := \frac{z^2+1}{z(z-i)}$, $\frac{1}{2} < |z-i| < 1$;

d) $f(z) := \frac{1}{2z-5}$, $|z| > \frac{5}{2}$;

e) $f(z) := \frac{1}{z(z-2)}$, $1 < |z-2| < 2$;

f) $f(z) := \frac{z}{(z^2+1)^2}$, $0 < |z-i| < 2$;

g) $f(z) := \frac{z-\sin z}{z^4}$, $0 < |z| < \infty$;

h) $f(z) := \frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2 < |z-1| < \infty$;

i) $f(z) := \frac{1}{z(z-3)^2}$, $1 < |z-1| < 2$.

Příklad 10.54.

Najděte Laurentův rozvoj funkce f na všech „maximálních mezikruzích“ se středem z_0 , na nichž je f holomorfní, je-li

¹Tzn. najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která daná řada konverguje.

a) $f(z) := \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}, z_0 = 0;$

b) $f(z) := \frac{z+1}{z^2}, z_0 = 1 + i.$

Příklad 10.55.

Určete typ každé z izolovaných singularit funkce f , je-li

a) $f(z) := z^5 + 4z^3 - 2 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2};$

b) $f(z) := \frac{z^2 - 4}{z - 2};$

c) $f(z) := \frac{1}{z - z^3};$

d) $f(z) := \frac{z^4}{z^4 + 1};$

e) $f(z) := \frac{e^z}{z^2 + 4};$

f) $f(z) := \frac{z^2 + 4}{e^z};$

g) $f(z) := \frac{1 - e^z}{2 + e^z};$

h) $f(z) := e^{\frac{1}{z^2}};$

i) $f(z) := \frac{1}{(z-3)^2(2-\cos z)};$

j) $f(z) := \frac{z}{\sin z};$

k) $f(z) := z^2 \sin \frac{z}{z+1};$

l) $f(z) := \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}.$

Příklad 10.56.

Dokažte l'Hospitalovo pravidlo:

Nechť funkce f a g jsou holomorfní a nekonstantní na nějakém prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a nechť $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$.

Potom platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Příklad 10.57.

Vypočtete reziduum funkce f ve všech jejích izolovaných singularitách, je-li

a) $f(z) := \frac{1}{z+z^3};$

b) $f(z) := \frac{z^2}{(1+z)^3};$

c) $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)^3};$

d) $f(z) := \frac{z^3+1}{z-2};$

e) $f(z) := \frac{1}{z^6(z^2+1)^2};$

f) $f(z) := \operatorname{tg} z;$

g) $f(z) := \frac{1}{\sin z};$

h) $f(z) := \cot g^3 z;$

i) $f(z) := \sin z \sin \frac{1}{z};$

j) $f(z) := \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}.$

Příklad 10.58.

Vypočtěte pomocí reziduové věty daný integrál

a)

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad \text{kde } \gamma(t) := 3e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle;$$

b)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z+2} \cos \frac{1}{z} dz, \quad \text{kde } \gamma(t) := 18e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle;$$

c)

$$\int_k \frac{z^3}{z^4-1} dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\};$$

d)

$$\int_k \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\};$$

e)

$$\int_{\gamma} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz, \quad \text{kde } \gamma(t) := 2e^{-it}, \quad t \in \langle 0, 6\pi \rangle;$$

f)

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{2z^2 - i} dz,$$

kde γ je taková jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, že

$$\text{int } \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\};$$

g)

$$\int_k \frac{dz}{z^5(z^{10} - 2)}, \quad \text{kde } k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}.$$

Příklad 10.59.

Vypočtěte pomocí reziduové věty daný integrál ¹

a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \cos x};$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25};$$

c)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx;$$

d)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3} dx;$$

e)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x} dx;$$

f)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(2x)}{5 - 4 \cos x} dx;$$

g)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6};$$

¹Uvedené integrály je třeba chápat jako „reálné“ integrály z funkce *reálné* proměnné.

h)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

Literatura

- [1] J. Bouchala, O. Vlach *Křivkový a plošný integrál*, <http://mi21.vsb.cz/>, 2011.
- [2] J. Bouchala, P. Vodstrčil: *Řady*, <http://mi21.vsb.cz/>, 2011.
- [3] I. Černý: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.
- [4] I. Černý: *Základy analýsy v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1967.
- [5] M. Dont, B. Opic: *Matematická analýza III – úlohy*, skripta ČVUT, Praha, 1989.
- [6] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, R. Šulka: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 4*, Alfa, Bratislava, 1979.
- [7] P. Galajda, Š. Schrötter: *Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet*, Alfa, Bratislava, 1991.
- [8] I. Kľuvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika II.*, SVTL, Bratislava, 1965.
- [9] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky I a II*, Prometheus, Praha, 1995.
- [10] J. Veselý: *Komplexní analýza pro učitele*, Karolinum, Univerzita Karlova, Praha, 2001.

Rejstřík

- číslo komplexně sdružené, 1
- číslo komplexní, 1
 - absolutní hodnota, 1
 - argument, 3
 - hlavní hodnota argumentu, 4
 - imaginární část, 1
 - reálná část, 1
- derivace funkce
 - v bodě, 20
 - vyššího řádu, 23
- funkce
 - n -tá odmocnina, 13
 - exponenciální, 9
 - vlastnosti, 10
 - goniometrické, 10
 - vlastnosti, 10
 - harmonická, 23
 - harmonicky sdružené, 24
 - hlavní hodnota logaritmu, 12
 - holomorfní
 - na množině, 20
 - v bodě, 20
 - hyperbolické, 11
 - jednoznačná, 8
 - koefficient roztažnosti v bodě, 26
 - komplexní
 - imaginární část, 14
 - komplexní proměnné, 8
 - reálná část, 14
 - reálné proměnné, 8
 - konformní
 - na množině, 27
 - v bodě, 27
 - kořen, 53
 - p -násobný kořen, 53
 - lineární, 28
 - lineární lomená, 28
 - logaritmická, 11
 - mnohoznačná, 8
 - jednoznačná větev, 9
 - mocninné, 12
 - vlastnosti, 13
 - nekonečněznačná, 8
 - omezená, 52
 - primitivní, 36
 - úhel otočení v bodě, 26
- integrál
 - funkce komplexní proměnné, 31
 - funkce reálné proměnné, 30
- komponenta množiny, 19
- kruh konvergence mocninné řady, 46
- kružnice
 - zobecněná, 28
- křivka, 17
 - geometrický obraz, 17
 - v $\mathbb{C}$, 17
 - v $\mathbb{C}_\infty$, 17
 - v $\mathbb{R}^2$, 17
- limita
 - funkce komplexní proměnné, 15
 - funkce reálné proměnné, 17
 - posloupnosti, 6
 - posloupnosti funkcí
 - bodová, 43
 - stejněměrná, 43
- mezikružší konvergence Laurentovy řady, 56

- množina
 - otevřená, 5
 - parametrizace, 17
 - souvislá, 18
 - uzávěr, 18
 - uzavřená, 18
- množiny
 - konformně ekvivalentní, 27
 - oddělené, 18
- nekonečno, 4
 - operace s ∞ , 5
- nezávislost integrálu na cestě, 37
- oblast, 19
 - n -násobně souvislá, 19
 - jednoduše souvislá, 19
- obor konvergence mocninné řady, 47
- okolí bodu, 5
 - prstencové, 5
- podmínky
 - Cauchyho–Riemannovy, 21
- poloměr konvergence mocninné řady, 46
- posloupnost
 - částečných součtů řady, 40
 - komplexních čísel, 6
 - konvergentní, 6
 - omezená, 7
- reziduum funkce, 63
- rovina
 - Gaussova, 2
 - rozšířená Gaussova, 4
- řada
 - komplexních čísel, 40
 - absolutně konvergentní, 41
 - divergentní, 40
 - konvergentní, 40
 - neabsolutně konvergentní, 41
 - součet, 40
 - komplexních funkcí, 44
 - bodově konvergentní, 44
 - Laurentova, 55
 - Laurentova-hlavní část, 55
 - Laurentova-regulární část, 55
 - mocninná, 45
 - stejněměrně konvergentní, 44
 - Taylorova, 51
- singularita funkce
 - izolovaná, 59
 - odstranitelná, 59
 - podstatná, 59
 - pól
 - jednoduchý, 59
 - násobnosti n , 59
- součet řady, 40
- spojitost funkce komplexní proměnné, 16
 - na množině, 16
 - v bodě, 16
- spojitost funkce reálné proměnné, 17
 - na množině, 17
 - v bodě, 17
- věta
 - Abelova, 46, 50
 - Cauchyho, 32
 - Cauchyho integrální vzorce, 34
 - Jordanova, 30
 - Liouvillova, 52
 - Moreroova, 37
 - o konvergenci geometrické řady, 42
 - o konvergenci řady
 - Bolzanova–Cauchyho podmínka, 41
 - Cauchyho kritérium, 42
 - d’Alembertovo kritérium, 42
 - integrální kritérium, 42
 - Leibnizovo kritérium, 42
 - nutná podmínka, 41
 - srovnávací kritérium, 41
 - o rozvoji do Laurentovy řady, 57, 61
 - o rozvoji do Taylorovy řady, 51
 - reziduová, 65

- velká Picardova, 60
- Weierstrassova, 44
- Základní věta algebry, 53
- zobecněná Cauchyho, 33
- zobecněná Cauchyho pro vícenásobně
souvislou oblast, 33
- vnějšek křivky, 30
- vnitřek křivky, 30
- vzorec
 - Eulerův, 10