

Laplaceova transformace - studijní text pro cvičení v předmětu „Matematika - 2.“

Studijní materiál byl připraven pracovníky katedry E. Novákovou, M. Hyánkovou a L. Průchou za podpory grantu IG ČVUT č. 300012423 a v rámci rozvojového projektu MŠMT.

Obsah

1. Definice a základní vzorce
2. Zpětná Laplaceova transformace, předmět k racionální funkci
3. Laplaceova transformace impulsu
4. Zpětná transformace obrazu impulsu
5. Obraz periodické funkce
6. Řešení lineárních diferenciálních rovnic

Laplaceova transformace.

1. Definice a základní vzorce

Při řešení lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav s konstantními koeficienty můžeme použít integrální transformace, které nahrazují operace derivování a integrování násobením či dělením a vlastní řešení diferenciální rovnice je převedeno na řešení soustavy lineárních rovnic. Jedna z nejčastěji používaných integrálních transformací je tzv. *Laplaceova transformace*.

Připomeneme nejprve definici a základní vlastnosti Laplaceovy transformace, které při řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav používáme.

Definice Laplaceovy transformace. Je-li funkce $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, pak její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci $F(p)$, která je definována vztahem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

kde p je komplexní číslo. O funkci $f(t)$ mluvíme jako o *předmětu*, funkci $F(p)$ nazýváme *obrazem*. Přiřazení $f(t) \rightarrow F(p)$ nazýváme *přímou Laplaceovou transformací* a budeme ji značit symbolem $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Inverzní transformaci $F(p) \rightarrow f(t)$ nazýváme *zpětnou Laplaceovou transformací* a budeme ji označovat symbolem $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$. Vztah mezi předmětem a obrazem budeme někdy stručněji zapisovat pomocí symbolu $f(t) \triangleq F(p)$ či $F(p) \triangleq f(t)$.

Poznamenejme, že proměnná p je sice komplexní, ale při výpočtu běžných obrazů počítáme podle stejných pravidel jaká jsme používali při integrování a derivování reálných funkcí reálné proměnné. Při počítání obrazů můžeme předpokládat, že p je reálná kladná proměnná.

Uvedeme základní vlastnosti přímé a zpětné Laplaceovy transformace, které využíváme při řešení diferenciálních rovnic.

Přehled základních vzorců:

Linearita transformací.

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}\{f_i(t)\}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n a_i F_i(p)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}^{-1}\{F_i(p)\}.$$

Základní vztahy transformace.

Označme $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Předmět	Obraz
$f(t)$	$F(p)$
$f(t)e^{at}$	$F(p-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0+)$
$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - [p^{n-1}f(0+) + p^{n-2}f'(0+) + \dots + f^{(n-1)}(0+)]$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_p^\infty F(q)dq$
$\int_0^t f(z)dz$	$\frac{1}{p}F(p)$

Obraz konvoluce.

Konvolucí funkcí $f(t)$ a $g(t)$ nazýváme funkci

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

a označíme-li $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$, pak

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{(g * f)(t)\} = F(p)G(p).$$

Tabulka některých obrazů.

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
1	$\frac{1}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cosh \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t^2 e^{at}$	$\frac{2}{(p-a)^3}$	$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$

Řešené úlohy na přímou Laplaceovu transformaci.

Pomocí základních vztahů transformace a s využitím uvedených obrazů některých funkcí určete obraz $F(p)$ k předmětu $f(t)$.

1. $f(t) = 2 + 3te^{-2t} - 4t^2e^{-3t}$

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{3}{(p+2)^2} - \frac{4 \cdot 2}{(p+3)^3}$$

Použijeme linearitu, vztah $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = -2$, $a = -3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $t^2 \triangleq \frac{2}{p^3}$.

2. $f(t) = 3 \sin 2t - 5 \cos 2t$

$$F(p) = \frac{3 \cdot 2}{p^2+4} - \frac{5p}{p^2+4} = \frac{6-5p}{p^2+4}$$

Použijeme linearitu a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

3. $f(t) = 3t - \sin 2t$

$$F(p) = \frac{3}{p^2} - \frac{2}{p^2+4}$$

Použijeme linearitu transformace a vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

4. $f(t) = t^2 - 1 + 3e^{-t} + \cos 2t$

$$F(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{3}{p+1} + \frac{p}{p^2+4}$$

Použijeme linearitu a vzorce $t^n \triangleq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $e^{-2t} \triangleq \frac{1}{p+2}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

5. $f(t) = 4e^t + 2e^{-3t} + \sin 2t$

$$F(p) = \frac{4}{p-1} + \frac{2}{p+3} + \frac{2}{p^2+4}$$

Použijeme linearitu, vztah $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = 1$, $a = -3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

6. $f(t) = (2t+5)e^{-2t} + 3 \cos t - 2 \sin 3t$

$$F(p) = \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{5}{p+2} + \frac{3p}{p^2+1} - \frac{6}{p^2+9}$$

Použijeme linearitu, vztah $e^{-2t}f(t) \triangleq F(p+2)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

7. $f(t) = t(\sin 2t + 4 \cos 2t)$

$$F(p) = -\left(\frac{2}{p^2+4} + \frac{4p}{p^2+4}\right)' = \frac{4p^2+4p-16}{(p^2+4)^2}$$

Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

8. $f(t) = (t+2) \cos 3t$

$$F(p) = -\left(\frac{p}{p^2+9}\right)' + \frac{2p}{p^2+9} = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} + \frac{2p}{p^2+9} = \frac{2p^3+p^2+18p-9}{(p^2+9)^2}$$

Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorec $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

9. $f(t) = (3t^2 + 2t - 1)e^{-t} + (t+1) \sin 2t$

$$F(p) = \frac{6}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} - \left(\frac{2}{p^2+4}\right)' + \frac{2}{p^2+4} = \frac{6}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{2}{p^2+4}$$

Použijeme linearitu, vztahy $e^{-t}f(t) \triangleq F(p+1)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $t^2 \triangleq \frac{2}{p^3}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

10. $f(t) = te^{-3t} + (t-5) \cos 3t$

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2} - \left(\frac{p}{p^2+9}\right)' - \frac{5p}{p^2+9} = \frac{1}{(p+3)^2} + \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} - \frac{5p}{p^2+9}$$

Použijeme linearitu, vztahy $e^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

11. $f(t) = 3 \sin 3t \cos t$

Je $f(t) = \frac{3}{2}(\sin 4t + \sin 2t)$, tedy

$$F(p) = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{p^2+16} + \frac{2}{p^2+4} \right) = \frac{6}{p^2+16} + \frac{3}{p^2+4}$$

Použijeme linearitu a vzorce $\sin 4t \triangleq \frac{4}{p^2+16}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

12. $f(t) = 2e^{-3t} \cos 5t$

$$F(p) = \frac{2(p+3)}{(p+3)^2+25} = \frac{2p+6}{p^2+6p+34}$$

Použijeme vztah $e^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$ a vzorec $\cos 5t \triangleq \frac{p}{p^2+25}$.

13. $f(t) = e^{-2t}(3 \cos 3t - 4 \sin 3t)$

$$F(p) = \frac{3(p+2)}{(p+2)^2+9} - \frac{4 \cdot 3}{(p+2)^2+9} = \frac{3p-6}{p^2+4p+13}$$

Použijeme linearitu, vztah $e^{-2t}f(t) \triangleq F(p+2)$ a vzorce $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

14. $f(t) = te^{-3t} - 2e^{-2t} \sin 3t + 4$

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2} - \frac{6}{(p+2)^2+9} + \frac{4}{p}.$$

Použijeme linearitu, vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$ a vztah $f(t)e^{-at} \triangleq F(p-a)$, $a = -2$, $a = -3$.

15. $f(t) = t \sin 4t + (3te^{-2t})'$

$$F(p) = -\left(\frac{4}{p^2+16}\right)' + p \frac{3}{(p+2)^2} - \lim_{t \rightarrow 0+} (3te^{-2t}) = \frac{8p}{(p^2+16)^2} + \frac{3p}{(p+2)^2}$$

Použijeme linearitu, vztahy $tf(t) \triangleq -F'(p)$, $f'(t) \triangleq (pF(p) - f(0+))$ a vzorce $\sin 4t \triangleq \frac{4}{p^2+16}$, $te^{-2t} \triangleq \frac{1}{(p+2)^2}$.

16. $f(t) = e^{-3t}(1 - 2 \sin 3t) + \int_0^t e^{3u} \cos 3u du$

$$F(p) = \frac{1}{p+3} - \frac{6}{(p+3)^2+9} + \frac{1}{p} \frac{p-3}{(p-3)^2+9}$$

Použijeme linearitu, vztahy $f(t)e^{at} \triangleq F(p-a)$, $a = 3$, $a = -3$ a $\int_0^t f(u)du \triangleq \frac{1}{p}F(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$, $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

17. $f(t) = t \sinh 2t - 2 \cos^2 3t + 5$

Je $f(t) = t \sinh 2t - 1 - \cos 6t + 5$, tedy $F(p) = -\left(\frac{2}{p^2-4}\right)' + \frac{-1+5}{p} - \frac{p}{p^2+36} = \frac{4p}{(p^2-4)^2} + \frac{4}{p} - \frac{p}{p^2+36}$.

Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce

$$\sinh 2t \triangleq \frac{2}{p^2-4}, \quad 1 \triangleq \frac{1}{p} \quad \text{a} \quad \cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}.$$

18. $f(t) = 4t \sin t \cos t + (2e^{2t} \cosh^2 t - 4)'$

Je $2 \sin t \cos t = \sin 2t$ a $2 \cosh^2 t = 1 + \cosh 2t$, tudíž

$$f(t) = 2t \sin 2t + (e^{2t} + e^{2t} \cosh 2t - 4)'.$$

Odtud plyne $F(p) = -2\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' + p\left(\frac{1}{p-2} + \frac{2(p-2)}{(p-2)^2-4} - \frac{4}{p}\right) - \lim_{t \rightarrow 0+} (e^{2t} + e^{2t} \cosh 2t - 4) =$

$$\frac{8p}{(p^2+4)^2} + \frac{p}{p-2} + \frac{2(p-2)}{p-4} - 2.$$

Použijeme linearitu, vztahy $tf(t) \triangleq -F'(p)$, $f'(t) \triangleq pF(p) - f(0+)$, $e^{2t}f(t) \triangleq F(p-2)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cosh 2t \triangleq \frac{p}{p^2-4}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$.

19. $f(t) = e^{-3t} \cos(2t + \frac{\pi}{2}) + \sin 3(t - \pi)$

Je $\cos(2t + \frac{\pi}{2}) = \cos 2t \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2t \sin \frac{\pi}{2} = -\sin 2t$

a $\sin 3(t - \pi) = \sin 3t \cos 3\pi + \cos 3t \sin 3\pi = -\sin 3t$.

Je $f(t) = -e^{-3t} \sin 2t - \sin 3t$ tedy $F(p) = \frac{-2}{(p+3)^2+4} - \frac{3}{p^2+9}$.

Použijeme linearitu, vztah $e^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$ a vzorce

$$\sin \omega t \triangleq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \omega = 3, \quad \omega = 2.$$

20. $f(t) = 5 \cdot 2^{-t} - 4t3^t$

Je $f(t) = 5e^{-t \ln 2} - 4te^{t \ln 3}$, tudíž $F(p) = \frac{5}{p+\ln 2} - \frac{4}{(p-\ln 3)^2}$.

Použijeme linearitu, vztah $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = -\ln 2$, $a = \ln 3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$.

21. $f(t) = \int_0^t (2 + 4e^u \sinh 3u) du - (3^t - t \sinh 5t)'$

Je $F(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{2}{p} + \frac{4 \cdot 3}{(p-1)^2-9} \right) - p \left[\frac{1}{p-\ln 3} + \left(\frac{5}{p^2-25} \right)' \right] - \lim_{t \rightarrow 0+} (3^t - t \sinh 5t) =$

$$\frac{2}{p^2} + \frac{12}{p(p^2-2p-8)} - \frac{p}{p-\ln 3} - \frac{10p^2}{(p^2-25)^2} - 1.$$

Použijeme linearitu, vztahy $\int_0^t f(u) du \triangleq \frac{1}{p}F(p)$, $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = 1$, $a = \ln 3$, $f'(t) \triangleq pF(p) - f(0+)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sinh \omega t \triangleq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\omega = 3$, $\omega = 5$.

22. $f(t) = 6 \sin t \sinh 3t - 4t^3 - 2 \cos t \cosh t$

Je $f(t) = 3 \sin t(e^{3t} - e^{-3t}) - 4t^3 - \cos t(e^t + e^{-t})$, tedy

$$F(p) = \frac{3}{(p-3)^2+1} + \frac{3}{(p+3)^2+1} - 4 \frac{3!}{p^4} - \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} =$$

$$\frac{3}{p^2-6p+10} + \frac{3}{p^2+6p+10} - \frac{24}{p^4} - \frac{p-1}{p^2-2p+2} - \frac{p+1}{p^2+2p+2}.$$

Použijeme linearitu, vztah $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = 3$, $a = -3$, $a = 1$, $a = -1$ a vzorce $t^3 \triangleq \frac{3!}{p^4}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

23. $f(t) = (e^t \sinh t + t^3 e^{2t} - 6)' + 3 \int_0^t (u^4 - u \cos 2u) du$

Je $F(p) = p \left[\frac{1}{(p-1)^2-1} + \frac{3!}{(p-2)^4} - \frac{6}{p} \right] - \lim_{t \rightarrow 0+} (e^t \sinh t + t^3 e^{2t} - 6) + \frac{3}{p} \left[\frac{4!}{p^5} + \left(\frac{p}{p^2+4} \right)' \right] =$

$$\frac{p}{p^2-2p} + \frac{6p}{(p-2)^4} - 6 + 6 + \frac{72}{p^6} + \frac{3}{p} \frac{p^2+4-2p^2}{p^2+4} = \frac{1}{p-2} + \frac{6p}{(p-2)^4} + \frac{72}{p^6} + \frac{3(4-p^2)}{p(p^2+4)}.$$

Použijeme linearitu, vztahy $f'(t) \triangleq (pF(p) - f(0+))$, $\int_0^t f(u) du \triangleq \frac{1}{p}F(p)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$, $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = 1$, $a = 2$ a vzorce $t^3 \triangleq \frac{6}{p^4}$, $t^4 \triangleq \frac{4!}{p^5}$, $\sinh t \triangleq \frac{1}{p^2-1}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

24. $f(t) = 3 - 4 \int_0^t \sinh(t-u) \cos u du$

$$F(p) = \frac{3}{p} - 4 \left(\frac{1}{p^2-1} \frac{p}{p^2+1} \right) = \frac{3}{p} - \frac{4p}{(p^2-1)(p^2+1)}$$

Použijeme linearitu, větu o obrazu konvoluce $(f * g)(t) \triangleq F(p)G(p)$ a vzorce

$$1 \triangleq \frac{1}{p}, \quad \sinh t \triangleq \frac{1}{p^2-1}, \quad \cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}.$$

25. $f(t) = \int_0^t e^{u-t}(t-u) \sin 3u \, du$

Je $f(t) = \int_0^t e^{-(t-u)}(t-u) \sin 3u \, du = te^{-t} * \sin 3t$ a tedy

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} \frac{3}{p^2+9},$$

když použijeme vztah pro obraz konvoluce na funkce te^{-t} a $\sin 3t$ a vzorce $te^{-t} \triangleq \frac{1}{(p+1)^2}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

Neřešené úlohy na přímou Laplaceovu transformaci.

K dané funkci $f(t)$ nalezněte obraz $F(p)$.

$f(t)$	$F(p)$
1. $f(t) = 3t^2 - 5t + 1$	$[F(p) = \frac{6}{p^3} - \frac{5}{p^2} + \frac{1}{p}]$
2. $f(t) = 2e^t - 3e^{-2t} + 5e^{-t}$	$[F(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{3}{p+2} + \frac{5}{p+1}]$
3. $f(t) = te^{-2t} + t^2e^{-3t}$	$[F(p) = \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{2}{(p+3)^3}]$
4. $f(t) = 6te^{-2t} + 2e^{-t} + t^3e^{-4t}$	$[F(p) = \frac{6}{(p+2)^2} + \frac{2}{(p+1)} + \frac{6}{(p+4)^4}]$
5. $f(t) = 2 \sin t - 3 \cos t$	$[F(p) = \frac{2-3p}{p^2+1}]$
6. $f(t) = 3 \sin 2t + 4 \cos 2t$	$[F(p) = \frac{6+4p}{p^2+4}]$
7. $f(t) = 8t^2e^{-2t} + 3 \sin t$	$[F(p) = \frac{16}{(p+2)^3} + \frac{3}{p^2+1}]$
8. $f(t) = t \sin 2t$	$[F(p) = \frac{4p}{(p^2+4)^2}]$
9. $f(t) = t \cos 5t$	$[F(p) = \frac{p^2-25}{(p^2+25)^2}]$
10. $f(t) = e^{-3t} \sin 2t$	$[F(p) = \frac{2}{p^2+6p+13}]$
11. $f(t) = e^{-2t} \cos 2t$	$[F(p) = \frac{p+2}{p^2+4p+8}]$
12. $f(t) = (3t-1)e^{-2t}$	$[F(p) = \frac{1-p}{(p+2)^2}]$
13. $f(t) = (3+2t) \cos t$	$[F(p) = \frac{3p^3+2p^2+3p-2}{(p^2+1)^2}]$
14. $f(t) = (1-t) \sin 5t$	$[F(p) = \frac{5p^2-10p+125}{(p^2+25)^2}]$
15. $f(t) = te^{3t} \sin 2t$	$[F(p) = \frac{4(p-3)}{(p^2-6p+13)^2}]$
16. $f(t) = (2t-3)e^{-2t} \cos 4t$	$[F(p) = \frac{-3p^3-16p^2-76p-144}{(p^2+4p+20)^2}]$
17. $f(t) = (1-2t)e^{3t} \sin t$	$[F(p) = \frac{p^2-10p+22}{(p^2-6p+10)^2}]$
18. $f(t) = t^2 \sin 2t$	$[F(p) = \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3}]$
19. $f(t) = t^2 \cos 3t$	$[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3}]$
20. $f(t) = 4 \sin^2 3t + te^{3t} \cos 2t$	$[F(p) = \frac{72}{p(p^2+36)} + \frac{p^2-6p+5}{(p^2-6p+13)^2}]$
21. $f(t) = \sin 3t \cosh 2t - \cos 3t \sinh 2t$	$[F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{5-p}{p^2-4p+13} + \frac{5+p}{p^2+4p+13} \right)]$
22. $f(t) = 2 + e^{-3t} \cos t \cos 3t$	$[F(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2} \left(\frac{p+3}{p^2+6p+25} + \frac{p+3}{p^2+6p+13} \right)]$
23. $f(t) = (e^{-t} \sinh t + t^4 e^{2t} - 2 \cosh 3t)'$	$[F(p) = p \left(\frac{1}{p^2+2p} + \frac{24}{(p-2)^5} - \frac{2p}{p^2-9} \right) + 2]$
24. $f(t) = (3^t - 2 \sin t \sinh 2t + 4)'$	$[F(p) = p \left(\frac{1}{p-\ln 3} - \frac{1}{p^2-4p+5} + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2+4p+5} \right) - 7]$
25. $f(t) = \int_0^t (4 - 6u \cos^2 3u + 8 \sin 2u \cos 2u) du$	$[F(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{4}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{3(36-p^2)}{(p^2+36)^2} + \frac{16}{p^2+16} \right)]$
26. $f(t) = 4e^{-t} + 3e^{-3t} + 5 \sin 2t$	$[F(p) = \frac{4}{p+1} + \frac{3}{p+3} + \frac{10}{p^2+4}]$
27. $f(t) = (1+3t)e^{-2t} + 4 \cos 2t - 2 \sin 2t$	$[F(p) = \frac{3}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{4p}{p^2+4} - \frac{4}{p^2+4}]$
28. $f(t) = \sin 2t \sin 3t$	$[F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+25} \right)]$
29. $f(t) = ta^t, \quad a > 0$	$[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2}, \quad a^t = e^{t \ln a}]$
30. $f(t) = 3 \cos^2 2t$	$[F(p) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+16} \right)]$

31. $f(t) = 4 \cos 2t \cos 3t$ $[F(p) = \frac{4p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}]$
32. $f(t) = 6 \sin 3t \cos t$ $[F(p) = \frac{18(p^2+8)}{(p^2+16)(p^2+4)}]$
33. $f(t) = 5 \sin 4t \sin t$ $[F(p) = \frac{40p}{(p^2+9)(p^2+25)}]$
34. $f(t) = 4e^{-2t} \sin^2 3t$ $[F(p) = \frac{72}{(p+2)(p^2+4p+40)}]$
35. $f(t) = 3e^{-t} \cos^2 2t$ $[F(p) = \frac{3(2p^2+3p+17)}{2(p+1)(p^2+2p+17)}]$

2. Zpětná Laplaceova transformace, předmět k racionální funkci.

Hledáme funkci $f(t)$, pro kterou je $F(p) \triangleq f(t)$, (tedy $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$) a $F(p)$ je racionální funkce. Poznamenejme, že z vlastností Laplaceovy transformace vyplývá, že ve funkci $F(p)$ je stupeň čitatele alespoň o jednu menší než stupeň jmenovatele.

Popis algoritmu.

Funkci $F(p)$ rozložíme na součet parciálních zlomků a k jednotlivým sčítancům najdeme předměty pomocí vztahů a vzorců, které jsme uvedli v prvním odstavci. Zde se omezíme na nejjednodušší případy. Budeme uvažovat, že jmenovatel funkce $F(p)$ má komplexní kořeny násobnosti nejvýše 2. Pro reálné kořeny není třeba nějaké omezení uvažovat.

V rozkladu racionální funkce dostaneme jako jeho členy zlomky těchto tvarů:

$\frac{A}{p-a}$ pro reálný jednoduchý kořen $p = a$.

$\frac{A}{(p-a)^2}$ pro dvojnásobný reálný kořen $p = a$.

$\frac{A}{(p-a)^n}$ pro reálný kořen $p = a$ násobnosti $n, n \geq 1$.

$\frac{Ap+B}{p^2+\omega^2}$ pro ryze imaginární dvojici jednoduchých kořenů $p = \pm j\omega$.

$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+\omega^2}$ pro dvojici jednoduchých komplexních kořenů $p = a \pm j\omega$, $a \neq 0$.

$\frac{Ap+B}{[p^2+\omega^2]^2}$ pro ryze imaginární dvojici dvojnásobných kořenů $p = \pm j\omega$.

$\frac{Ap+B}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$ pro dvojici dvojnásobných komplexních kořenů $p = a \pm j\omega$, $a \neq 0$.

Uvedeme základní vzorce, které budeme při výpočtu předmětu používat.

Přehled vzorců

Je $a \in R$, $b > 0$ a $\omega > 0$.

$F(p)$	$f(t)$
1. $\frac{1}{p-a}$	e^{at}
2. $\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
3. $\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}$
4. $\frac{1}{(p-a)^n}, n \in N$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
5. $\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
6. $\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
7. $\frac{1}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
8. $\frac{p}{(p-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}(\cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t)$
9. $\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
10. $\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$
11. $\frac{1}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} e^{at}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
12. $\frac{p}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} e^{at}(\omega^2 t \sin \omega t + a \sin \omega t - a\omega t \cos \omega t)$
13. $\frac{1}{p^2-b^2}$	$\frac{1}{b} \sinh bt$
14. $\frac{p}{p^2-b^2}$	$\cosh bt$

Řešené úlohy na zpětnou Laplaceovu transformaci.

Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+3}$

Rovnice $p^2 + 4p + 3 = 0$ má dva reálné kořeny $p_1 = -3$ a $p_2 = -1$. Je tedy

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+3} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+1}.$$

Rovnici vynásobíme jmenovatelem a pro neurčité koeficienty A a B dostaneme rovnici

$$2p + 3 = A(p + 1) + B(p + 3).$$

Dosadíme hodnoty kořenů $p_1 = -3$ a $p_2 = -1$ a dostaneme:

$$p = -3: \quad -3 = -2A \Rightarrow A = \frac{3}{2};$$

$$p = -1: \quad 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Je tedy $F(p) = \frac{3}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}$, a tudíž

$$f(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace a vztah $\frac{1}{p-a} \triangleq e^{at}$ pro $a = -1$ a $a = -3$.

2. $F(p) = \frac{3p^2+2p-4}{p^3+7p^2+10p}$

Rovnice $p^3 + 7p^2 + 10p = 0$ má kořeny $p_1 = 0$, $p_2 = -2$ a $p_3 = -5$ a tudíž je

$$F(p) = \frac{3p^2+2p-4}{p(p+2)(p+5)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+5}$$

Rovnici vynásobíme jmenovatelem a pro neurčité koeficienty dostaneme rovnici:

$$3p^2 + 2p - 4 = A(p+2)(p+5) + Bp(p+5) + Cp(p+2).$$

Do rovnice postupně dosadíme hodnoty kořenů jmenovatele a dostaneme:

$$p = 0: \quad -4 = 7A \Rightarrow A = -\frac{4}{7};$$

$$p = -2: \quad 4 = -6B \Rightarrow B = -\frac{2}{3};$$

$$p = -5: \quad 61 = 15C \Rightarrow C = \frac{61}{15}.$$

Je tedy

$$F(p) = -\frac{4}{7} \frac{1}{p} - \frac{2}{3} \frac{1}{p+2} + \frac{61}{15} \frac{1}{p+5} \quad \text{a tudíž je}$$

$$f(t) = -\frac{4}{7} - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{61}{15}e^{-5t}, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace a vztah $\frac{1}{p-a} \triangleq e^{at}$ pro $a = 0$, $a = -2$ a $a = -5$.

3. $F(p) = \frac{3p^2+5}{(p+1)(p+3)^2}$

Jmenovatel má jednoduchý kořen $p = -1$ a dvojnásobný kořen $p = -3$. Pro funkci $F(p)$ dostaneme rozklad ve tvaru

$$\frac{3p^2+5}{(p+1)(p+3)^2} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+3)^2} + \frac{C}{p+3}$$

Po vynásobení jmenovatelem dostaneme pro neurčité koeficienty rovnici

$$(\clubsuit) \quad 3p^2 + 5 = A(p+3)^2 + B(p+1) + C(p+1)(p+3).$$

Dosadíme hodnoty kořenů jmenovatele a dostaneme:

$$p = -1: \quad 8 = 4A \Rightarrow A = 2;$$

$$p = -3: \quad 32 = -2B \Rightarrow B = -16.$$

Hodnotu C určíme dosazením některé jiné hodnoty do rovnice $(\clubsuit)$ a nebo porovnáním koeficientů u některé mocniny proměnné p . Připomeňme, že volíme nejvyšší nebo nejnižší mocniny. Ty obvykle mají jednodušší vyjádření. Zvolíme mocninu p^2 a dostaneme podmínku:

$$p^2: \quad 3 = A + C \Rightarrow C = 3 - A = 3 - 2 = 1.$$

Je tedy $F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{16}{(p+3)^2} + \frac{1}{p+3}$ a tudíž

$$f(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}(1 - 16t), \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $\frac{1}{p-a} \triangleq e^{at}$ pro $a = -1$, $a = -3$ a $\frac{1}{(p+3)^2} \triangleq te^{-3t}$.

$$4. \quad F(p) = \frac{4p+7}{p^2+16}$$

Je

$$\frac{4p+7}{p^2+16} = 4 \frac{p}{p^2+16} + \frac{7}{4} \frac{4}{p^2+16}$$

a tudíž

$$f(t) = 4 \cos 4t + \frac{7}{4} \sin 4t, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $\frac{4}{p^2+16} \triangleq \sin 4t$ a $\frac{p}{p^2+16} \triangleq \cos 4t$.

$$5. \quad F(p) = \frac{2p-7}{(p+6)(p^2+4)}$$

Pro funkci $F(p)$ dostaneme rozklad na zlomky ve tvaru

$$\frac{2p-7}{(p+6)(p^2+4)} = \frac{A}{p+6} + \frac{Bp+C}{p^2+4}.$$

Po vynásobení jmenovatelem získáme pro neurčité koeficienty rovnici

$$(\spadesuit) \quad 2p - 7 = A(p^2 + 4) + (Bp + C)(p + 6).$$

Po dosazení hodnoty $p = -6$ do rovnice $(\spadesuit)$ dostaneme

$$p = -6: \quad -19 = 40A \Rightarrow A = -\frac{19}{40}.$$

Zbývající koeficienty určíme opět porovnáním vhodné mocniny proměnné p v rovnici $(\spadesuit)$.

Postupně získáme:

$$p^2: \quad 0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{19}{40};$$

$$p^0: \quad -7 = 4A + 6C \Rightarrow C = \frac{1}{6} \left(-7 + \frac{19}{10} \right) = -\frac{51}{60}.$$

Je tedy

$$F(p) = -\frac{19}{40} \frac{1}{p+6} + \frac{19}{40} \frac{p}{p^2+4} - \frac{51}{120} \frac{2}{p^2+4}$$

a tudíž

$$f(t) = -\frac{19}{40} e^{-6t} + \frac{19}{40} \cos 2t - \frac{51}{120} \sin 2t, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $\frac{1}{p+6} \triangleq e^{-6t}$ a $\frac{2}{p^2+4} \triangleq \sin 2t$,

$$\frac{p}{p^2+4} \triangleq \cos 2t.$$

$$6. \quad F(p) = \frac{4p+5}{p^2+4p+13}$$

Rovnice $p^2 + 4p + 13 = 0$ má komplexní kořeny. Lze tedy jmenovatele upravit na tvar

$$p^2 + 4p + 13 = p^2 + 4p + 4 + 9 = (p+2)^2 + 9$$

a tedy

$$\frac{4p+5}{p^2+4p+13} = \frac{4(p+2)}{(p+2)^2+9} + \frac{5-8}{(p+2)^2+9}.$$

Odtud plyne, že $f(t) = e^{-2t}(4 \cos 3t - \sin 3t)$, $t \geq 0$.

Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $F(p+2) \triangleq f(t)e^{-2t}$ a $\frac{3}{p^2+9} \triangleq \sin 3t$

$$\frac{p}{p^2+9} \triangleq \cos 3t.$$

7. $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)^4}$

Je

$$\frac{p+2}{(p+1)^4} = \frac{(p+1)+1}{(p+1)^4} = \frac{1}{(p+1)^3} + \frac{1}{(p+1)^4},$$

tedy

$$F(p) = \frac{1}{2} \frac{2!}{(p+1)^3} + \frac{1}{6} \frac{3!}{(p+1)^4}.$$

Odtud plyne, že

$$f(t) = \frac{1}{3}t^2e^{-t} + \frac{1}{6}t^3e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p+1) \triangleq f(t)e^{-t}$ a vzorce $\frac{2}{p^3} \triangleq t^2$ a $\frac{6}{p^4} \triangleq t^3$.

8. $F(p) = \frac{p^3}{(p+2)^2(p+1)(p+3)}$

Nejprve rozložíme funkci $F(p)$ na součet parciálních zlomků. Příslušný rozklad má tvar

$$\frac{p^3}{(p+2)^2(p+1)(p+3)} = \frac{A}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+3}.$$

Po vynásobení rovnosti jmenovatelem dostaneme pro neurčité koeficienty rovnici

$$(\clubsuit) \quad p^3 = A(p+1)(p+3) + B(p+2)(p+1)(p+3) + C(p+2)^2(p+3) + D(p+2)^2(p+1).$$

Dosadíme do této rovnice hodnoty kořenů jmenovatele a dostaneme:

$$p = -2: \quad -8 = -A \Rightarrow A = 8;$$

$$p = -1: \quad -1 = 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2};$$

$$p = -3: \quad -27 = -2D \Rightarrow D = \frac{27}{2}.$$

Jestliže dosadíme do rovnice $(\clubsuit)$ hodnotu $p = 0$, získáme podmínku pro poslední z koeficientů. Je

$$0 = 3A + 6B + 12C + 4D \Rightarrow B = -\frac{1}{6}(24 - 6 + 54) = -12.$$

Je

$$F(p) = \frac{8}{(p+2)^3} - \frac{12}{p+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{27}{2} \frac{1}{p+3},$$

tudíž

$$f(t) = 8te^{-2t} - 12e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{27}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p-a) \triangleq f(t)e^{at}$, $a = -2$, $a = -1$, $a = -3$ a vzorce $\frac{1}{p^2} \triangleq t$ a $\frac{1}{p} \triangleq 1$.

9. $F(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}$

Danou funkci rozložíme na parciální zlomky. Rozklad má tvar

$$\frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{C}{p+2}$$

a po vynásobení jmenovatelem dpstaneme pro neurčité koeficienty rovnici

$$(\spadesuit) \quad 1 = A(p+2)^2 + Bp + Cp(p+2).$$

Do této rovnice dosadíme hodnoty kořenů jmenovatele a postupně dostaneme:

$$p = 0; \quad 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4};$$

$$p = -2; \quad 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Dosadíme-li do rovnice $(\spadesuit)$ některou jinou hodnotu, např. $p = 1$, dostaneme vztah

$$1 = 9A + B + 3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}(1 - 9A - B) = \frac{1}{3}(1 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Je tedy } F(p) = \frac{1}{4} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \frac{1}{(p+2)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{p+2},$$

tudíž

$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p+2) \triangleq e^{-2t}f(t)$ a vzorce $\frac{1}{p} \triangleq 1$, $\frac{1}{p^2} \triangleq t$.

Úlohu můžeme řešit také jinak, jestliže použijeme vztah $\frac{1}{p}F(p) \triangleq \int_0^t f(u)du$.

Je $\frac{1}{(p+2)^2} \triangleq te^{-2t}$ a tedy

$$\frac{1}{p} \frac{1}{(p+2)^2} \triangleq \int_0^t ue^{-2u}du = \left[-\frac{1}{2}ue^{-2u} - \frac{1}{4}e^{-2u}\right]_0^t = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}, \quad t \geq 0.$$

10. $F(p) = \frac{p^2}{(p-2)^3}$

Danou funkci nejprve vyjádříme jako součet parciálních zlomků. Zde můžeme rozklad získat jednoduchou úpravou. Je

$$\frac{p^2}{(p-2)^3} = \frac{(p^2-4p+4)+4p-4}{(p-2)^3} = \frac{(p-2)^2+4(p-2)+4}{(p-2)^3} = \frac{1}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2} + \frac{4}{(p-2)^3},$$

tudíž

$$f(t) = e^{2t}(1 + 4t + 2t^2), \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p-2) \triangleq e^{2t}f(t)$ a vzorce $\frac{1}{p} \triangleq 1$, $\frac{1}{p^2} \triangleq t$, $\frac{2}{p^3} \triangleq t^2$.

11. $F(p) = \frac{p-5}{p^2+2p+10}$

Polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny a proto danou funkci upravíme takto:

$$\frac{p-5}{p^2+2p+10} = \frac{p-5}{(p^2+2p+1)+9} = \frac{(p+1)-6}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+9} - 2 \frac{3}{(p+1)^2+9}.$$

Je pak

$$f(t) = e^{-t}(\cos 3t - 2 \sin 3t), \quad t \geq 0,$$

jestliže použijeme vztah $F(p+1) \triangleq e^{-t}f(t)$ a vzorce $\frac{p}{p^2+9} \triangleq \cos 3t$, $\frac{3}{p^2+9} \triangleq \sin 3t$.

12. $F(p) = \frac{p+3}{p(p^2+1)} + \frac{1}{(p-2)^3}$

První ze dvou zlomků rozdělíme na součet a získáme:

$$\frac{p+3}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p} \frac{3}{p^2+1} + \frac{1}{(p-2)^3}.$$

Odtud plyne, že

$$f(t) = \sin t + 3 \int_0^t \sin u du + \frac{1}{2}t^2e^{2t} = \sin t + 3 - 3 \cos t + \frac{1}{2}t^2e^{2t}, \quad t \geq 0.$$

Použijeme linearitu transformace a vzorce $\frac{1}{p^2+1} \triangleq \sin t$, $\frac{1}{(p-2)^3} \triangleq \frac{1}{2}t^2e^{2t}$.

Neřešené úlohy na zpětnou Laplaceovu transformaci.

Určete předmět $f(t)$ k racionální funkci $F(p)$.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $F(p) = \frac{p^2+1}{p^3+3p^2+2p}$ | $[f(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-2t} - 2e^{-t}, \quad t \geq 0]$ |
| 2. $F(p) = \frac{1}{p(p+3)^2}$ | $[f(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}, \quad t \geq 0]$ |
| 3. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$ | $[f(t) = \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{9}e^t + \frac{1}{9}e^{-2t}, \quad t \geq 0]$ |
| 4. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ | $[f(t) = t - \sin t, \quad t \geq 0]$ |
| 5. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$ | $[f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}, \quad t \geq 0]$ |
| 6. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5}$ | $[f(t) = e^{-2t} \sin t, \quad t \geq 0]$ |
| 7. $F(p) = \frac{4p-3}{p^2-2p+5}$ | $[f(t) = e^t(4 \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t), \quad t \geq 0]$ |

8. $F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4}$	$[f(t) = 2 \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t, t \geq 0]$
9. $F(p) = \frac{3p+4}{p^2+2p+10}$	$[f(t) = e^{-t}(3 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t), t \geq 0]$
10. $F(p) = \frac{3p-5}{p^2+2p+5}$	$[f(t) = e^{-t}(3 \cos 2t - 4 \sin 2t), t \geq 0]$
11. $F(p) = \frac{6p+3}{p^3+5p^2+9p+5}$	$[f(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}(\cos t + 5 \sin t), t \geq 0]$
12. $F(p) = \frac{4p-3}{p^2(p+1)^2(p+2)}$	$[f(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{23}{4} - 7te^{-t} - 3e^{-t} - \frac{11}{4}e^{-2t}, t \geq 0]$
13. $F(p) = \frac{2p+3}{(p^2+4)^2}$	$[f(t) = -\frac{3}{8}t \cos 2t + \frac{1}{2}t \sin 2t + \frac{3}{16} \sin 2t, t \geq 0]$
14. $F(p) = \frac{2p^2-4p+5}{p^3+7p^2+9p+8}$	$[f(t) = \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{21}{2}e^{-2t} + \frac{43}{6}e^{-4t}, t \geq 0]$
15. $F(p) = \frac{4p+5}{p^2+6p+13}$	$[f(t) = e^{-3t}(4 \cos 2t - \frac{7}{2} \sin 2t, t \geq 0]$
16. $F(p) = \frac{3p^2-6p+2}{(p+1)^3(p+3)}$	$[f(t) = \frac{11}{2}t^2e^{-t} - \frac{35}{4}te^{-t} + \frac{47}{8}e^{-t} - \frac{47}{8}e^{-3t}, t \geq 0]$
17. $F(p) = \frac{2p^2-3p+5}{p(p+1)(p+3)}$	$[f(t) = \frac{5}{3} - 5e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-3t}, t \geq 0]$
18. $F(p) = \frac{4p+6}{p^3+7p^2+10p}$	$[f(t) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{14}{15}e^{-5t}, t \geq 0]$
19. $F(p) = \frac{5p-2}{p^2+4p+5}$	$[f(t) = e^{-2t}(5 \cos t - 12 \sin t), t \geq 0]$
20. $F(p) = \frac{2p+3}{(p+1)^3}$	$[f(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2t)e^{-t}, t \geq 0]$
21. $F(p) = \frac{p+3}{p^2(p^2+1)}$	$[f(t) = 3t + 1 - \cos t - 3 \sin t, t \geq 0]$
22. $F(p) = \frac{5p^2+10}{p(p^2-2p+5)}$	$[f(t) = 2 + e^t(3 \cos 2t + \frac{7}{2} \sin 2t), t \geq 0]$
23. $F(p) = \frac{p^2+p-4}{(p+4)^2}$	$[f(t) = \frac{1}{2}t \sin 2t + t \cos 2t, t \geq 0]$
24. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+3}$	$[f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}, t \geq 0]$

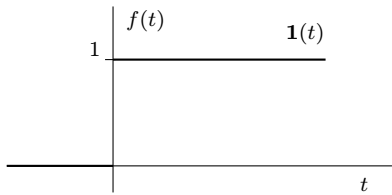
3. Laplaceova transformace impulsu.

Při hledání obrazu funkce $f(t)$, která je definována na omezeném intervalu nebo je dána několika vzorci na různých intervalech ze svého definičního oboru používáme při výpočtu přímo vzorec pro obraz a nebo používáme tvrzení o obrazu posunuté funkce. Toto tvrzení se nazývá *věta o translaci*.

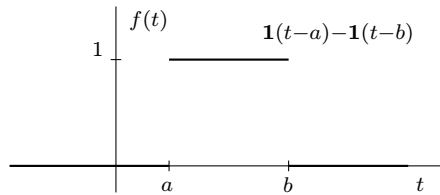
Označíme symbolem $\mathbf{1}(t)$ funkci jednotkový skok, která je definována předpisem

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0 \end{cases}$$

a jejíž průběh je znázorněn na obrázku 1.



Obr.1. Jednotkový skok



Obr. 2. Impuls

Věta o translaci. Je-li $f(t) \triangleq F(p)$, pak $f(t-a)\mathbf{1}(t-a) \triangleq e^{-ap}F(p)$ pro $a > 0$.

Ukážeme na příkladech výpočet obrazu funkcí popsaného typu. Připomeňme, že stále předpokládáme, že uvažované předměty jsou definovány pouze pro nezápornou hodnotu argumentu.

Řešené příklady na obraz impulsu.

1. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

Podle definice je

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \int_0^2 1 \cdot e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^2 = \frac{1}{p}(1 - e^{-2p}).$$

Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu.

$$\text{Je } f(t) = 2 \cdot [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)] \triangleq \frac{2}{p}(1 - e^{-2p}),$$

$$\text{když použijeme vzorec } 1 \triangleq \frac{1}{p} \text{ a vztah } f(t-2)\mathbf{1}(t-2) \triangleq F(p)e^{-2p}.$$

2. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$

Podle definice je

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \int_0^3 te^{-pt} dt = \left[-t \frac{e^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \right]_0^3 = \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p}e^{-3p} - \frac{1}{p^2}e^{-3p},$$

když použijeme integraci per-partes.

Pomocí věty o translaci a vzorce pro obraz $t \triangleq \frac{1}{p^2}$ můžeme počítat takto.

Je

$$f(t) = t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-3)] = t\mathbf{1}(t) - [(t-3) + 3]\mathbf{1}(t-3) = t\mathbf{1}(t) - (t-3)\mathbf{1}(t-3) - 3\mathbf{1}(t-3).$$

Odtud plyne, že

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-3p} - \frac{3}{p}e^{-3p},$$

$$\text{když použijeme vzorce } 1 \triangleq \frac{1}{p}, t \triangleq \frac{1}{p^2} \text{ a vztah } f(t-3)\mathbf{1}(t-3) \triangleq F(p)e^{-3p}.$$

V dalších úlohách budeme hledat obraz impulsu pomocí věty o translaci. Přímý výpočet z definice využívá integračních metod, které byly probírány v předchozím kursu matematiky.

3. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-t}, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

Je

$$f(t) = e^{-t}[\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)] = e^{-(t-1)-1}\mathbf{1}(t-1) - e^{-(t-2)-2}\mathbf{1}(t-2) = e^{-1}e^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1) - e^{-2}e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2).$$

Podle věty o translaci je

$$F(p) = (e^{-1}e^{-p} - e^{-2}e^{-2p})\frac{1}{p+1},$$

$$\text{když použijeme vzorec } e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}.$$

4. $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Je

$$f(t) = \cos t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] + \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}).$$

Nejprve upravíme výraz

$$\cos t\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) = \cos[(t - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}]\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) =$$

$$\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) \left(\cos(t - \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(t - \frac{\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{2}) \right) = -\sin(t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}).$$

Pro funkci $f(t)$ máme celkové vyjádření

$$f(t) = \cos t \mathbf{1}(t) + \sin(t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) + \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}).$$

Použijeme větu o translaci a dostaneme obraz

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} e^{-p\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{p} e^{-p\frac{\pi}{2}}.$$

Při výpočtu jsme použili vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$.

$$5. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \pi, \\ -\sin t, & \pi < t \leq 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi. \end{cases}$$

Je

$$f(t) = -\sin t [\mathbf{1}(t - \pi) - \mathbf{1}(t - 2\pi)] = -\sin[(t - \pi) + \pi] \mathbf{1}(t - \pi) + \sin[(t - 2\pi) + 2\pi] \mathbf{1}(t - 2\pi) = \sin(t - \pi) \mathbf{1}(t - \pi) + \sin(t - 2\pi) \mathbf{1}(t - 2\pi).$$

Odtud plyne, že

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} (e^{-p\pi} + e^{-2p\pi}),$$

když použijeme větu o translaci a vzorec $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

$$6. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin 2t, & \frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Je

$$f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{4}) + \sin 2t [\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{4}) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{4}) + \sin 2[(t - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}] \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{4}) - \sin 2[(t - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}] \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{4}) + \cos 2(t - \frac{\pi}{4}) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{4}) + \sin 2(t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}).$$

Odtud plyne, že obraz

$$F(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{\frac{\pi}{4}}) + \frac{p}{p^2+4} e^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{p^2+4} e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Použijeme větu o translaci a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

$$7. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Je } f(t) &= t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)] + (2-t)[\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)] = \\ &= t\mathbf{1}(t) - [(t-1) + 1]\mathbf{1}(t-1) - [(t-1) - 1]\mathbf{1}(t-1) + (t-2)\mathbf{1}(t-2) = \\ &= t\mathbf{1}(t) - 2(t-1)\mathbf{1}(t-1) + (t-2)\mathbf{1}(t-2). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že obraz

$$F(p) = \frac{1}{p^2} (1 - 2e^{-p} + e^{-2p}),$$

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $t \triangleq \frac{1}{p^2}$.

$$8. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Je } f(t) &= \sin t [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)] = \sin t \mathbf{1}(t) - \sin[(t - \pi) + \pi] \mathbf{1}(t - \pi) = \\ &= \sin t \mathbf{1}(t) + \sin(t - \pi) \mathbf{1}(t - \pi). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1}(1 + e^{-p\pi}),$$

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

$$9. f(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

$$\text{Je } f(t) = (1 - \cos t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)] =$$

$$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi) - \cos t \mathbf{1}(t) + \cos[(t - \pi) + \pi] \mathbf{1}(t - \pi) =$$

$$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi) - \cos t \mathbf{1}(t) - \cos(t - \pi) \mathbf{1}(t - \pi).$$

Odtud plyne, že

$$F(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\pi}) - \frac{p}{p^2+1}(1 + e^{-p\pi}),$$

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

Neřešené úlohy na obraz impulsu.

Určete obraz $F(p)$ k danému impulsu $f(t)$.

$$1. f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & 2 < t. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{2}{p}(1 - e^{-p})]$$

$$2. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{1}{p}(e^{-p} - e^{-3p})]$$

$$3. f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{1}{p+1}(1 - e^{-2(p+1)})]$$

$$4. f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2, & t > 1. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{2}{p^2}(1 - e^{-p})]$$

$$5. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}) - \frac{1}{p}e^{-p}]$$

$$6. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})]$$

$$7. f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 3 - t, & 1 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{1}{p^2}(2 - 3e^{-p} + e^{-3p})]$$

$$8. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 2, \\ 3 - t, & 2 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p})]$$

$$9. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad [F(p) = \frac{1}{p^2+1}(1 - pe^{-p\frac{\pi}{2}})]$$

$$10. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t, & 1 < t \leq 3, \\ t-4, & 3 < t \leq 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases} [F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + 2e^{-3p} - e^{-4p})]$$

4. Zpětná transformace obrazů impulsů.

Při hledání předmětu k funkcím, které obsahují výraz e^{-ap} , $a > 0$, používáme větu o translaci, kterou interpretujeme takto. Rozdělíme danou funkci na součet členů tvaru $F(p)e^{-ap}$, kde k funkci $F(p)$ známe předmět. Je-li $f(t) \triangleq F(p)$, pak hledaný předmět k funkci $F(p)e^{-ap}$ je funkce $f(t-a)\mathbf{1}(t-a)$, $t \geq 0$. Výraz e^{-ap} je pouze návěští, které nás upozorňuje na to, že v získaném předmětu provedeme posunutí. Ukážeme způsob výpočtu na příkladech.

Řešené úlohy na zpětnou transformaci funkcí s faktorem e^{-ap} .

Nalezněte předmět $f(t)$ k dané funkci $F(p)$.

$$1. F(p) = \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-3p}$$

Je $\frac{1}{p^2} \triangleq t$ a $\frac{1}{p} \triangleq 1$, tudíž pro předmět k funkci $F(p)$ dostaneme vyjádření

$$f(t) = (t-2)\mathbf{1}(t-2) + \mathbf{1}(t-3), \quad t \geq 0.$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2, \\ t-2, & 2 < t \leq 3, \\ t-1, & t > 3. \end{cases}$$

$$2. F(p) = \frac{2}{p(p-1)}e^{-p}$$

Nejprve funkci $\frac{1}{p(p-1)}$ rozložíme na součet částečných zlomků. Dostaneme (viz odst. 2)

$$\frac{2}{p(p-1)} = \frac{-2}{p} + \frac{2}{p-1}$$

a tedy

$$f(t) = -2\mathbf{1}(t-1) + 2e^{t-1}\mathbf{1}(t-1), \quad t \geq 0,$$

jestliže použijeme vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $e^t \triangleq \frac{1}{p-1}$ a větu o translaci ($a = 1$).

$$\text{Funkci } f(t) \text{ lze také zapsat } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2(e^{t-1} - 1), & t > 1. \end{cases}$$

$$3. F(p) = \frac{2p - e^{-\pi p}}{p^2 + 2p + 2}$$

Obdobně jako v odstavci 2 dostaneme:

$$\frac{2p}{p^2 + 2p + 2} = \frac{2(p+1)}{(p+1)^2 + 1} - \frac{2}{(p+1)^2 + 1} \triangleq 2e^{-t}(\cos t - \sin t);$$

$$\frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1} \triangleq e^{-t} \sin t.$$

Je tedy

$$f(t) = 2e^{-t}(\cos t - \sin t)\mathbf{1}(t) - e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi).$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-t}(\cos t - \sin t), & 0 \leq t \leq \pi, \\ e^{-t}(2 \cos t - (2 - e^\pi) \sin t) + \sin t, & t > \pi. \end{cases}$$

4. $F(p) = \frac{3p+2-6e^{-\pi p}}{p^2+4}.$

Jestliže použijeme vzorců $\frac{p}{p^2+4} \triangleq \cos 2t$, $\frac{2}{p^2+4} \triangleq \sin 2t$ dostaneme, že

$$f(t) = [3 \cos 2t + \sin 2t] \mathbf{1}(t) - 3 \sin 2(t - \pi) \mathbf{1}(t - \pi).$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat

$$f(t) = \begin{cases} 3 \cos 2t + \sin 2t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 3 \cos 2t - 2 \sin 2t, & t > \pi. \end{cases}$$

5. $F(p) = \frac{p-3e^{-p}+2pe^{-2p}}{p^2+3p+2}.$

Obdobně jako v odstavci 2 provedeme rozklad na parciální zlomky a dostaneme:

$$\frac{p}{p^2+3p+2} = \frac{p}{(p+2)(p+1)} = \frac{2}{p+2} + \frac{-1}{p+1} \triangleq 2e^{-2t} - e^{-t}$$

a

$$\frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{(p+2)(p+1)} = \frac{-1}{p+2} + \frac{1}{p+1} \triangleq -e^{-2t} + e^{-t}.$$

Odtud vyplývá, že

$$f(t) = (2e^{-2t} - e^{-t}) \mathbf{1}(t) + 3(e^{-2(t-1)} - e^{-(t-1)}) \mathbf{1}(t-1) + (4e^{-2(t-2)} - 2e^{-(t-2)}) \mathbf{1}(t-2).$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat vzorcem

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} - e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ (2 + 3e^2)e^{-2t} - (1 + 3e)e^{-t}, & 1 < t \leq 2, \\ (2 + 3e^2 + 4e^4)e^{-2t} - (1 + 3e + 2e^2)e^{-t}, & t > 2. \end{cases}$$

Neřešené úlohy na zpětnou transformaci funkcí s faktorem e^{-ap} .

Nalezněte předmět $f(t)$ k obrazu $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{2}{p^2} e^{-p}$ $[f(t) = 2(t-1) \mathbf{1}(t-1), t \geq 0]$

$$\left[f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2t-2, & t > 1. \end{cases} \right]$$

2. $F(p) = \frac{2}{p^2} (1 - e^{-p} - pe^{-3p})$ $[f(t) = 2t \mathbf{1}(t) - 2(t-1) \mathbf{1}(t-1) - 2 \mathbf{1}(t-3), t \geq 0]$

$$\left[f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2, & 1 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases} \right]$$

3. $F(p) = \frac{1}{p+1} (e^{-p-1} - e^{-2p-2})$ $[f(t) = e^{-1} e^{-(t-1)} \mathbf{1}(t-1) - e^{-2} e^{-(t-2)} \mathbf{1}(t-2), t \geq 0]$

$$\left[f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-t}, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases} \right]$$

4. $F(p) = \frac{1}{p^2+9} (3 - 3e^{-\frac{\pi}{2}p} - (3+p)e^{-\frac{\pi}{6}p})$

$$[f(t) = \sin 3t \mathbf{1}(t) - (\sin 3(t - \frac{\pi}{6}) + \cos 3(t - \frac{\pi}{6})) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{6}) - \sin 3(t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}), t \geq 0]$$

$$\left[f(t) = \begin{cases} \sin 3t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}, \\ \cos 3t, & \frac{\pi}{6} < t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \right]$$

$$5. F(p) = \frac{1}{(p^2+p)(p^2+4)}(1 + e^{-\pi p}) \quad [f(t) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t)\mathbf{1}(t) +$$

$$(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t+\pi} - \frac{1}{20}\cos 2(t-\pi) - \frac{1}{10}\sin 2(t-\pi))\mathbf{1}(t-\pi), t \geq 0]$$

$$\left[f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t}(1 + e^\pi) - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t, & t > \pi. \end{cases} \right]$$

5. Obraz periodické funkce.

Pomocí věty o translaci snadno odvodíme obraz periodické funkce. K jeho určení potřebujeme vypočítat obraz impulsu, který danou periodickou funkcí vytváří.

Je-li $f_T : R \rightarrow R$ funkce, která je nenulová pouze v intervalu $\langle 0, T \rangle$, pak je její periodické prodloužení definováno vztahem

$$f(t + kT) = f_T(t), \quad 0 \leq t < T,$$

k je celé číslo.

Vztah lze přepsat ve tvaru

$$f(t) = f_T(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T,$$

k je celé číslo.

Periodické pokračování funkce $f(t)$ můžeme zapsat jako součet posunutých impulsů f_T , kdy provádíme posun vždy o jednu periodu. Je tedy

$$f(t)\mathbf{1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_T(t - kT)\mathbf{1}(t - kT), \quad t \geq 0.$$

Odtud dostaneme pomocí věty o translaci vyjádření obrazu

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\mathbf{1}(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_T(p)e^{-pkT} = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}},$$

kde $F_T(p) = \mathcal{L}\{f_T(t)\}$ je obraz impulsu $f_T(t)$. Použili jsme skutečnosti $e^{-pkT} = (e^{-pT})^k$ a toho, že součet geometrické řady s kvocientem e^{-pT} je roven $\frac{1}{1 - e^{-pT}}$,

Obraz impulsu $F_T(t)$ počítáme buď podle definice ze vztahu

$$F_T(p) = \mathcal{L}\{f_T(t)\} = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt,$$

nebo z vyjádření

$$f_T(t) = f(t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T)], \quad t \geq 0,$$

kde použijeme větu o translaci.

Řešené úlohy na obraz periodické funkce.

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$, $0 \leq t < T$ a má periodu T .

$$1. f_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

Je $f_T(t) = \mathbf{1}(t) - 2\mathbf{1}(t - 1) + \mathbf{1}(t - 2)$, $t \geq 0$. Odtud a z věty o translaci plyne

$$F_T(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}),$$

tudíž

$$F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p(1 - e^{-2p})} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p(1 + e^{-p})(1 - e^{-p})} = \frac{1 - e^{-p}}{p(1 + e^{-p})}.$$

Použili jsme vzorce pro obraz periodické funkce, vztahu $\frac{1}{p} \triangleq 1$ a skutečnosti, že perioda dané funkce je $T = 2$.

$$2. \quad f_T(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Je $f(t) = \sin t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)] = \sin t\mathbf{1}(t) + \sin(t - \pi)\mathbf{1}(t - \pi)$, tedy

$$F_T(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}e^{-\pi p}.$$

Vzhledem k tomu, že perioda funkce $f(t)$ je rovna $T = 2\pi$, je

$$F(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-2\pi p})} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}.$$

Použili jsme vzorec pro obraz periodické funkce a vztahy $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2 + 1}$.

$$3. \quad f_T(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & 2 < t < 3. \end{cases}$$

Je $f_T(t) = t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)] + (2 - t)[\mathbf{1}(t - 1) - \mathbf{1}(t - 2)] =$
 $t\mathbf{1}(t) - [(t - 1) + 1]\mathbf{1}(t - 1) + [1 + (1 - t)]\mathbf{1}(t - 1) + (t - 2)\mathbf{1}(t - 2) =$
 $t\mathbf{1}(t) - 2(t - 1) + 1\mathbf{1}(t - 1) + (t - 2)\mathbf{1}(t - 2).$

Odtud dostaneme obraz $F_T(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$ a tedy obraz funkce $f(t)$ je

$$F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2(1 - e^{-3p})}.$$

Použili jsme vzorce pro obraz periodické funkce s periodou $T = 3$ a vztah $1 \triangleq \frac{1}{p}$.

Neřešené úlohy na obraz periodické funkce.

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$ a má periodu T .

$$1. \quad f_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & 1 < t < 2, \end{cases} \quad T = 2. \quad [F(p) = \frac{1}{(1 + e^{-p})}]$$

$$2. \quad f_T(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < \pi, \quad T = \pi \quad [F(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}]$$

$$3. \quad f_T(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t, & 1 < t \leq 3, \\ t - 4, & 3 < t < 4, \end{cases} \quad T = 4. \quad [F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + 2e^{-3p} - e^{-4p}}{p^2(1 - e^{-4p})}]$$

$$4. \quad f_T(t) = 1 - t, \quad 0 \leq t < 1, \quad T = 1. \quad [F(p) = \frac{1}{p(1 - e^{-p})} - \frac{1}{p^2}]$$

6. Řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Laplaceovu transformaci můžeme použít k řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty nebo jejich soustav. Pomocí vztahů mezi obrazem funkce a obrazem jejich derivací lze rovnici převést na lineární rovnici nebo soustavu lineárních rovnic pro obraz či obrazy řešení. Obrazem řešení obvykle bývá racionální funkce. Jak se hledá předmět k takové funkci jsme ukázali v odstavci 2. Obecně lze řešení zapsat jako konvoluci „pravé strany rovnice“ a předmětu k racionální funkci.

Budeme hledat řešení diferenciální rovnice

$$(\clubsuit) \quad x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t)$$

v intervalu $t \in \langle 0, \infty \rangle$, které vyhovuje počáteční podmínce

$$(\spadesuit) \quad x(0) = x_1, \quad x'(0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_n.$$

Jestliže označíme

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p),$$

pak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'(t)\} &= pX(p) - x_1, \quad \mathcal{L}\{x''(t)\} = p^2X(p) - px_1 - x_2, \dots, \\ \mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} &= p^n X(p) - p^{n-1}x_1 - \dots - x_n. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice $(\clubsuit)$ dostaneme rovnici pro obraz řešení ve tvaru

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) - Q(p) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

kde $Q(p)$ je nějaký polynom stupně nejvýše $(n-1)$. Odtud dostaneme obraz řešení ve tvaru

$$X(p) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} + \frac{Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Odtud lze vyjádřit řešení ve tvaru

$$x(t) = f(t) * v(t) + w(t), \quad t \geq 0,$$

kde

$$v(t) \triangleq \frac{1}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad \text{a} \quad w(t) \triangleq \frac{Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$

jsou předměty k uvedeným racionálním funkcím. Je-li předmět $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ racionální funkcí dostaneme řešení jako předmět k racionální funkci a není třeba využívat jeho vyjádření pomocí konvoluce. Je pak

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{P(p)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{P(p)}\right\},$$

kde $P(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$.

Poznamenejme, že z rozboru postupu vyplývá, že první člen ve vzorci je řešením rovnice $(\clubsuit)$ za nulových počátečních podmínek a druhý člen je řešením homogenní rovnice příslušné rovnici $(\clubsuit)$, které vyhovuje počátečním podmínkám $(\spadesuit)$.

Stejným způsobem můžeme řešit i rovnici tvaru $(\clubsuit)$, která obsahuje ještě člen tvaru $\int_0^t x(u)du$. Zde použijeme vztahu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} = \frac{1}{p}X(p)$ a pro obraz řešení $X(p)$ dostaneme analogické vyjádření.

Obdobně můžeme postupovat při řešení soustav diferenciálních rovnic, kde dostaneme soustavu lineárních rovnic pro obrazy řešení. Po jejím vyřešení hledáme řešení soustavy jako předměty k funkcím výše popsaného tvaru.

Postup řešení jednotlivých úloh budeme ilustrovat na příkladech.

Řešené úlohy na diferenciální rovnice.

Nalezněte řešení dané rovnice v intervalu $\langle 0, \infty \rangle$, které vyhovuje uvedeným počátečním podmínkám.

1. $x' + 2x = 3, \quad x(0) = 0.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$pX(p) - 0 + 2X(p) = \frac{3}{p}.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{3}{p(p+2)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{3}{p(p+2)} = \frac{3}{2p} - \frac{3}{2(p+2)}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}), \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztah $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $e^{-2t} \triangleq \frac{1}{p+2}$.

2. $x' + 4x = \sin t, \quad x(0) = 3.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$X(p)(p+4) - 3 = \frac{2}{p^2+4}.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{3}{p+4} + \frac{2}{(p+4)(p^2+4)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{3}{p+4} + \frac{2}{(p+4)(p^2+4)} = \frac{3}{p+4} + \frac{\frac{1}{10}}{p+4} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{2}{5}}{p^2+4}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{31}{10}e^{-4t} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t, \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztah $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$, $e^{-4t} \triangleq \frac{1}{p+4}$.

3. $x'' - x' - 6x = 2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$p^2X(p) - p \cdot 1 - 0 - (pX(p) - 1) - 6X(p) = \frac{2}{p}.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p(p-3)(p+2)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p(p-3)(p+2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{p} + \frac{\frac{4}{5}}{p+2} + \frac{\frac{8}{15}}{p-3}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{15}(-5 + 12e^{-2t} + 8e^{3t}), \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $e^{at} \triangleq \frac{1}{p-a}$, $a = -2$, $a = 3$.

4. $x'' - 6x' + 9x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -4$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2X(p) - 2p + 4) - 6(pX(p) - 2) + 9X(p) = 0.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{2p-16}{p^2-6p+9}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{2p-16}{p^2-6p+9} = \frac{2(p-3)+6-16}{(p-3)^2} = \frac{2}{(p-3)} - \frac{10}{(p-3)^2}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (2 - 10t)e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $e^{3t} \triangleq \frac{1}{p-3}$, $te^{3t} \triangleq \frac{1}{(p-3)^2}$.

5. $x'' + 2x' + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2X(p) - p - 2) + 2(pX(p) - 1) + 2X(p) = 0.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+2}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+2} = \frac{p+1}{(p^2+1)+1} + \frac{3}{(p^2+1)+1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = e^{-t}(\cos t + 3 \sin t), \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = -1$ a vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

6. $x'' - 9x = 2 - t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 - 9)X(p) - 1 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{p^2 + 2p - 1}{p^2(p-3)(p+3)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{-\frac{6}{27}}{p} + \frac{\frac{1}{9}}{p^2} + \frac{\frac{7}{27}}{p-3} - \frac{\frac{1}{27}}{p+3}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{27}(-6 + 3t + 7e^{3t} - e^{-3t}), \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $e^{at} \triangleq \frac{1}{p-a}$, $a = 3$, $a = -3$.

7. $x'' + 4x = 2 \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 4)X(p) - 4 = \frac{2p}{p^2 + 4}.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{4}{p^2 + 4} + \frac{2p}{(p^2 + 4)^2}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavci 2. Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{2}(4 + t) \sin 2t, \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $t \sin 2t \triangleq \frac{4p}{(p^2 + 4)^2}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2 + 4}$.

8. $x' + \int_0^t x(\tau) d\tau = 1, \quad x(0) = 1.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a obrazem integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p + \frac{1}{p})X(p) - 1 = \frac{1}{p}.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{p+1}{p^2+1}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavci 2.

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \sin t + \cos t, \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $\int_0^t x(\tau) d\tau \triangleq \frac{1}{p}X(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

9. $x' + 2x + 2 \int_0^t x(\tau) d\tau = 3e^{-t}, \quad x(0) = 2.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a obrazem integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p + 2 + \frac{2}{p})X(p) - 2 = \frac{3}{p+1}.$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{2p^2 + 5p}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{2p^2 + 5p}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)} = \frac{-3}{p+1} + \frac{5p+6}{p^2 + 2p + 2}.$$

Úpravou dostaneme vyjádření

$$X(p) = \frac{-3}{p+1} + \frac{5(p+1)}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = -3e^{-t} + e^{-t}(5 \cos t + \sin t), \quad t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $\int_0^t x(\tau) d\tau \triangleq \frac{1}{p}X(p)$, $e^{-t}f(t) \triangleq F(p+1)$ a vzorce $e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

10. $x' - x = f(t), \quad x(0) = -1$, kde $f(t) = \begin{cases} 2-t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t) = (2-t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)]$ a postupem z odstavce 3 dostaneme

$$f(t) \triangleq \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p}).$$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p-1)X(p) + 1 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p}).$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{-p^2 + 2p - 1}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p^2(p-1)}e^{-2p}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkce rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \left(\frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1} \right) e^{-2p}.$$

Použijeme postupů, které jsme probrali v úlohách v odstavcích 2 a 4 a dostaneme pro řešení vzorec

$$x(t) = (t-1)\mathbf{1}(t) + (-1 - (t-2) + e^{(t-2)})\mathbf{1}(t-2), \quad t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} t-1, & 0 \leq t \leq 2, \\ e^{t-2}, & t > 2. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $e^t \triangleq \frac{1}{p-1}$.

11. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, kde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathcal{L}f(t) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p})$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 1)X(p) - p + 1 = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}).$$

Dále vypočteme, že

$$X(p) = \frac{p^2 - p + 1 - e^{-p}}{p(p^2 + 1)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + 1} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) e^{-p}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (1 - \sin t)\mathbf{1}(t) - (1 - \cos(t-1))\mathbf{1}(t-1), \quad t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \sin t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \sin t(\sin 1 - 1) + \cos t \cos 1, & t > 1. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p+1}$.

12. $x'' + 4x' + 3x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, kde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathcal{L}f(t) = (1 - e^{-p})\frac{1}{p}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$X(p)(p^2 + 4p + 3) = (1 - e^{-p})\frac{1}{p}.$$

Dále vypočteme, že

$$X(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p(p^2 + 4p + 3)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{6(p+3)} \right) (1 - e^{-p}).$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \right) \mathbf{1}(t) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-(t-1)} + \frac{1}{6}e^{-3(t-1)} \right) \mathbf{1}(t-1), \quad t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{2}(e-1)e^{-t} + \frac{1}{6}(1-e^3)e^{-3t}, & t > 1. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $e^{at} \triangleq \frac{1}{p-a}$, $a = -1$, $a = -3$.

$$13. \quad x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad \text{kde} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Poznamenejme, že $f(t) = \mathbf{1}(t) - 2\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2)$, tedy $\mathcal{L}f(t) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavcích 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}.$$

Dále vypočteme, že

$$X(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p(p^2+1)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 5, 6 a 12. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) (1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (1 - \cos t)\mathbf{1}(t) - 2(1 - \cos(t-1))\mathbf{1}(t-1) + (1 - \cos(t-2))\mathbf{1}(t-2), \quad t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1 + (2 \cos 1 - 1) \cos t + 2 \sin 1 \sin t, & 1 < t \leq 2, \\ \cos t(2 \cos 1 - 1 - \cos 2) - (\sin 2 - 2 \sin 1) \sin t, & t > 2. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 8 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

$$14. \quad x'' + 2x' + 2x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad \text{kde} \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-t}, & t > 1. \end{cases}$$

Poznamenejme, že $f(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t-1) = e^{-1}e^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathcal{L}f(t) = \frac{e^{-1}e^{-p}}{p+1}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 2p + 2)X(p) = \frac{e^{-1}e^{-p}}{p+1}.$$

Dále vypočteme, že

$$X(p) = \frac{e^{-1}e^{-p}}{(p+1)(p^2+2p+2)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = e^{-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \right) e^{-p}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = e^{-1}(1 - e^{-(t-1)} \cos(t-1)) \mathbf{1}(t-1), \quad t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-1} - e^{-t}(\cos 1 \cos t + \sin 1 \sin t), & t > 1. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$ a vztah $f(t)e^{-t} \triangleq F(p+1)$.

$$15. \quad x'' + 4x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad \text{kde} \quad f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2(t-2), & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Poznamenejme, že $f(t) = 2t(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)) + 2(t-2)(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)) = 2t\mathbf{1}(t) - 4(t-1)\mathbf{1}(t-1) + 2(t-2)\mathbf{1}(t-2)$, tedy $\mathcal{L}f(t) = (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})\frac{2}{p^2}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 4)X(p) = (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})\frac{2}{p^2}.$$

Dále vypočteme, že

$$X(p) = (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})\frac{2}{p^2(p^2+4)}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4} \right) \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{2}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \mathbf{1}(t) - \left[(t-1) - \frac{1}{2} \sin 2(t-1) \right] \mathbf{1}(t-1) + \frac{1}{2} \left[(t-2) - \frac{1}{2} \sin 2(t-2) \right] \mathbf{1}(t-2), \quad t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2}t + \sin 2t \left(\frac{1}{2} \cos 2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \sin 2 \cos 2t, & 1 < t \leq 2, \\ \sin 2t \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2 - \frac{1}{4} \cos 4 \right) + \left(\frac{1}{4} \sin 4 - \frac{1}{2} \sin 2 \right) \cos 2t, & t > 2. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

$$16. \quad x' + 5x = f(t), \quad x(0) = 1, \quad \text{kde} \quad f(t) = \begin{cases} 5 \cos 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Poznamenejme, že

$$f(t) = 5 \cos 2t [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] = 5 \cos 2t \mathbf{1}(t) + 5 \cos 2(t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}),$$

tedy $\mathcal{L}f(t) = \frac{5p}{p^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p})$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 2.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p+1)X(p) - 1 = \frac{5p}{p^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p}).$$

Dále vypočteme, že

$$X(p) = \frac{5p}{(p^2+4)(p+1)}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p}) + \frac{1}{p+1}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsáním v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+4} + \left(\frac{p+4}{p^2+4} - \frac{1}{p+1} \right) e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (\cos 2t + 2 \sin 2t) \mathbf{1}(t) + \left(\cos 2(t - \frac{\pi}{2}) + 2 \sin 2(t - \frac{\pi}{2}) - e^{-(t-\frac{\pi}{2})} \right) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}), \quad t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} \cos 2t + 2 \sin 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -e^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq pX(p) - x(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$.

Řešení rovnice se dá také vyjádřit jako konvoluce. Toto vyjádření můžeme použít ve dvou případech. Buď je funkce na pravé straně rovnice složitá pro hledání obrazu a nebo chceme vyjádřit řešení rovnice pro obecnou pravou stranu. Při výpočtu konkrétního řešení pak zbývá vypočítat integrál, kterým je konvoluce zapsaná. Využijeme vztahu $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)G(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} * \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}$. Dostaneme stejné vyjádření řešení, které získáme metodou variace konstant. Postup řešení úlohy budeme ilustrovat na příkladech.

$$17. \quad x'' + 3x' + 2x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 3p + 2)X(p) = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 3p + 2}.$$

Protože je

$$\frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p + 1} - \frac{1}{p + 2} \triangleq (e^{-t} - e^{-2t}),$$

je

$$x(t) = f(t) * (e^{-t} - e^{-2t}) = \int_0^t f(u)(e^{-t+u} - e^{-2t+2u}) du, \quad t \geq 0.$$

18. $x'' + 4x' + 5x = f(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 4p + 5)X(p) - p - 4 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 4p + 5} + \frac{p + 4}{p^2 + 4p + 5}.$$

Protože je

$$\frac{1}{p^2 + 4p + 5} = \frac{1}{(p + 2)^2 + 1} \triangleq e^{-2t} \sin t$$

a

$$\frac{p + 4}{p^2 + 4p + 5} = \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 1} + \frac{2}{(p + 2)^2 + 1} \triangleq e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t)$$

je

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t) + f(t) * e^{-2t} \sin t \\ &= e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t) + \int_0^t f(u)e^{-2(t-u)} \sin(t-u) du, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

19. $x' + 2x + 10 \int_0^t x(u)du = f(t), \quad x(0) = 1,$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p + 2 + \frac{10}{p})X(p) - 1 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{pF(p)}{p^2 + 2p + 10} + \frac{p}{p^2 + 2p + 10}.$$

Protože je

$$\frac{p}{p^2 + 2p + 10} = \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 9} - \frac{1}{(p + 1)^2 + 9} \triangleq e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t),$$

je

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t) + f(t) * e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t) \\ &= e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t) + \int_0^t f(u)e^{-t+u}(\cos 3(t-u) - \frac{1}{3} \sin 3(t-u))du, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

20. $x' + 6x + 9 \int_0^t x(u) du = f(t), \quad x(0) = 1,$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p + 6 + \frac{9}{p})X(p) - 1 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{pF(p)}{p^2 + 6p + 9} + \frac{p}{p^2 + 6p + 9}.$$

Protože je

$$\frac{p}{p^2 + 6p + 9} = \frac{p}{(p + 3)^2} = \frac{1}{p + 3} - \frac{3}{(p + 3)^2} \triangleq e^{-3t}(1 - 3t),$$

je

$$x(t) = e^{-3t}(1 - 3t) + f(t) * (e^{-3t}(1 - 3t)) = \\ e^{-3t}(1 - 3t) + \int_0^t f(u)(e^{-3(t-u)}(1 - 3(t-u)))du, \quad t \geq 0.$$

Neřešené úlohy na diferenciální rovnice.

Nalezněte řešení rovnice, které vyhovuje uvedeným počátečním podmínkám.

1. $x' + 3x = 0, \quad x(0) = 5; \quad [x(t) = 5e^{-3t}, \quad t \geq 0]$
2. $x'' - 2x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1; \quad [x(t) = e^t \cos t, \quad t \geq 0]$
3. $x'' + 3x' + 2x = 4e^{-3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0; \quad [x(t) = 2e^{-3t} - 4e^{-2t} + 2e^{-t}, \quad t \geq 0]$
4. $x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0; \quad [x(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t), \quad t \geq 0]$
5. $x'' + 3x' = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1; \quad [x(t) = \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-t}), \quad t \geq 0]$
6. $x'' + 4x = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0; \quad [x(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t), \quad t \geq 0]$
7. $x'' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0; \quad [x(t) = \frac{1}{25}(2e^{-2t} - 10t \cos t - 5t \sin t - 2 \cos t + 14 \sin t), \quad t \geq 0]$
8. $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0; \quad [x(t) = \frac{1}{2}(te^{-t} + e^{-t} - \cos t), \quad t \geq 0]$
9. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0; \quad [x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^t(\cos t - \sin t)), \quad t \geq 0]$
10. $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1; \quad [x(t) = \frac{1}{2}t \sin t - \cos t + \sin t, \quad t \geq 0]$
11. $x' + 5x + 6 \int_0^t x(\tau) d\tau = 0, \quad x(0) = 1; \quad [x(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}, \quad t \geq 0]$
12. $x' + 2x + \int_0^t x(\tau) d\tau = \sin t, \quad x(0) = 0; \quad [x(t) = \frac{1}{2}(te^{-t} + \sin t), \quad t \geq 0]$
13. $\begin{aligned} x' &= -x + y + e^t, & x(0) &= 0, & [x(t) &= e^t - 1, \quad t \geq 0] \\ y' &= x - y + e^t, & y(0) &= 0; & [y(t) &= e^t - 1, \quad t \geq 0] \end{aligned}$
14. $\begin{aligned} x' &= -y, & x(0) &= 1, & [x(t) &= e^t(\cos t - 2 \sin t), \quad t \geq 0] \\ y' &= 2x + 2y, & y(0) &= 1; & [y(t) &= e^t(\cos t + 3 \sin t), \quad t \geq 0] \end{aligned}$
15. $\begin{aligned} x' &= -x + 3y, & x(0) &= 1, & [x(t) &= \frac{19}{16}e^{2t} - \frac{3}{4}te^{-2t} - \frac{3}{16}e^{-2t}, \quad t \geq 0] \\ y' &= x + y + e^{-2t}, & y(0) &= 1; & [y(t) &= \frac{19}{16}e^{2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{3}{16}e^{-2t}, \quad t \geq 0] \end{aligned}$

16. $x'' - 4x = 4t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$; $[x(t) = \frac{1}{4}(3e^{2t} + e^{-2t} - 4t), t \geq 0]$
17. $x'' - 4x = 4e^{2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$; $[x(t) = te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}, t \geq 0]$
18. $x'' + x = t^3 + 6t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$; $[x(t) = t^3, t \geq 0]$
19. $x'' + x = \sin 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$; $[x(t) = \frac{1}{3}(2 \sin t - \sin 2t), t \geq 0]$
20. $x'' + x = \cos t + \sin 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$; $[x(t) = \frac{1}{6}((3t + 4) \sin t - 2 \sin 2t), t \geq 0]$
21. $x'' + x = 2 + e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$; $[x(t) = \frac{1}{2}(4 + e^{-t} + \sin t - 5 \cos t), t \geq 0]$
22. $x' + 6x + 9 \int_0^t x(\tau) d\tau = 0$, $x(0) = 1$; $[x(t) = (1 - 3t)e^{-3t}, t \geq 0]$
23. $x' + 2x + 2 \int_0^t x(\tau) d\tau = 0$, $x(0) = 1$; $[x(t) = e^{-t} \cos t, t \geq 0]$
24. $x' - 2x = f(t)$, $x(0) = -3$; $f(t) = \begin{cases} 8 - 4t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$
 $[x(t) = (2t - 3)\mathbf{1}(t) + (e^{2(t-2)} - 2t + 3)\mathbf{1}(t - 2), t \geq 0]$
 $[x(t) = 2t - 3, 0 \leq t \leq 2, x(t) = e^{2(t-2)}, t > 2]$
25. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$; $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$
 $[x(t) = (t - \cos t)\mathbf{1}(t) - (t + \sin t + \pi \cos t)\mathbf{1}(t - \pi), t \geq 0]$
 $[x(t) = t + \cos t, 0 \leq t \leq \pi, x(t) = \cos t - \sin t - \pi \cos t, t > \pi]$
26. $x'' + 4x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$; $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & t > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$
 $\left[x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(3 \cos 2t + 1), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{4}(2 + 3 \cos 2t - \sin 2t), & t > \frac{\pi}{4}. \end{cases} \right]$
27. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$; $f(t) = \begin{cases} 2e^{-t}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
 $\left[x(t) = \begin{cases} e^{-t} - \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos t + e^{-\frac{\pi}{2}}(\cos t + \sin t), & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \right]$
28. $x' + 3x = f(t)$, $x(0) = 1$; $f(t) = \begin{cases} 9t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 9, & t > 1. \end{cases}$
 $\left[x(t) = \begin{cases} 2e^{-3t} - 1 + 3t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2e^{-3t} + 3 - e^3e^{-3t}, & t > 1. \end{cases} \right]$
29. $x' - x = f(t)$, $x(0) = 1$; $f(t) = \begin{cases} 5 \sin 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
 $\left[x(t) = \begin{cases} 3e^t - 2 \cos 2t - \sin 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3e^t + 2e^{t-\frac{\pi}{2}}, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \right]$
30. $x'' + 9x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$; $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$
 $\left[x(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}(3 \sin t - \sin 3t), & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases} \right]$
31. $x'' + 2x' + 10x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 6$; $[x(t) = 2e^{-t} \sin 3t, t \geq 0]$

32. $x'' + 2x' = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$; $[x(t) = 2 - e^{-2t}, t \geq 0]$
33. $x'' + 3x' + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$; $[x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, t \geq 0]$
34. $x'' - x' = 2 - 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$; $[x(t) = e^t + t^2, t \geq 0]$
35. $x'' + x = 4e^t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = -3$; $[x(t) = 2e^t + 2\cos t - 5\sin t, t \geq 0]$
36. $x'' + x = 3\sin 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$; $[x(t) = \cos t + 3\sin t - \sin 2t, t \geq 0]$
37. $x'' + 9x = 5\cos 3t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$; $[x(t) = 2\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{5}{6}t\sin 3t, t \geq 0]$
38. $x'' + x' = 2t - 3$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$; $[x(t) = 6(1 - e^{-t}) + t^2 - 5t, t \geq 0]$
39. $x'' + 6x' + 9x = (2t + 1)e^t$, $x(0) = 5$, $x'(0) = \frac{1}{8}$; $[x(t) = 5e^{-3t} + 15te^{-3t} + \frac{1}{8}te^t, t \geq 0]$