

Základy Z-transformace pro aplikace v oblasti číslicového zpracování signálů

Petr Pollák

19. října 2009

1 Základy Z-transformace

Tento stručný text slouží k připomenutí základních vlastností Z-transformace s jejími aplikacemi v oblasti obecného popisu diskrétních signálů a systémů. V kapitolách níže naleznete základní definiční vztahy, nejdůležitější vlastnosti a základní slovník korespondencí, se kterými budeme v oblasti diskrétních systémů a signálů nejčastěji pracovat.

Uvedený text není úplným a vyčerpávajícím popisem zahrnujícím problematiku Z-transformace. Toto lze nalézt v dalších pramenech, zejména pak v [2], [3], [1], aj.

1.1 Definiční vztahy

Z-transformace definuje korespondenci mezi diskrétní posloupností $x[n]$, představující v našem případě diskrétní signál, a komplexní funkcí komplexní proměnné $X(z)$, kterou nazýváme z -obrazem dané posloupnosti. Symbolicky budeme značit obvykle následujícími způsoby.

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} \quad (1)$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \quad (2)$$

$$x[n] \quad \triangleq \quad X(z) \quad (3)$$

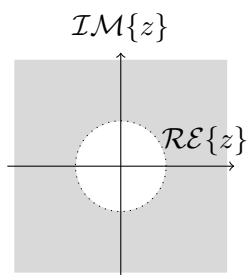
Definiční vztah Z-transformace je potom

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad (4)$$

kde v tomto případě mluvíme o tzv. unilaterální formě, kdy suma se počítá v mezích od 0 do ∞ ¹. Daná nekonečná suma obecně konverguje v oblasti, která představuje vnější oblast v z -rovině, která je vymezena kružnicí, viz obr. 1

Problematika zcela obecné formulace inverzní Z-transformace přesahuje rámec tohoto textu. Detaily lze nalézt v odkazovaných pramenech. V našich aplikacích budeme pracovat především s dále definovaným základním slovníkem Z-transformace.

¹Existuje také bilaterální tvar, kde daná definiční suma se počítá v mezích od $-\infty$ do ∞ , aplikacích pro číslicové zpracování signálů se však setkáváme většinou pouze s tvarem unilaterálním.



Obrázek 1: Obecná oblast konvergence z -transformace

1.2 Souvislost Z-transformace a Fourierovy transformace

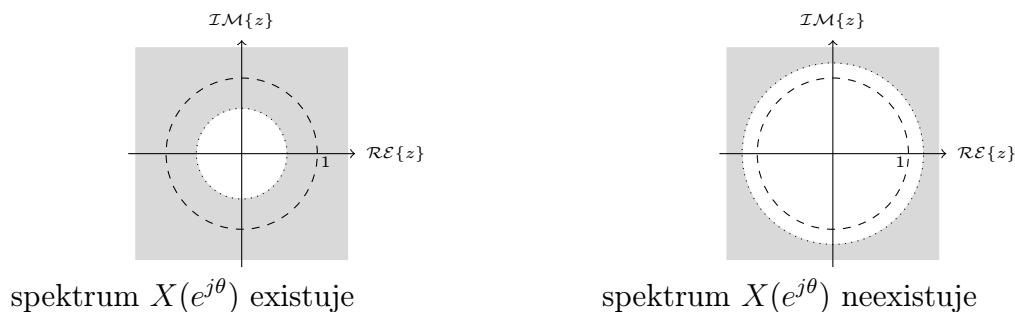
Jestliže $x[n]$ představuje diskrétní signál (posloupnost vzorků), Fourierova transformace diskrétního signálu (spektrum) je definována jako

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n} \left(\sim X(f) \right). \quad (5)$$

Jestliže definice Z-transformace je daná jako

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (6)$$

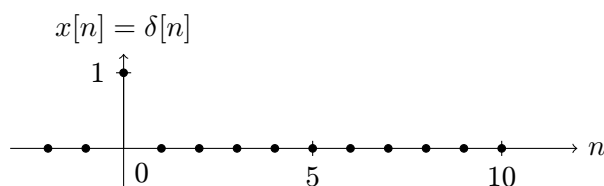
je zřejmé, že spektrální reprezentaci signálu dostaneme substitucí $z = e^{j\theta}$ za podmínky konvergence Fourierovy transformace pro daný signál. Jelikož hodnoty z pro $z = e^{j\theta}$ leží na jednotkové kružnici, je zřejmé, že toto bude splněno v případě, že oblast konvergence Z-transformace obsahuje jednotkovou kružnici, viz obr. 2.



Obrázek 2: Závislost existence spektra na oblasti konvergence Z-transformace daného signálu.

1.3 Příklady transformace základních signálů

1.3.1 Jednotkový impuls

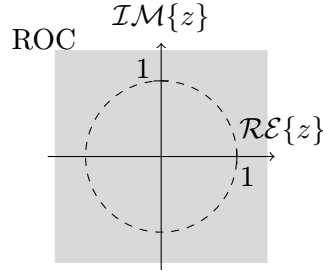


$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0, \\ 0, & \text{if } n \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Výpočet Z-obrazu:

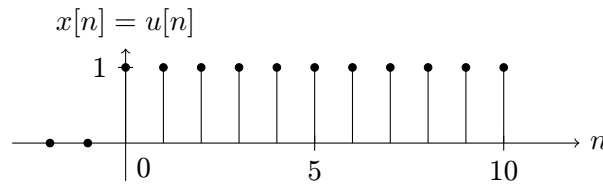
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^0 1 \cdot z^0 = 1 \quad (8)$$

Oblast konvergence je v tomto případě rovna celé komplexní rovině, viz obr. 3, neboť výše spočítaná suma je rovna 1 pro libovolnou hodnotu proměnné z .



Obrázek 3: Oblast konvergence jednotkového impulsu

1.3.2 Jednotkový skok



$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & \text{if } n \geq 0, \\ 0, & \text{if } n < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (10)$$

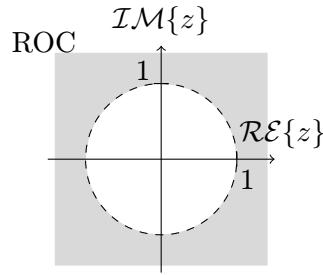
Výpočet výše uvedené nekonečné sumy, představuje součet nekonečné geometrické řady s kvocientem $q = z^{-1}$, tj.

$$X(z) = \frac{x[0]}{1 - q}, \text{ pokud } |q| < 1. \quad (11)$$

Z uvedené podmínky je také zřejmé, že daná řada konverguje pouze pokud $|q| = |z^{-1}| < 1$. Pro proměnnou z tedy musí platit $|z| > 1$. Oblast konvergence je tedy vymezená jednotkovou kružnicí, která do oblasti konvergence nepatří, viz obr. 4. To je v souladu s neexistencí Fourierovy reprezentace jednotkového skoku, neboť pro danou posloupnost nekonverguje součet absolutních hodnot.

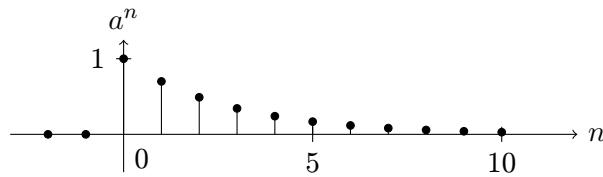
Z-obraz dané posloupnosti je také možné vyjádřit dvěma způsoby, a to v principu jako racionální lomenou funkci proměnné z^{-1} , či jako racionální lomenou funkci proměnné z . Uvedený druhý tvar nabývá významu především při výpočtu nulových bodů a pólů funkce $X(z)$, neboť tato funkce je samozřejmě v principu funkcí proměnné z .

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{z}{z - 1}. \quad (12)$$



Obrázek 4: Region konvergence jednotkového skoku

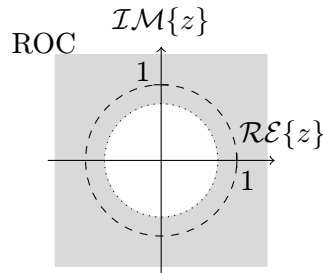
1.3.3 Exponenciální posloupnost (exponenciální impuls)



$$x[n] = \begin{cases} a^n, & \text{if } n \geq 0, \\ 0, & \text{if } n < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \left(= \frac{1}{1 - az^{-1}} \right) \quad (14)$$

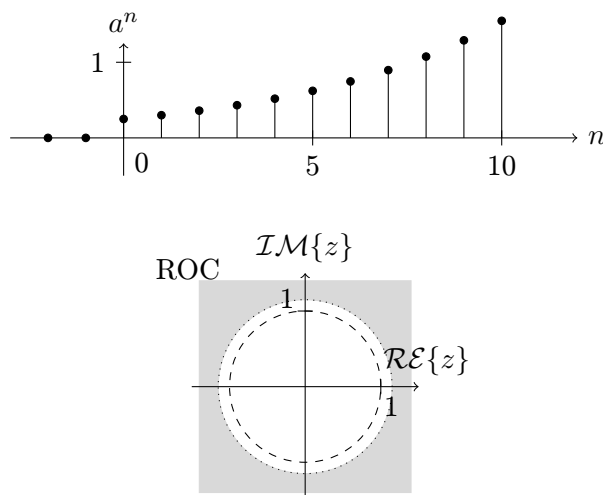
Z-transformace je v tomto případě dána součtem geometrické řady s kvocientem $q = az^{-1}$. Podmínka konvergence je v tomto případě rovna $|az^{-1}| < 1$ resp. $|z| > |a|$, viz obr. 5, kde je zobrazena oblast konvergence pro exponenciální impuls $(-0.75)^n$. Na obr. 6 si můžeme všimnout situace pro posloupnost $(-1.15)^n$, která představuje signál rostoucí nade všechny meze, pro nějž nelze nalézt spektrum. S podobnými signály se můžeme setkat především na výstupech nestabilních diskretních systémů.



Obrázek 5: Oblast konvergence exponenciálního pulsu pro a=0.75

2 Základní vlastnosti Z-transformace

V této části jsou připomenuty nejzákladnější vlastnosti Z-transformace, na základě kterých můžeme nalézt další korespondence pro obecnější posloupnosti, odvozené z výše uvedených základních.



Obrázek 6: Diskrétní posloupnost a oblast konvergence exponenciálního pulsu pro $a=-1.15$

2.1 Linearita

$$A \cdot x_1[n] + B \cdot x_2[n] \quad \cong \quad A \cdot X_1(z) + B \cdot X_2(z) \quad (15)$$

Na základě této vlastnosti nalezneme obraz obecné konečné posloupnosti, obraz harmonických posloupností, apod. Větu o linearitě uplatníme také při zpětné transformaci racionální lomené funkce.

2.2 Věta o posunutí

$$x[n - n_o] \quad \cong \quad X(z) \cdot z^{-n_o} \quad (16)$$

Větu o posunutí uplatníme hledání obrazu konečné posloupnosti a zejména pak při převodu diferenční rovnice do Z-oblasti, tj. např. máme-li diferenční rovnici

$$y[n] = x[n] + 3x[n - 1] + x[n - 2] - 0,5y[n - 1] - 0,4y[n - 2], \quad (17)$$

její reprezentace v z-oblasti je

$$Y(z) = X(z) + 3X(z)z^{-1} + X(z)z^{-2} - 0,5Y(z)z^{-1} - 0,4Y(z)z^{-2}. \quad (18)$$

2.3 Násobení exponenciálou v časové oblasti

$$a^n x[n] \quad \cong \quad X(z/a) \quad (19)$$

Aplikaci této věty nalezneme především při hledání reprezentace pro exponenciálně tlumené signály (např. tlumenou sinusovku). Její nejjednodušší aplikaci si lze představit i v souvislosti korespondence jednotkového skoku a exponenciálního pulzu, tj.

$$u[n] \quad \cong \quad \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (20)$$

$$a^n = a^n u[n] \quad \cong \quad \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (21)$$

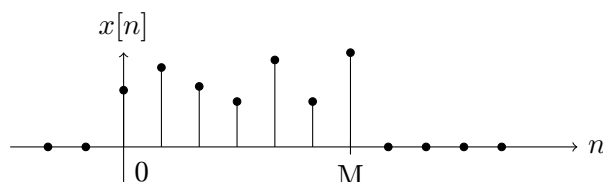
2.4 Obraz konvoluce

$$x_1[n] \star x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \quad \hat{=} \quad X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (22)$$

Uvedenou vlastnost využíváme především při výpočtu obecné odezvy diskrétního systému (tj. při filtraci signálu), konkrétně např. při výpočtu impulzové odezvy systému.

2.5 Výpočty dalších významných korespondencí

2.5.1 Posloupnost konečné délky



$$x[n] = \begin{cases} b_n, & \text{if } n \in \langle 0, M \rangle, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

$$x[n] = b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2] + \dots + b_M\delta[n-M] \quad (24)$$

$$X(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M} \quad (25)$$

2.5.2 Obraz harmonických kmitů - sinu a kosinu

$$x[n] = \begin{cases} \cos \omega n, & \text{if } n \geq 0, \\ 0, & \text{if } n < 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$x[n] = \cos \omega n = \frac{1}{2} (e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{j\omega} z^{-1} + 1 - e^{-j\omega} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega} z^{-1})(1 - e^{-j\omega} z^{-1})} = \frac{\frac{1}{2} (2 - (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) z^{-1})}{1 - (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) z^{-1} + z^{-2}} \\ X(z) &= \frac{1 - \cos \omega \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1} \end{aligned} \quad (28)$$

Obraz kosinové posloupnosti je tedy v Z-oblasti reprezentován racionální lomenou funkcí 2. řádu s reálnými koeficienty závislými na kmitočtu dané harmonické složky.

Podobně lze odvodit reprezentace pro sinovou posloupnost s nulovým či obecným fázovým posuvem, a to na základě platnosti následujících vztahů

$$x[n] = \sin \omega n = \frac{1}{2j} (e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}), \quad (29)$$

$$x[n] = \sin(\omega n + \varphi) = \cos \varphi \sin \omega n + \sin \varphi \cos \omega n. \quad (30)$$

Výsledné korespondence lze nalézt dále souhrnně v tabulce základních korespondencí.

2.5.3 Obraz tlumených harmonických kmitů

Pokud známe korespondenci pro netlumený harmonický průběh

$$x[n] = \begin{cases} \sin(\omega n + \varphi) & \text{if } n \geq 0, \\ 0, & \text{if } n < 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$X(z) = \frac{\sin \varphi + \sin(\omega - \varphi) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}} \quad (32)$$

je vzájemná korespondence pro tlumené kmity dána aplikací věty o násobení exponenciálou (věty o substituci), tj.

$$x[n] = \begin{cases} a^n \sin(\omega n + \varphi) & \text{if } n \geq 0, \\ 0, & \text{if } n < 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$X(z) = \frac{\sin \varphi + \sin(\omega - \varphi) \cdot \frac{z^{-1}}{a}}{1 - 2 \cos \omega \cdot \frac{z^{-1}}{a} + \frac{z^{-2}}{a^2}} = \frac{\sin \varphi + a \sin(\omega - \varphi) \cdot z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega \cdot z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad (34)$$

Obdobně velmi snadno lze odvodit korespondence pro tlumený sinus resp. kosinus s nulovým fázovým posuvem.

2.6 Zpětný obraz racionální lomené funkce

Zpětný obraz racionální lomené funkce hledáme na základě platnosti věty o linearitě. Máme-li obecně racionální lomenou funkci ve tvaru

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}, \quad (35)$$

kde $M < N$, lze ji převést do součinného tvaru

$$X(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (36)$$

kde c_k jsou **nulové body** funkce $X(z)$, tj. kořeny čitatele, a d_k jsou **póly** funkce $X(z)$, tj. kořeny jmenovatele dané reprezentace. Uvedený příklad platí pro jednoduché kořeny v čitateli i jmenovateli. Tento tvar je pak možné rozložit na parciální zlomky, tj. získáváme následující součtový tvar

$$X(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})}, \quad (37)$$

pro něž již známe dílčí korespondence pro jednotlivé parciální zlomky, tj. v uvedeném případě

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k \cdot (d_k)^n. \quad (38)$$

V obecném případě mohou být kořeny komplexní a násobné. V případě komplexních kořenů se bude pro racionální lomenou funkci s reálnými koeficienty jednat o dvojice komplexně združených kořenů, pro které je možné pracovat s parciálními zlomky 2. řádu s reálnými koeficienty, což reprezentuje harmonické kmity v časové oblasti, viz výše. V případě násobných kořenů uplatňujeme další vlastnosti Z-transformace. Tuto situaci s násobnými póly již nebudeme v našich úlohách řešit.

Reference

- [1] A. V. Openheim, R. W. Shafer, and J. R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing. Second Edition*. Prentice Hall, 1999.
- [2] J. Veit. *Integrální transformace*. SNTL, druhé edition, 1983.
- [3] R. Vích. *Transformace Z a některá její použití*. SNTL Praha, 1983.

A Elementární slovník Z-transformace

Časová oblast - $x[n]$ pro $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$	Operátorová oblast - $X(z)$
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$
a^n	$\frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$
$b_0\delta[n] + b_1\delta[n - 1] + b_2\delta[n - 2] + \dots$ $\dots + b_M\delta[n - M]$	$b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots$ $\dots + b_Mz^{-M}$
$\cos \omega n$	$\frac{1 - \cos \omega \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}} =$ $= \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1}$
$\sin \omega n$	$\frac{\sin \omega \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}} =$ $= \frac{\sin \omega \cdot z}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1}$
$\sin(\omega n + \varphi)$	$\frac{\sin \varphi + \sin(\omega - \varphi) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}} =$ $= \frac{z(\sin \varphi + \sin(\omega - \varphi) \cdot z)}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1}$
$a^n \cos \omega n$	$\frac{1 - a \cos \omega \cdot z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega \cdot z^{-1} + a^2 z^{-2}}$
$a^n \sin \omega n$	$\frac{a \sin \omega \cdot z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega \cdot z^{-1} + a^2 z^{-2}}$
$a^n \sin(\omega n + \varphi)$	$\frac{\sin \varphi + a \sin(\omega - \varphi) \cdot z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega \cdot z^{-1} + a^2 z^{-2}}$