

A black and white photograph of the Tacoma Narrows Bridge, showing its suspension towers and cables. The bridge deck is visible, and the surrounding landscape includes trees and hills. The image is used as a background for the text.

Tacoma Bridge, 1940

Kmitání-oscilace

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Kmitání (oscilace).

Kmitání (oscilace) - opakující se změna hodnoty veličiny v čase v omezeném okolí **rovnovážné polohy** vlivem působící síly.

Rovnovážná poloha je poloha v níž na systém (těleso) nepůsobí žádná vnější síla.

Z hlediska časového průběhu pohybu hovoříme o kmitech:

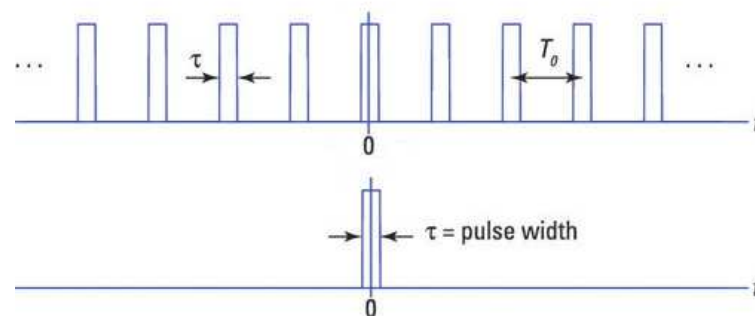
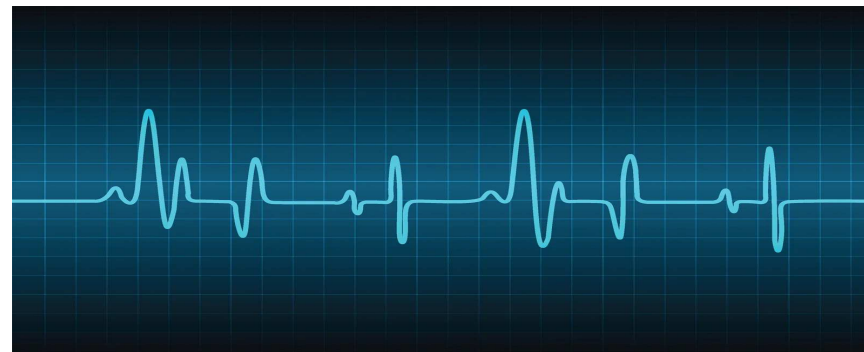
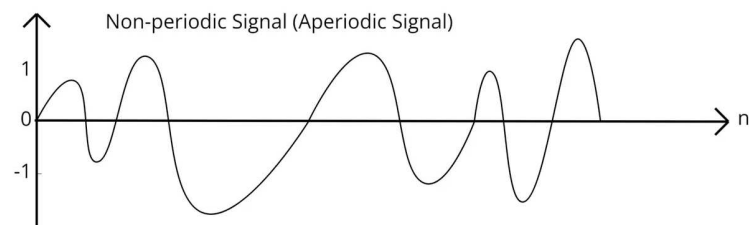
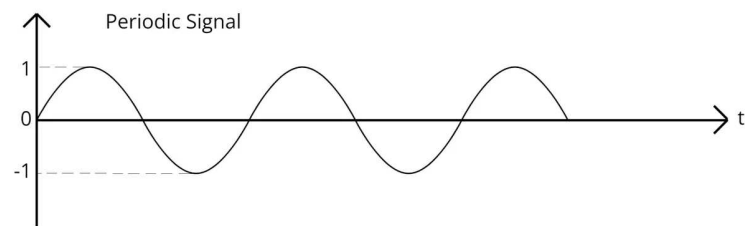
- **periodických** (harmonické, anharmonické)
- **aperiodických**

Z hlediska energie kmitajícího systému hovoříme o:

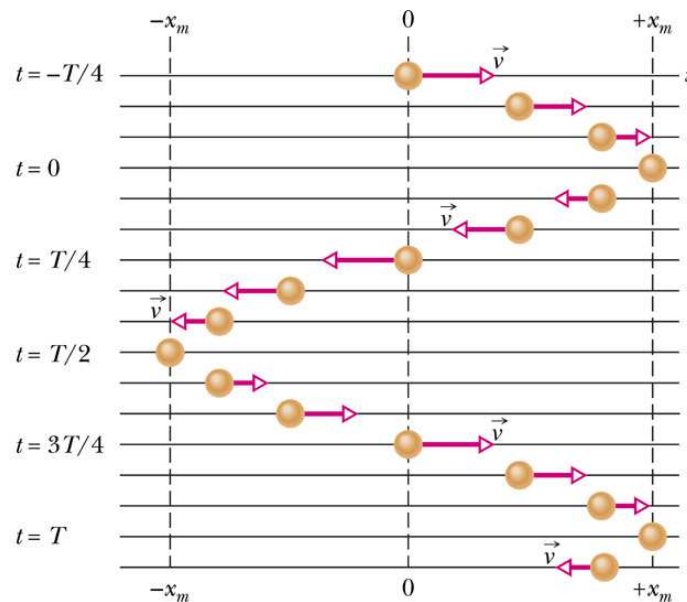
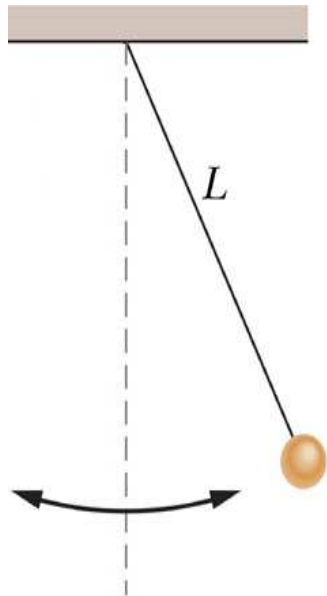
- **kmitech tlumených**
- **nucených**

Příkladem kmitů jsou pohyby planet jakýkoliv pohyb po kruhové dráze (periodická změna), hodinové kyvadlo, chemické oscilace, elektrické kmity, oscilace v biologii, oscilace mechanických systémů a další.

Příklady druhů kmitání.

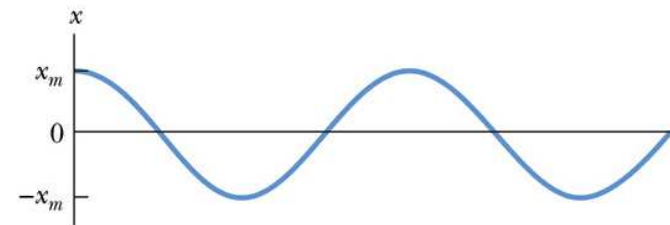


Harmonické kmity.



$$x(t) = \underbrace{x_m}_{\text{amplituda}} \cos\left(\underbrace{\omega t + \phi}_{\text{fáze}}\right)$$

výchylka



Periodické harmonické kmity jsou kmity kde výchylka je úměrná harmonické funkci času. Harmonická funkce je označení pro goniometrické funkce **sinus** a **cosinus**:

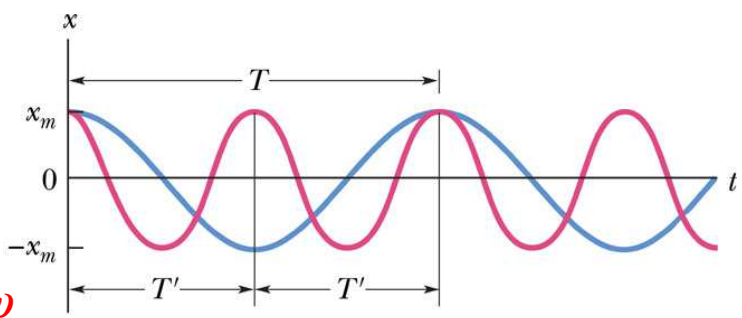
$$x(t) \approx \cos(\omega t + \phi), \quad x(t) \approx \sin(\omega t + \phi)$$

Jednoduchý harmonický kmit.

výchylka $x(t)$ fázová konstanta ϕ

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

amplituda x_m perioda T kruhová frekvence ω



Výchylka $x(t)$ - poloha bodu v čase t .

Amplituda x_m - maximální výchylka z rovnovážné polohy.

Perioda kmitání T - nejkratší doba po které je systém opět ve výchozím stavu. Jednotkou 1s.

Frekvence kmitání f , (ν - ný): Počet opakování (period) za jednotku času. Jednotkou je 1 1/s = 1 Hertz (1 Hz). Veličina ω je úhlová frekvence jednotku je radián/s. Platí rovnice:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \nu$$

Fázová konstanta ϕ udává počáteční výchylku čase $t = 0$. Jednotkou je 1 radián, 1 rad.

Rychlost a zrychlení harmonického kmitu.

Velikost rychlosti harmonického pohybu:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_m \sin \omega t$$

Amplituda rychlosti harmonického pohybu: ωx_m

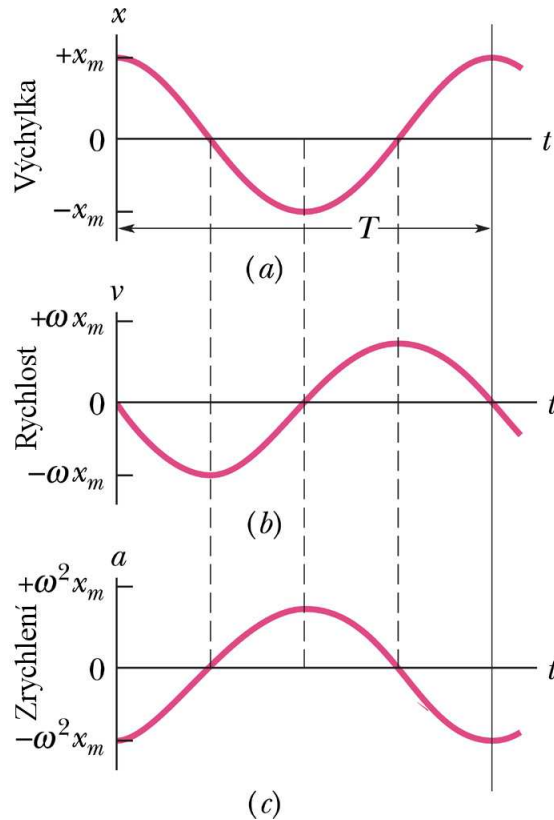
Rychlost harmonického pohybu pro $\phi = 0$:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos \omega t$$

Velikost zrychlení harmonického pohybu:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 x_m \cos \omega t = -\omega^2 x$$

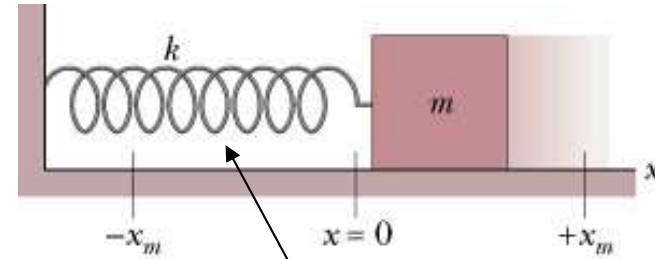
Amplituda zrychlení harmonického pohybu: $\omega^2 x_m$



Pohybová rovnice harmonických kmitů – volné kmity.

Vyjdeme z II. Newtonova zákona:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi) + x_0 \\ F &= m \frac{d^2}{dt^2} x(t) \\ a(t) &= \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 (x - x_0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F &= -m\omega^2 (x - x_0) \\ F &= -k(x - x_0) \end{aligned}$$



Za předpokladu že působící síla je lineární funkcí prodloužení (Hookův zákon) :

$$F = -m\omega^2 (x - x_0) = -k(x - x_0) \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Z předpoklad že síla pružnosti je lineární funkcí prodloužení vyplývá, harmoničnost kmitání. Tento předpoklad platí pouze pro malá prodloužení, či výchylky z rovnovážné polohy x_0 .

Energie harmonických kmitů.

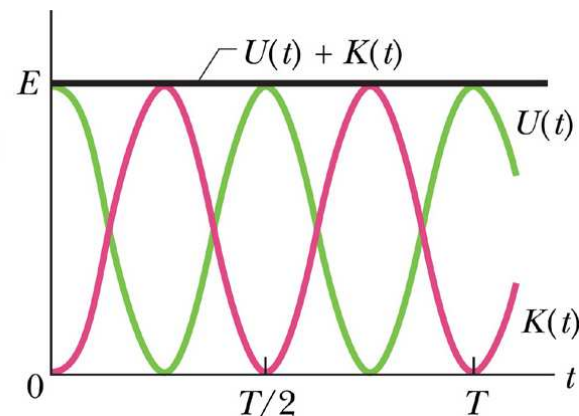
Celková mechanická energie harmonického pohybu E je součtem potenciální a kinetické energie E_{pot} a E_{kin} .

Potenciální energie E_{pot} :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Kinetická energie E_{kin} :

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

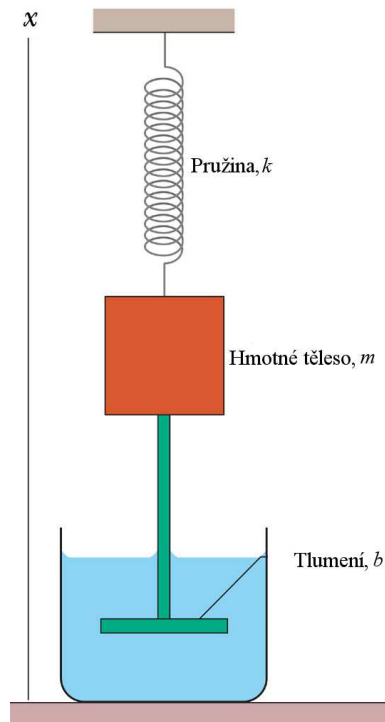


Celková mechanická energie E :

$$E = U + K = \frac{1}{2} kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} kx_m^2$$

Celková mechanická energie harmonických kmitů je konstantní, potenciální a kinetická energie se však vzájemně „přelévají“.

Tlumené harmonické kmitání.



Vnější odporující síla působící na kmitající systém, způsobuje postupné zmenšování amplitudy kmitu - tlumení kmitání. Modelovým příkladem tlumeného kmitajícího systému je svisle zavěšená pružina konstanty tuhosti k k níž je připevněno těleso hmotnosti m jehož část je ponořena kapaliny. Uvažujme tlumící sílu úměrnou rychlosti pohybu kmitajícího systému, B je tlumící konstanta.

$$F_{\text{tlumení}} = -Bv = -B \frac{dx}{dt} \quad F_{\text{elastická}} = -kx = -m\omega_0^2 x, \quad k = m\omega_0^2$$

Výsledná síla působící na těleso je: $F_{\text{net}} = -m\omega_0^2 x - 2mbv$

$$\text{Součinitel útlumu : } b = \frac{B}{2m} > 0$$

Pohybová rovnice tlumených kmitů :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - 2mb \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Obecné řešení rovnice tlumeného harmonického kmitání.

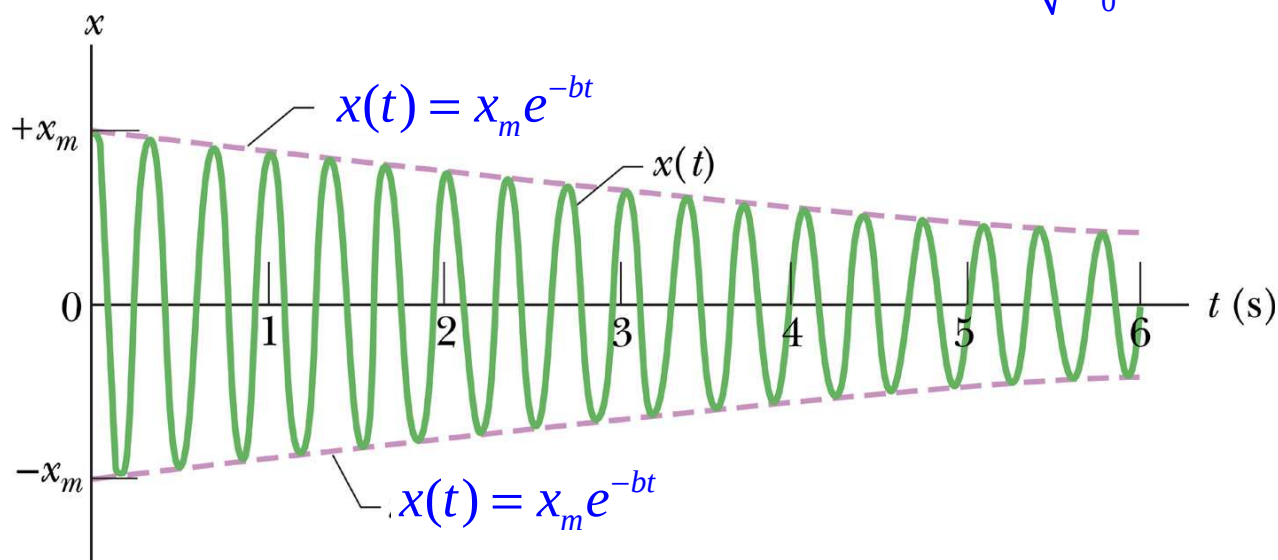
$$x(t) = x_m e^{-bt} \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

Amplituda tlumeného harmonického kmitání:

$$x_m e^{-bt}$$

Perioda tlumeného harmonického kmitání:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$



Řešení rovnice tlumeného harmonického kmitání - rozbor.

Výsledné chování tlumeného oscilátoru závisí na vzájemném poměru elastické a tlumící síly. Tedy na velikosti členů ve vztahu pro kruhovou frekvenci ω :

$$\text{Tlumení : } b^2 = \left(\frac{B}{2m} \right)^2, \quad b = \frac{B}{2m}$$

Kruhová frekvence vlastních kmitů netlumeného harmonického kmitu: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Tlumený harmonický kmit:

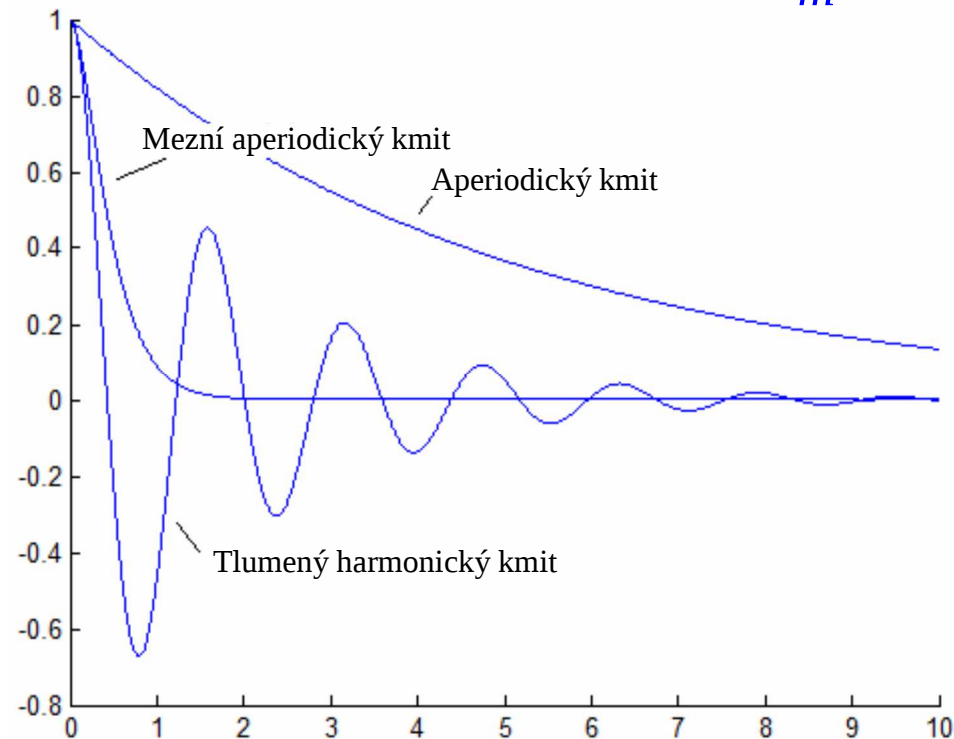
$$\omega_0^2 > b^2$$

Aperiodický kmit:

$$b^2 > \omega_0^2$$

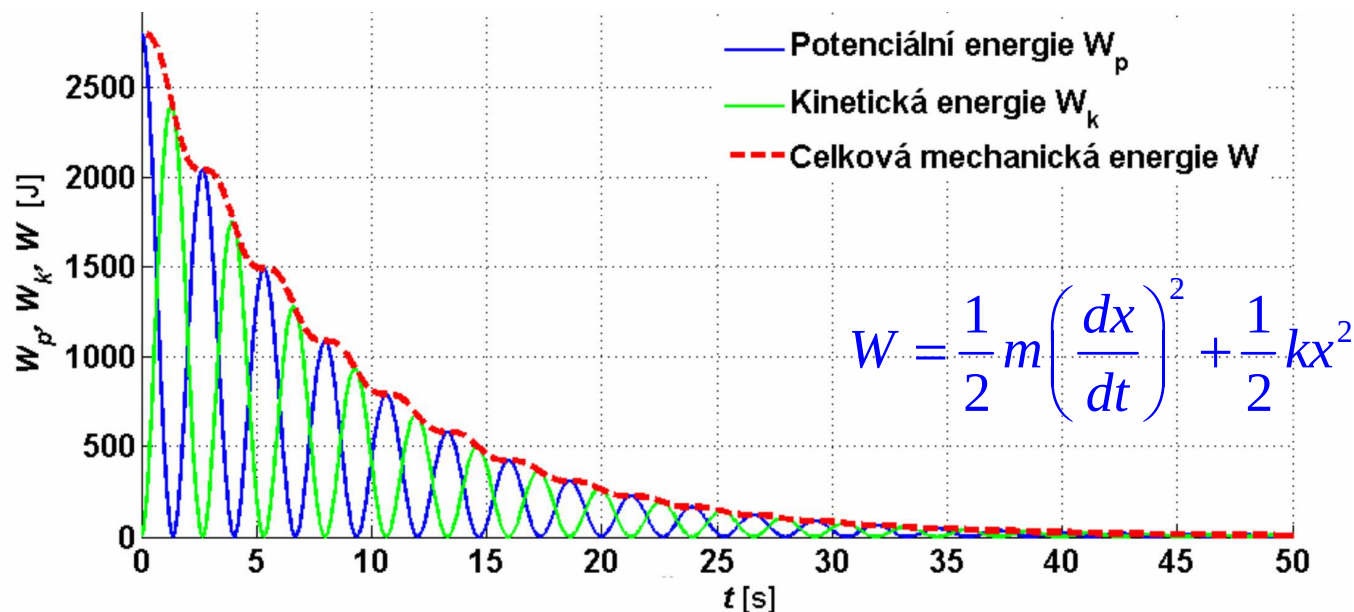
Mezní aperiodický kmit:

$$\omega_0^2 = b^2$$



Rovnice tlumeného harmonického kmitání - energie.

$$x(t) = x_m e^{-bt} \cos(\omega t + \phi)$$

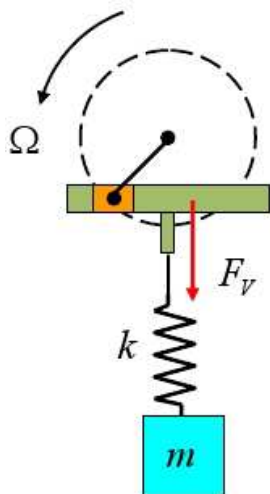


V případě slabého tlumení můžeme amplitudu x_m ve vztahu pro energii oscilátoru

nahradit $x(t) = x_m e^{-bt}$, pro celkovou energii tlumeného harmonického pohybu pak platí:

$$W = \frac{1}{2} kx_m^2 \rightarrow W(t) \approx \frac{1}{2} kx_m^2 e^{-bt}$$

Nucené harmonické kmitání, resonance.



K udržení kmitání soustavy je třeba aby na kmitající soustavu působila vnější budící síla $F_v(t)$ která bude z vnějšku dodávat energii. Nejjednodušší budící silou je harmonicky se měnící síla s kruhovou frekvencí Ω .

$$F_v(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

Pohybová rovnice nuceného oscilátoru:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_v(t) = -m\omega_0^2 x + F_0 \cos(\Omega t)$$

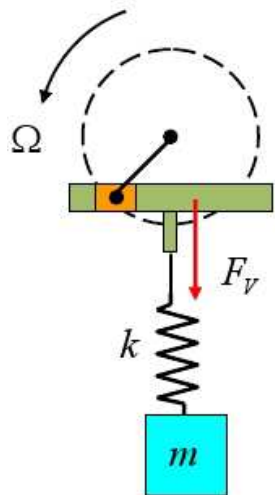
Elastická síla:

$$F_E = -kx = -m\omega_0^2 x$$

Řešením rovnice pro harmonickou budící sílu:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

Amplituda nuceného kmitání: $x_m = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$



Nucené harmonické kmitání, resonance.

Z řešení rovnice nuceného harmonického kmitání vyplývá pro amplitudu x_m :

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \Omega} x_m = \lim_{\omega_0 \rightarrow \Omega} \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \rightarrow \infty$$

Oscilátor kmitá se stejnou frekvencí jako budící síla, amplituda však závisí na rozdílu frekvenci budící síly Ω a vlastní frekvenci harmonického oscilátoru ω_0 . Pokud by kruhová frekvence budící síly byla rovna vlastní frekvenci oscilátoru pak by amplituda kmitu byla nekonečná.

V reálném systému je vždy přítomna tlumící síla $F_T(t)$. Tuto tlumící sílu je tedy třeba do pohybové rovnice zahrnout – **nucené tlumené harmonické kmitání**:

$$F_T = -Bv = -B \frac{dx}{dt} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + B \frac{dx}{dt} = F_0 \cos(\Omega t)$$

Nucené harmonické kmitání, resonance.

Řešením rovnice obecné pohybové rovnice nucených kmitů

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + B \frac{dx}{dt} = F_0 \cos(\Omega t)$$

za předpokladu $\omega_0^2 > b^2$ je funkce:

tlumené kmitání harmonické kmity

$$x(t) = \overbrace{x_m e^{-bt} \cos(\omega t + \phi)}^{\text{tlumené kmitání}} + \overbrace{A_v \sin(\Omega t + \alpha)}^{\text{harmonické kmity}}$$

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}} \frac{F_0}{m}$$

Amplituda A_v příspěvku
budící síly.

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

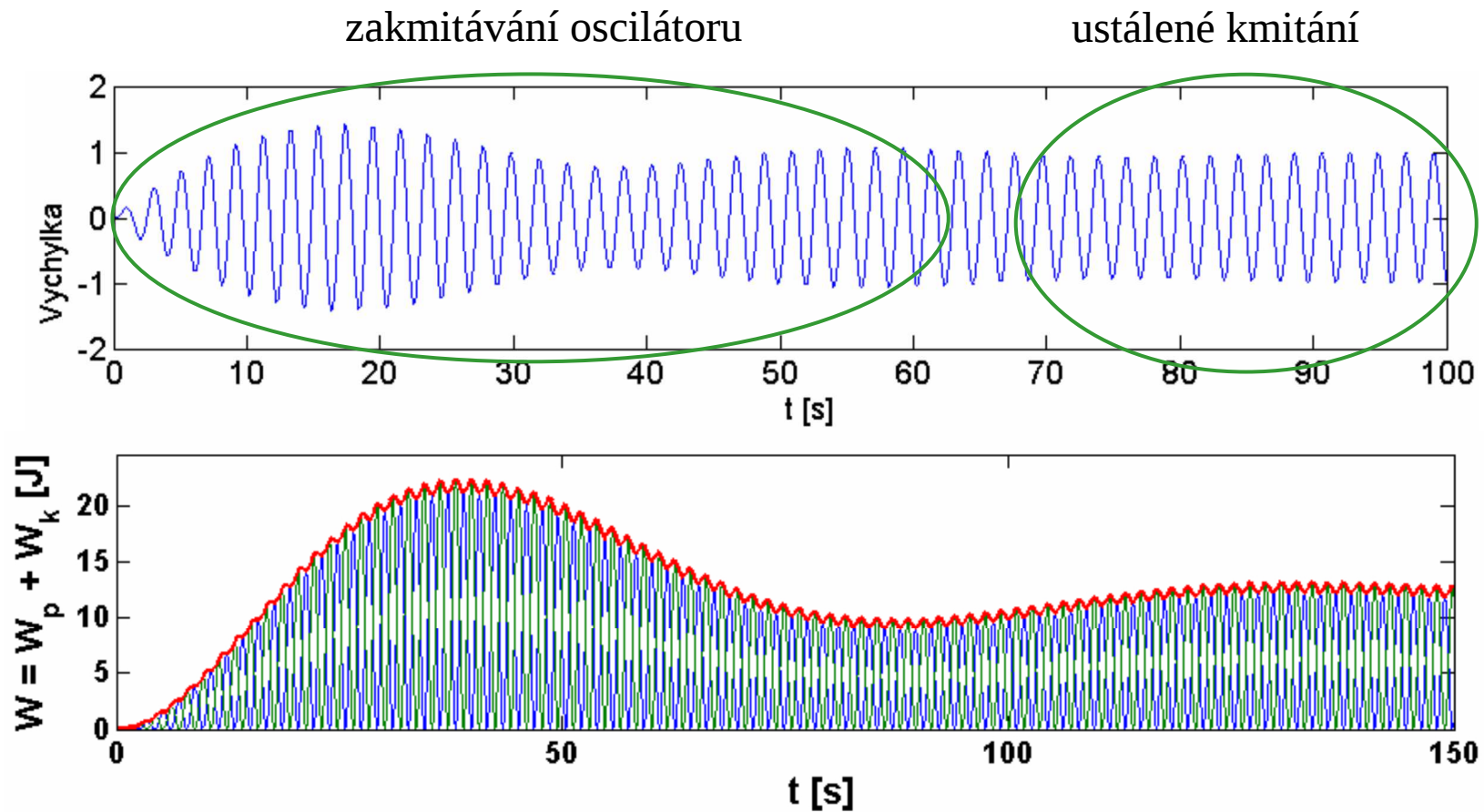
Fázový posun budící
síly a výchylky.

Nucené harmonické kmitání, resonance.

$$x(t) = \underbrace{x_m e^{-bt}}_{\text{tlumené kmitání}} \cos(\omega t + \phi) + \underbrace{A_v \sin(\Omega t + \alpha)}_{\text{harmonické kmity}}$$

tlumené kmitání

harmonické kmity



Nucené harmonické kmitání, rezonanční frekvence.

Amplituda A_V nucených kmitů je funkcí budící frekvence Ω :

$$A_V = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} \frac{F_0}{m}$$

Hledejme frekvenci Ω , pro níž bude amplituda A_V maximální **rezonanční frekvenci** Ω_R :

$$\frac{dA_V}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} \frac{F_0}{m} \right) = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$$

Rezonanční amplituda A_V :

$$A_{V_{\max}} = \frac{F_0}{2bm\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$

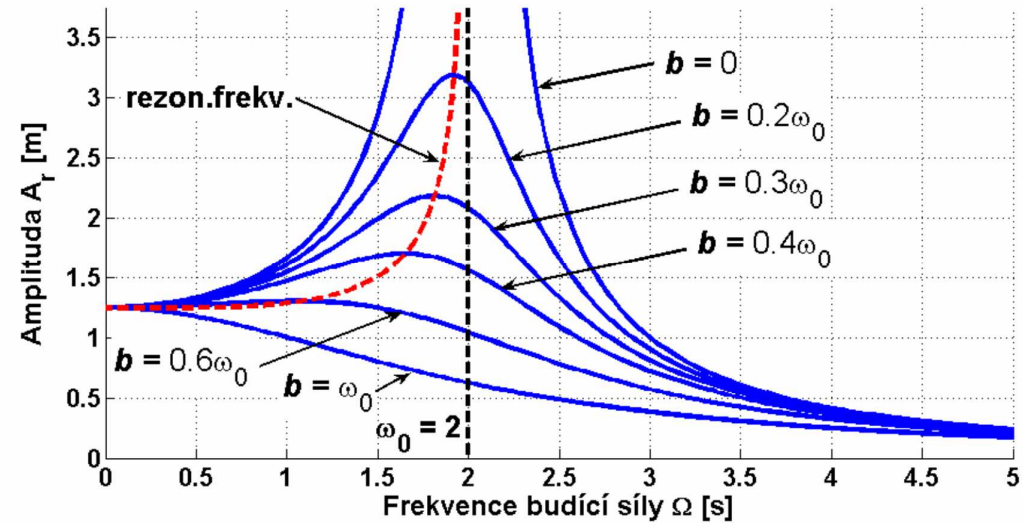
V praxi často bývá $b \ll \omega_0 \rightarrow \Omega_R \approx \omega_0$

Nucené harmonické kmitání, rezonanční křivka.

Rezonanční křivky:

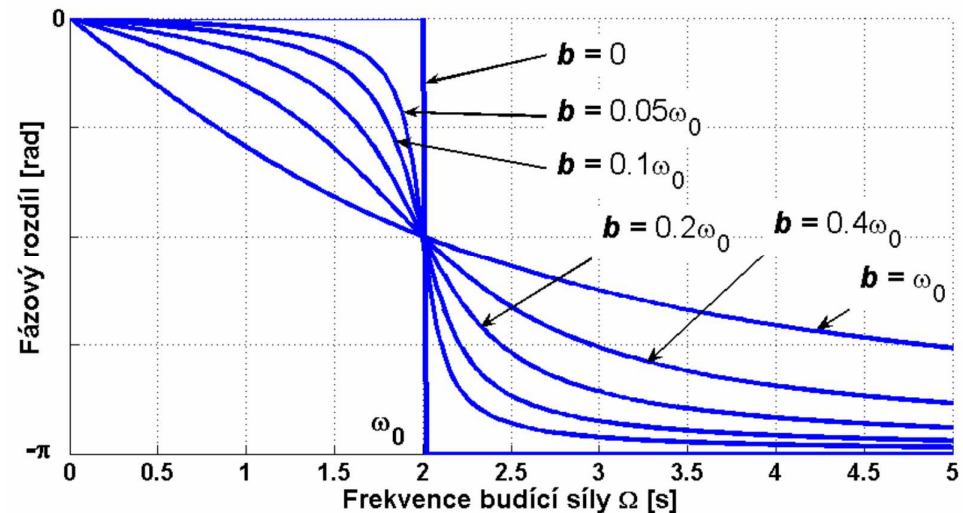
$$A_V = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} \frac{F_0}{m}$$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$$



Fázový posuv:

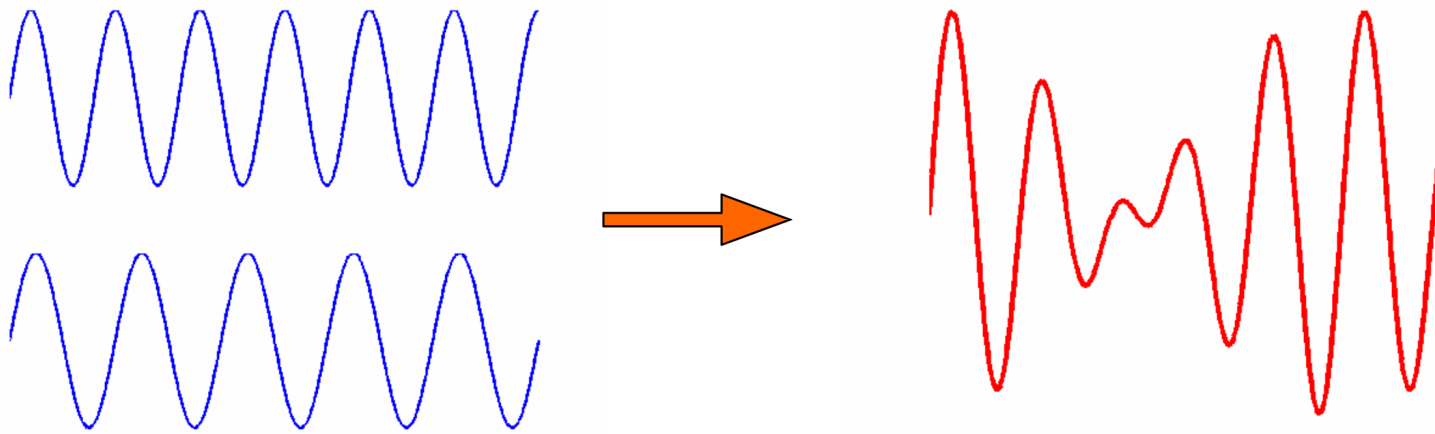
$$\alpha = \arctan \left(-\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$



Skládání kmitů.

Pohybová rovnice kmitání je lineární a platí pro ni princip superpozice.

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + B \frac{dx_i}{dt} + kx_i = F_i(t) \longrightarrow x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)$$



$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B \frac{dx_1}{dt} + kx_1 = F_1(t) \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + B \frac{dx_2}{dt} + kx_2 = F_2(t)$$

$$m \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} + B \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t)$$

Skládání kmitů stejného směru a stejné frekvence.

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= x_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \longrightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + x_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= x_{m1} \sin \omega t \cos \varphi_1 + x_{m1} \cos \omega t \sin \varphi_1 + \\ &\quad + x_{m2} \sin \omega t \cos \varphi_2 + x_{m2} \cos \omega t \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

amplituda

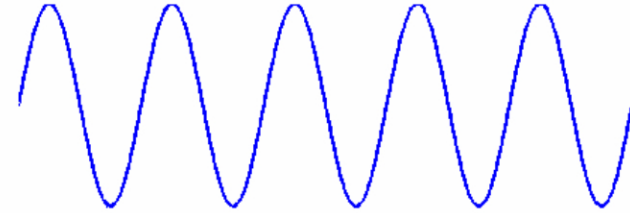
fázové posunutí

$$(x_m)^2 = (x_{m1})^2 + (x_{m2})^2 + 2(x_{m1})(x_{m2})\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

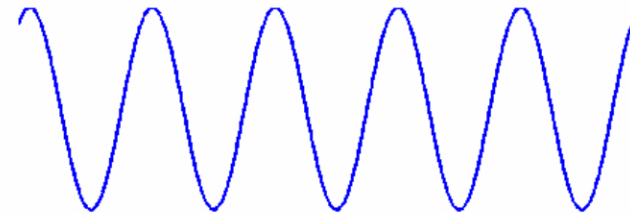
$$\tan \varphi = \frac{x_{m1} \sin \varphi_1 + x_{m2} \sin \varphi_2}{x_{m1} \cos \varphi_1 + x_{m2} \cos \varphi_2}$$

Skládání kmitů stejného směru a stejné frekvence.

$$x_1(t) = x_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$



$$x_2(t) = x_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$



Výsledný kmit je periodický se stejnou frekvencí.

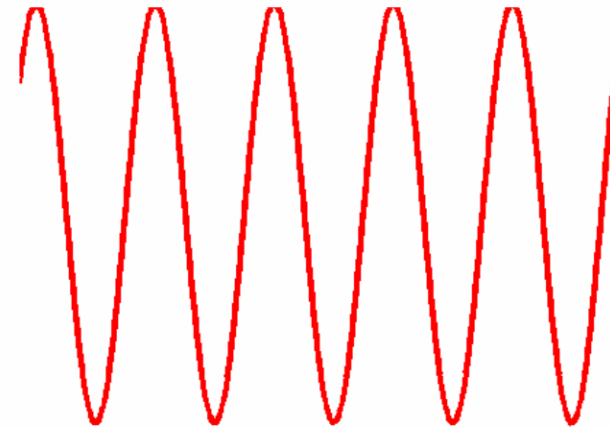
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

S amplitudou

$$(x_m)^2 = (x_{m1})^2 + (x_{m2})^2 + 2(x_{m1})(x_{m2})\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

a fázovým posunutím

$$\tan \varphi = \frac{x_{m1} \sin \varphi_1 + x_{m2} \sin \varphi_2}{x_{m1} \cos \varphi_1 + x_{m2} \cos \varphi_2}$$



Skládání kmitů stejného směru a blízkých frekvencí.

$$x_1(t) = x_{m1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = x_{m2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Předpoklady: $x_m(t) = x_{m1} = x_{m2}$

$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_m [\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \alpha \frac{\alpha - \beta}{2}$$

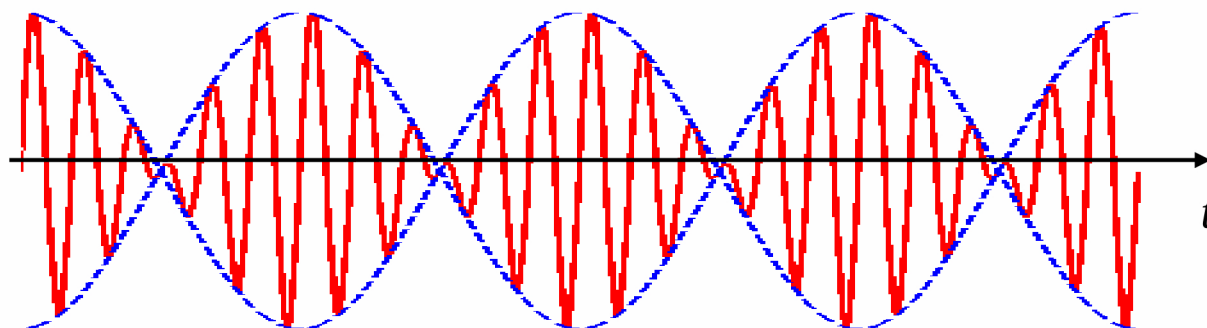
$$x(t) = \underbrace{2x_m \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)}_{\text{amplituda.}} \underbrace{\sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)}_{\text{harmonické kmitání.}}$$

Výsledné kmitání je periodické s proměnnou amplitudou – rázy, s frekvencí

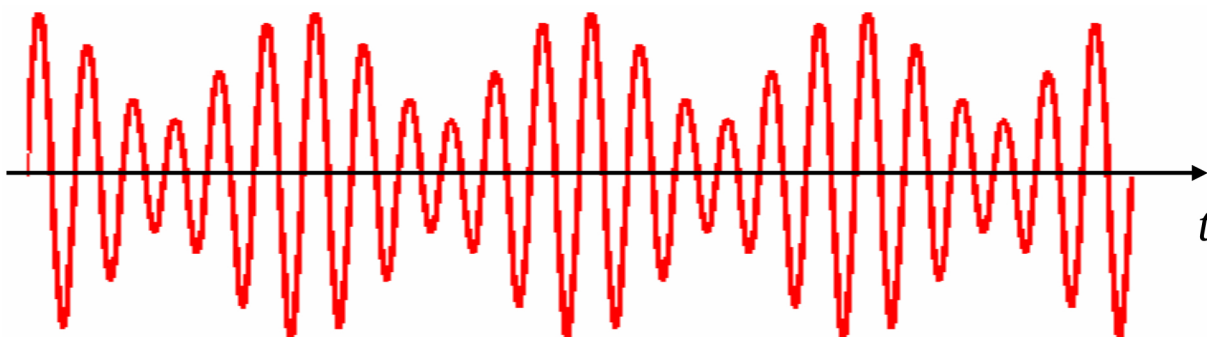
$$\omega = |\omega_1 - \omega_2|$$

Skládání kmitů stejného směru a blízkých frekvencí.

$$x_m(t) = x_{m1} = x_{m2}$$



$$x_{m1} \neq x_{m2}$$



Skládání kolmých kmitů – Lissajousovy obrazce .

Skládání navzájem kolmých harmonických kmitů.

$$x(t) = x_m \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = y_m \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Skládání navzájem kolmých harmonických kmitů za předpokladu: $\omega = \omega_1 = \omega_2$

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_1) \quad y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Pohyb je omezen na prostor:

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)] \rightarrow r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \rightarrow |x(t)| \leq x_m \quad |y(t)| \leq y_m$$

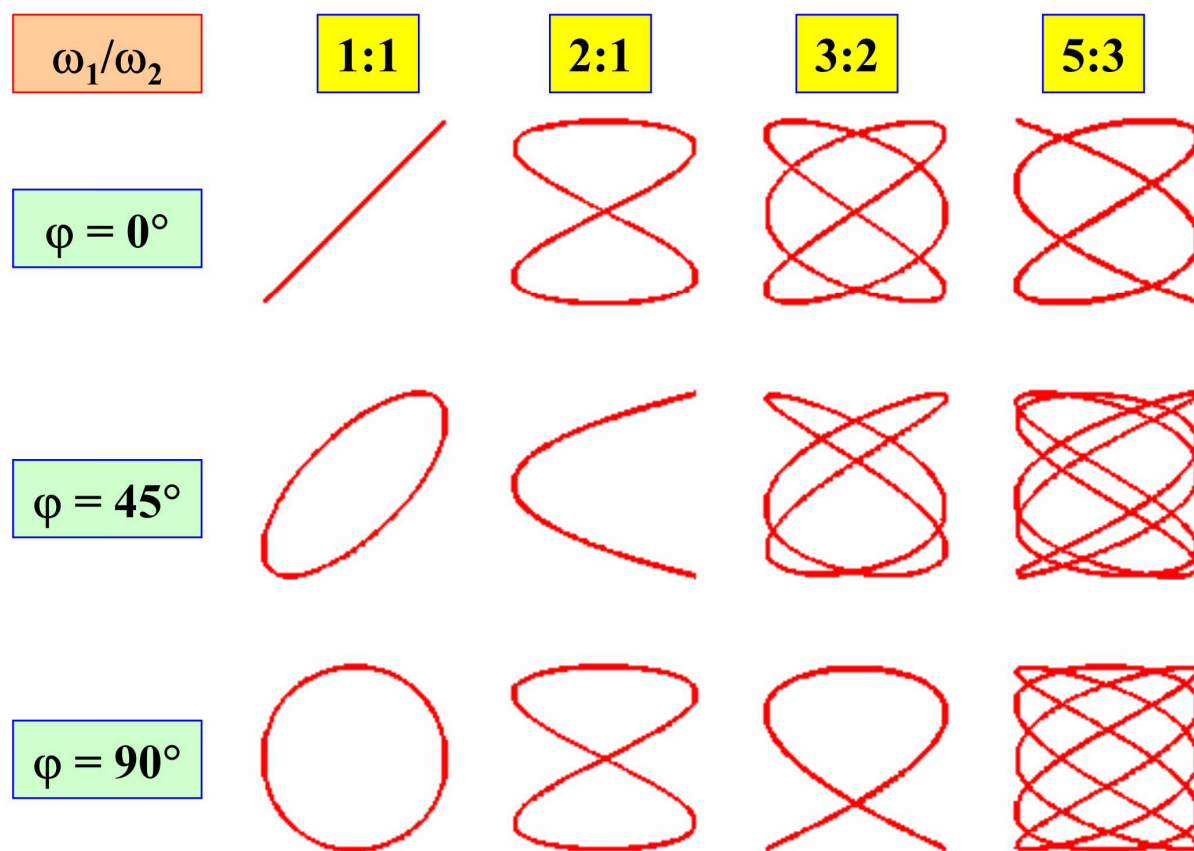
Vyloučením času získáme trajektorii kmitů, za předpokladu $\omega = \omega_1 = \omega_2$ obecná rovnice elipsy:

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_m}\right)^2 - 2\frac{xy}{x_m y_m} \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Skládání kolmých kmitů – Lissajousovy obrazce .

Výsledné kmitání je periodické s periodou rovnou nejmenšímu společnému násobku dílčích period pokud platí:

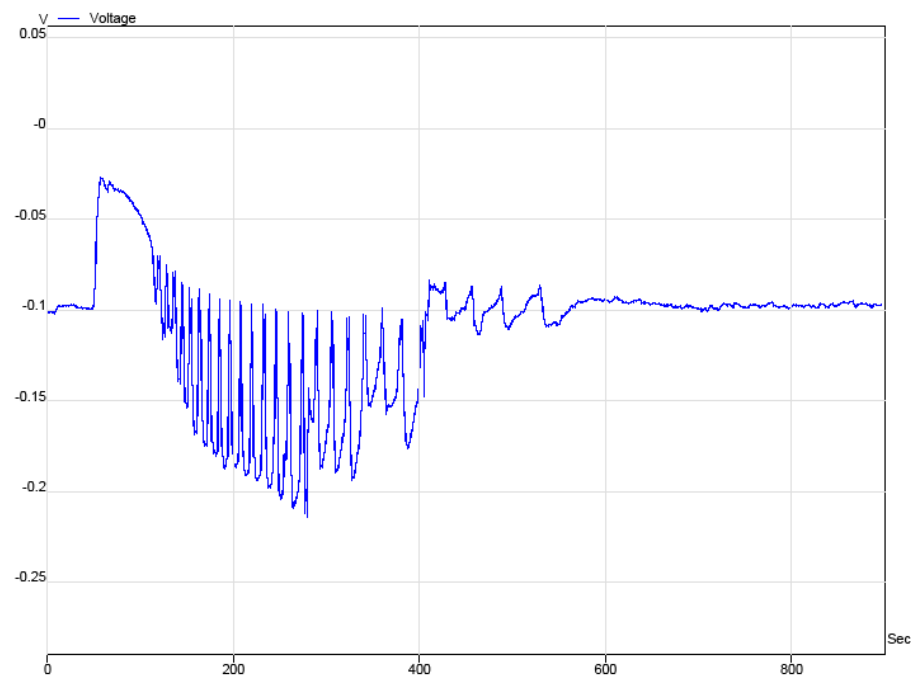
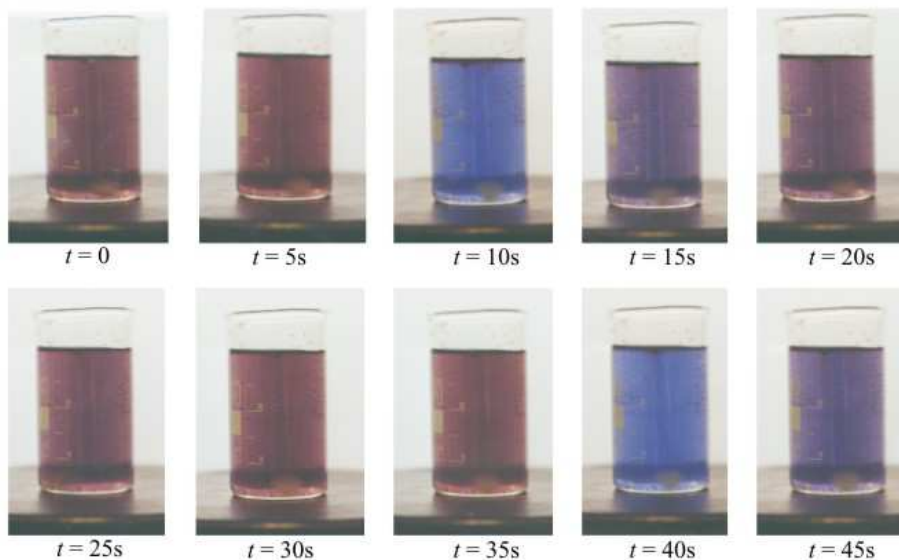
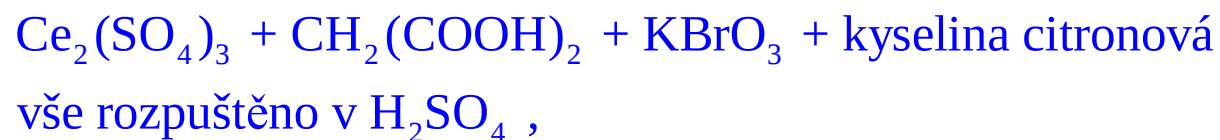
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$$



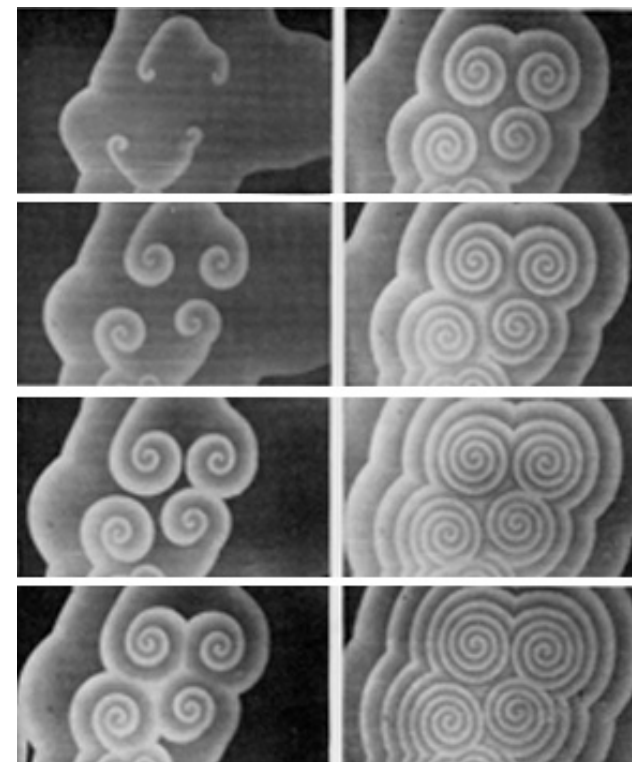
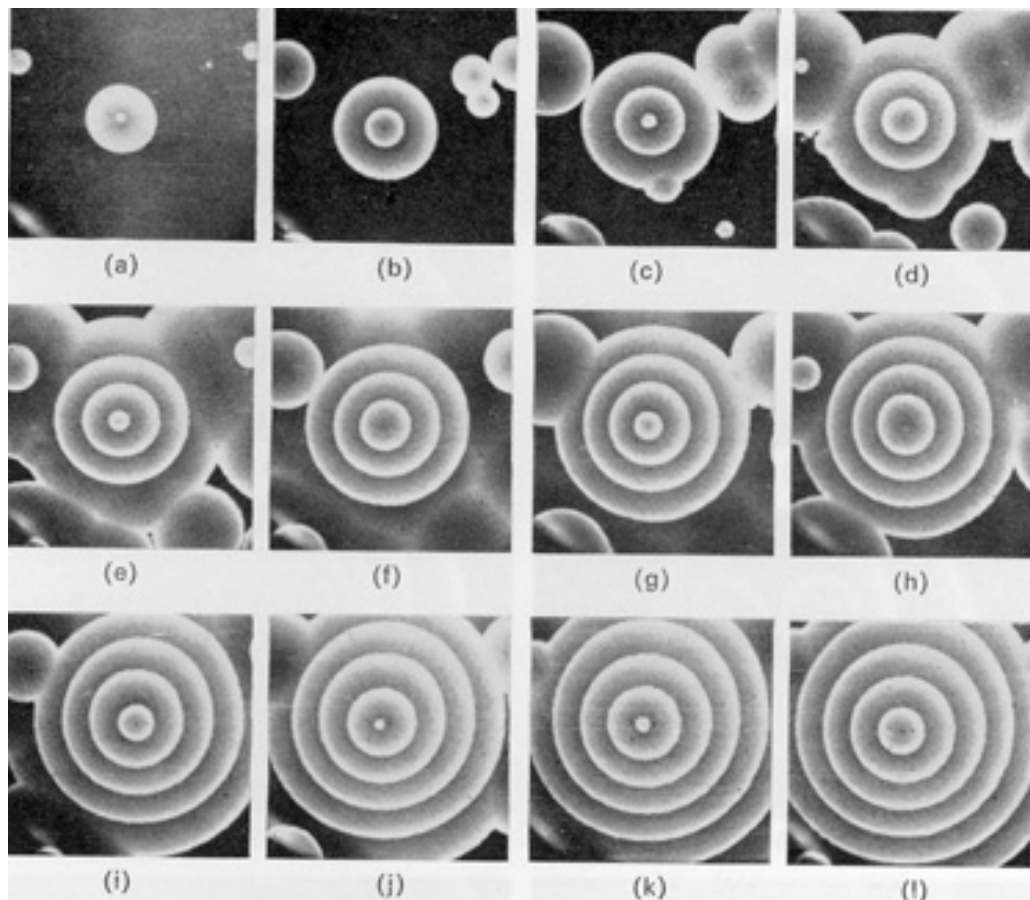
Oscilující chemické reakce.



Objeveny v roce 1951 Borisem Bělousovem (1893 – 1970).
Významný podíl na studiu oscilujících reakcí má Bělousovův
žák Anatol Markovich Zhabotinsky (1938 – 2008).
Typickým příkladem je reakce sloučenin:



Oscilující chemické reakce – prostorové struktury.



Oscilující chemické reakce – reakční mechanismus.

Mechanism of the Oscillating Reaction

Component Processes. As a result of the evidence discussed above, we propose that the mechanism of the oscillating reaction can be described by ten processes, each of which is elementary or at least has clearly defined kinetics. Unless a double arrow is included in an equation, the process may be regarded as virtually irreversible under our conditions.

