

Hmotný střed.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Snads

Feynmanovy přednášky z fyziky

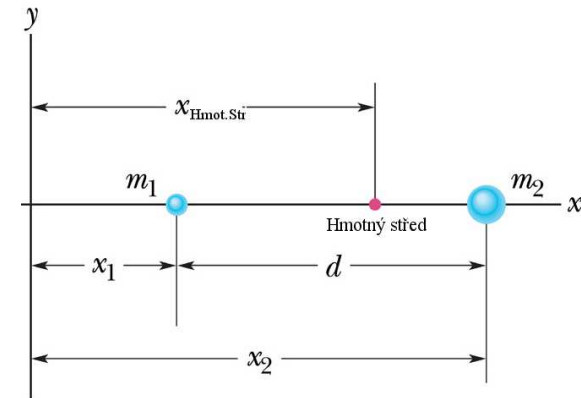
Fragment 2000

Hmotný střed

systemu částic je bodem, který se pohybuje jako kdyby veškerá tíha tělesa byla soustředěna v tomto bodě a vnější síly působící na systém hmotných těles působí právě v tomto bodě.

Poloha hmotného středu pro dva hmotné body na přímce:

$$x_{Hmot.Str.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



Poloha hmotného středu n hmotných bodů na přímce:

$$x_{Hmot.Str.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$$

Jsou-li hmotné body rozmístěny v prostoru pak je třeba vypočítat polohu hmotného středu pro všechny tři souřadnice

$$x_{Hmot.Str.} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{Hmot.Str.} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{Hmot.Str.} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$
$$\vec{r}_{Hmot.Str.} = x_{Hmot.Str.} \vec{i} + y_{Hmot.Str.} \vec{j} + z_{Hmot.Str.} \vec{k}$$

Hmotný střed pevného tělesa

Reálná tělesa obsahují velmi velký počet částic, výpočet hmotného středu je proto obtížný. Za předpokladu spojitého a homogenního rozložení hmoty v tělese nahradíme součty přes jednotlivé hmotné body integrálem:

$$x_{\text{Hmot.Str.}} = \frac{1}{M} \int x dm, \quad y_{\text{Hmot.Str.}} = \frac{1}{M} \int y dm, \quad z_{\text{Hmot.Str.}} = \frac{1}{M} \int z dm$$

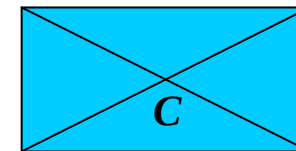
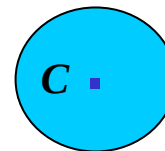
Je-li těleso pouze z jednoho druhu materiálu pak zavedením substituce ze vztahu:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \rightarrow dm = \frac{M}{V} dV$$

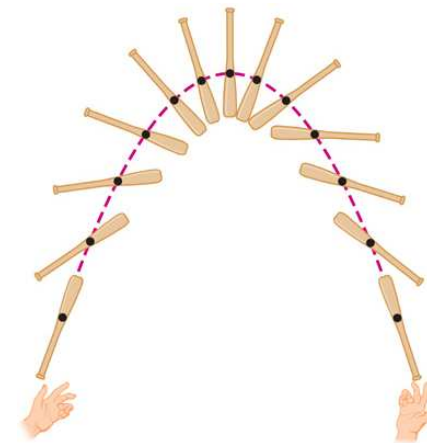
Souřadnice hmotného středu spojitého homogenního tělesa z jednoho druhu materiálu:

$$x_{\text{Hmot.Str.}} = \frac{1}{V} \int x dV, \quad y_{\text{Hmot.Str.}} = \frac{1}{V} \int y dV, \quad z_{\text{Hmot.Str.}} = \frac{1}{V} \int z dV$$

Hmotné středy symetrických geometrických útvarů:

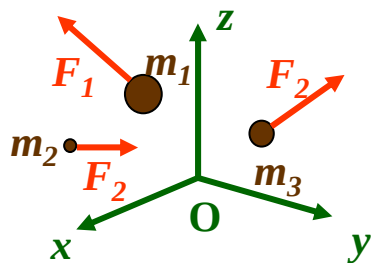


Hmotný střed systému částic se pohybuje tak jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa a výsledná vnější síla působící na těleso daná vektorovým součtem všech vnějších sil působících na těleso působí právě v hmotném středu.



Hmotný střed kuželu (černý bod na obrázku) vrženého od vlivem gravitační síly se pohybuje po parabolické dráze.

Newtonův zákon síly pro systém více částic.



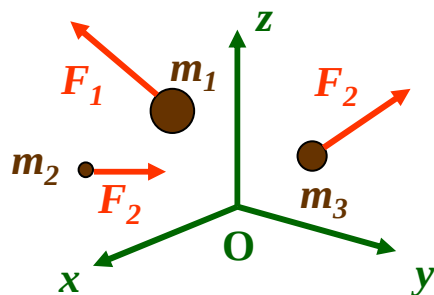
Máme mechanický systém n hmotných částic $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Poloha částic a hmotného středu je určena polohovými vektory $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$ a $\mathbf{r}_{\text{Hmot.Str.}}$. Z definice hmotného středu vyplývá:

$$M\vec{r}_{\text{Hmot.Str.}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots + m_n\vec{r}_n$$

Derivací obou stran rovnice podle času dostaneme:

$$M\vec{a}_{\text{Hmot.Str.}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots + m_n\vec{a}_n$$

Zde $\mathbf{a}_{\text{Hmot.Str.}}$ je zrychlení s nímž se pohybuje hmotný střed, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ jsou zrychlení jednotlivých částic systému.



$$M\vec{a}_{\text{Hmot.Str.}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots + m_n\vec{a}_n$$

Vztah přepíšeme do tvaru:

$$\begin{aligned} M\vec{a}_{\text{Hmot.Str.}} &= m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots + m_n\vec{a}_n \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n \end{aligned}$$

Sílu $\vec{F}_i$ můžeme rozložit na dvě složky; vnitřní a aplikovaná síla: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{Vnitřní}} + \vec{F}_i^{\text{Apl.}}$

Po dosazení a srovnání členů:

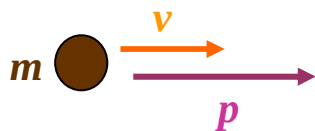
$$M\vec{a}_{\text{Hmot.Str.}} = (\vec{F}_1^{\text{Apl}} + \vec{F}_1^{\text{Vnit}}) + (\vec{F}_2^{\text{Apl}} + \vec{F}_2^{\text{Vnit}}) + (\vec{F}_3^{\text{Apl}} + \vec{F}_3^{\text{Vnit}}) + \dots + (\vec{F}_n^{\text{Apl}} + \vec{F}_n^{\text{Vnit}}) \rightarrow$$

$$M\vec{a}_{\text{Hmot.Str.}} = (\vec{F}_1^{\text{Apl}} + \vec{F}_2^{\text{Apl}} + \vec{F}_3^{\text{Apl}} + \dots + \vec{F}_n^{\text{Apl}}) + (\vec{F}_1^{\text{Vnit}} + \vec{F}_2^{\text{Vnit}} + \vec{F}_3^{\text{Vnit}} + \dots + \vec{F}_n^{\text{Vnit}})$$

Součet sil v první závorce je součet všech vnějších sil působících na systém hmotných částic, součet sil v druhé závorce je roven v důsledku platnosti zákona akce a reakce nule. Potom píšeme:

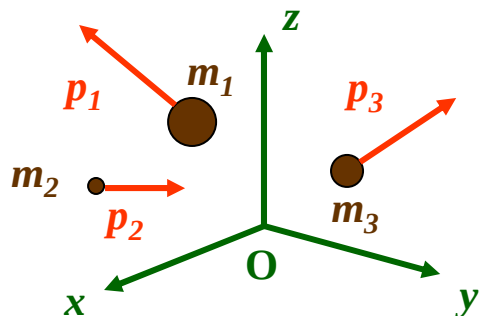
$$\begin{aligned} M\vec{a}_{\text{Hmot.Str.}} &= \vec{F}_{\text{Net}}^{\text{Apl}} \\ F_{\text{Net},x} &= Ma_{\text{Hmot.Str.},x}, F_{\text{Net},y} = Ma_{\text{Hmot.Str.},y}, F_{\text{Net},z} = Ma_{\text{Hmot.Str.},z} \end{aligned}$$

Hybnost systému hmotných částic.



Hybnost částice hmotnosti m pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$

Hybnost $\mathbf{P}$ systému hmotných částic majících hybnost $\mathbf{p}_i$:



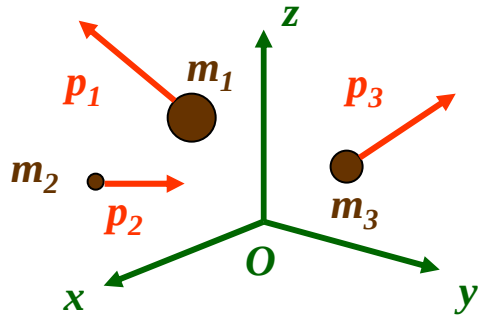
$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = \\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots + m_n\vec{v}_n &= M\vec{v}_{\text{Hmot.Str.}}\end{aligned}$$

Celková hybnost systému částic je rovna součinu celkové hmotnosti systému M hmotných částic násobený rychlostí hmotného středu $\mathbf{v}_{\text{Hmot.Str.}}$.

Celková hybnost systému hmotných částic $\mathbf{P}$ se mění pouze v důsledku působení celkové vnější síly $\mathbf{F}_{\text{Net}}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{Net}}$$

Zachování hybnosti systému hmotných částic



Je-li celková vnější síla působící na systém hmotných částic nulová, pak celková hybnost systému hmotných částic je konstantní.

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{const.}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{celková hybnost systému} \\ \text{hmotných částic v čase } t_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{celková hybnost systému} \\ \text{hmotných částic v čase } t_f \end{array} \right]$$