



# Elektrický potenciál

**Přednášející:**

**RNDr. František Adamec, CSc.**

**Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích**

**Na základě učebnic:**

**Halliday, Resnick**

**Fundamentals of Physics 8<sup>th</sup> Edition, Wiley 2005**

**Feynman, Leighton, Sands**

**Feynmanovy přednášky z fyziky**

**Fragment 2000**

## Potenciální energie náboje v elektrickém poli I.

Elektrické náboje rozložené v prostoru na sebe v závislosti na jejich náboji působí přitažlivou nebo odpudivou silou. Systému několika nábojů rozložených v prostoru lze přiřadit potenciální energii spojenou s jejich vzájemnou polohou  $U_i$ . Změna polohy libovolného náboje v soustavě nábojů změní potenciální energii soustavy na  $U_f$ . Změna potenciální energie  $\Delta U$  je spojena s prací, kterou je třeba vykonat na přenesení náboje v elektrickém poli ostatních nábojů:

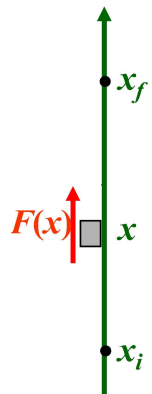
$$\Delta U = U_f - U_i = - W$$

Elektrické pole je konzervativní, tudíž práce, vykonaná při přenesení náboje mezi dvěma různými místy v elektrickém poli nezávisí na dráze, kterou náboj prochází.

Obvykle jako výchozí referenční konfiguraci soustavy nábojů volíme soustavu, kde jsou všechny náboje vzájemně odděleny nekonečnou vzdáleností. Potenciální energie referenční soustavy klademe rovnu nule. Vezměme systém několika nekonečně vzdálených nábojů, tyto náboje přenesme tak, aby vzdálenosti mezi náboji byly konečné a náboje tak na sebe vzájemně silově působily. Potenciální energie systému nekonečně vzdálených nábojů  $U_i = 0$ , naopak potenciální energie konečné systému interagujících  $U_f \neq 0$ . Výsledná potenciální energie systému nábojů rozložených v konečné vzdálenosti pak je rovna

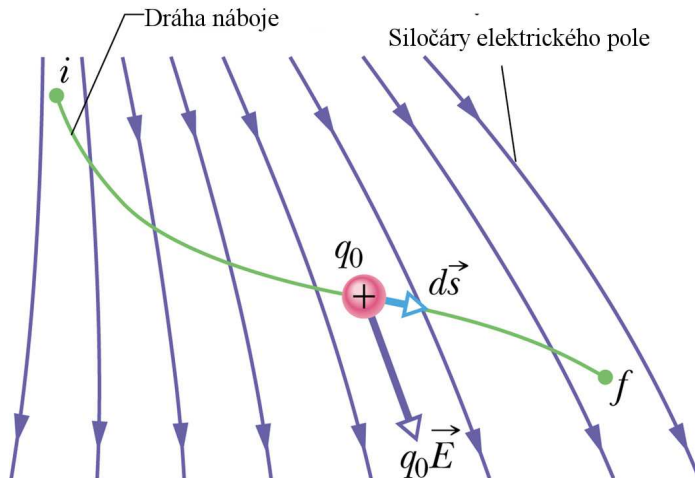
$$U = - W_{\infty}$$

## Potenciální energie náboje v elektrickém poli II.



Změna potenciální energie tělesa při jeho přemístění z místa o souřadnici  $x_i$  do místa o souřadnici  $x_f$  v silovém poli je rovna záporně vzaté práci vykonané při přemístění tělesa z místa  $x_i$  do místa  $x_f$ :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = -\int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$



Vložíme-li testovací náboj  $q_0$  do elektrického pole intenzity  $\mathbf{E}$ , pak na tento náboj bude působit působí síla  $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ .

Záporně vzatá práce vykonaná při přemístění náboje  $q_0$  mezi místy  $i$  (výchozí poloha) a  $f$  (konečná poloha) je rovna rozdílu potenciálních energií  $U_f$  a  $U_i$ :

$$U_f - U_i = \Delta U = -W_{i \rightarrow f} = -\int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow \Delta U = -q_0 \int_{x_i}^{x_f} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

## Elektrický potenciál I.

Potenciální energie nabité částice v elektrickém poli závisí na velikosti náboje částice. Proto je užitečné, zavést veličinu, která je na velikosti náboje nezávislá, tedy vztáhnout potenciální energii na jednotkový náboj. Tato veličina je pak charakteristická pouze pro elektrické pole a není závislá na velikosti náboje do pole vloženého. Potenciální energii jednotkového náboje v libovolném místě v elektrickém poli nazýváme **elektrický potenciál**  $V$ :

$$V = \frac{U}{q}$$

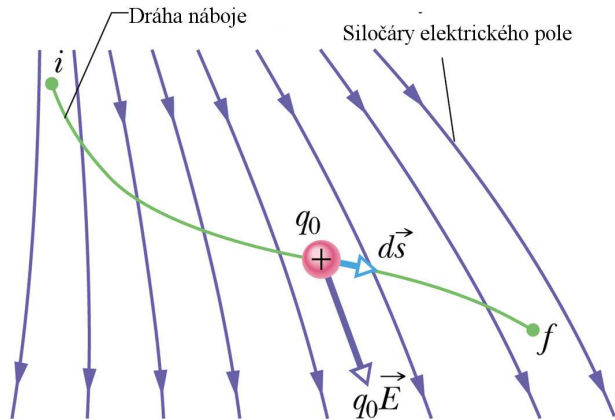
**Elektrický potenciál** je skalární veličina. Jednotkou elektrického potenciálu je **1 Volt**, [1V].  $1 \text{ Volt} = 1 \text{ JC}^{-1}$ . Rozdíl potenciálů  $\Delta V$  mezi místy  $i$  a  $f$  je roven:

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q} \rightarrow = -\frac{W}{q}$$

Jelikož klademe potenciál referenčního systému nábojů v nekonečnu  $U_i = 0$ , pak definujeme potenciál elektrického pole:

$$V = -\frac{W_{\infty}}{q}$$

## Elektrický potenciál II.



Změna potenciální energie  $\Delta U$  elektrického náboje  $q_0$  v elektrickém poli intenzity  $\mathbf{E}$  při změně jeho polohy z místa  $i$  do  $f$  je funkcí intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$ , polohy a velikosti přenášeného náboje  $q_0$ . Mezi intenzitou elektrického pole, polohou, velikostí přenášeného náboje, vykonanou prací a potenciální energií platí vztahy:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = -q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Vztáhneme-li **potenciální energii**  $U$  (nebo její **změnu**  $\Delta U$ ) na jednotkovou velikost přenášeného náboje  $q_0$  získáme veličinu jejíž velikost již není závislá na velikosti přenášeného náboje a je charakteristikou libovolného místa v elektrickém poli, tuto veličinu nazýváme **elektrický potenciál**  $V$ , v případě změny potenciální energie  $\Delta U$  vztažené k jednotkovému náboji hovoříme o **změně elektrického potenciálu**  $\Delta V$ :

$$\frac{\Delta U}{q_0} = \frac{U_f}{q_0} - \frac{U_i}{q_0} = V_f - V_i = \Delta V \rightarrow \left. \begin{array}{l} \Delta V = V_f - V_i = -\frac{W_{i \rightarrow f}}{q_0} \\ W_{i \rightarrow f} = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} \end{array} \right\} \Delta V = V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

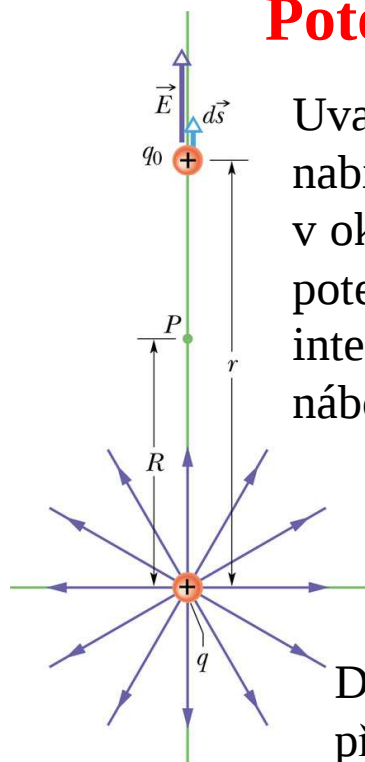
Rozdíl potenciálů mezi místy  $i$  a  $f$ :

$$\Delta V = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Hodnoty elektrického potenciálu v místech  $V_i$  a  $V_f$  je třeba určit vzhledem k nějakému referenčnímu bodu. Jelikož nás ale vždy zajímají pouze změny potenciálu elektrického pole  $\Delta V$ , můžeme tento referenční bod zvolit libovolně. Logické je vybrat místo, kde je potenciál nulový. Proto bereme za referenční bod hodnotu potenciálu v nekonečnu. Klademe  $V_i = V_\infty = 0$ . Pro hodnotu elektrického potenciálu v libovolném bodě  $P$  pak platí:

$$V_P = - \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

## Potenciál elektrického pole bodového náboje.



Uvažujme testovací náboj  $q_0$ , umístěný v bodě  $P$  vzdáleném  $R$  od kladně nabitého náboje  $q$ . Tento náboj přesuňme z bodu  $P$  do  $\infty$ . Elektrické pole v okolí bodového náboje je kulově symetrické, tudíž můžeme při výpočtu potenciálu elektrického pole  $ds$  nahradit  $dr$ , úhel  $\theta$  mezi vektorem intenzity  $\mathbf{E}$  a  $d\mathbf{s}$  je roven 0,  $\cos 0 = 1$ , po dosazení za intenzitu bodového náboje dostaneme:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E \cos \theta ds \rightarrow E dr \\ E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \end{aligned} \right\} E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Dosazením do vztahu za předpokladu, že  $V_f = V_\infty = 0$  a  $V_i = V$  a přechodem od  $R$  k libovolné poloze  $r$  dostaneme:

$$\int \frac{dr}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$V_f - V_i = \int_R^\infty E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \rightarrow$$

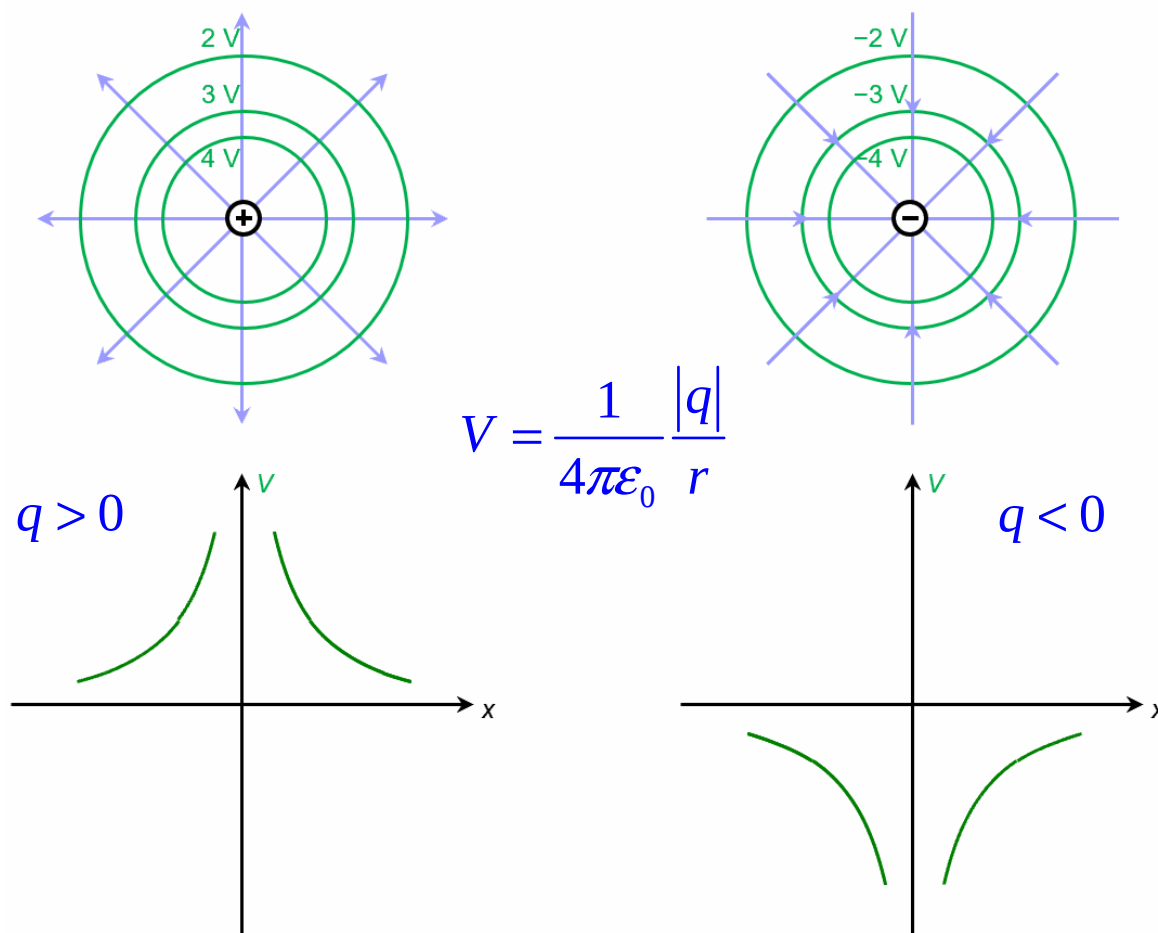
$$0 - V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

Vztah pro rozložení elektrického potenciálu v okolí bodového náboje

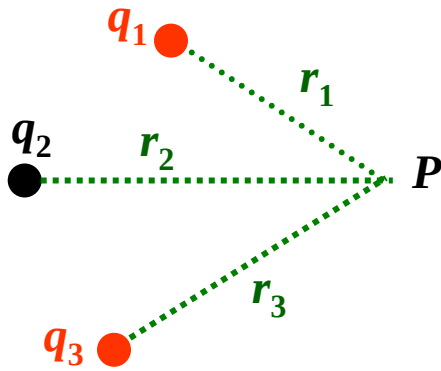
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

## Potenciál elektrického pole bodového náboje.

Zobrazení průběhu elektrického potenciálu bodových nábojů. Platí, že pro hodnoty  $r \rightarrow 0$  se hodnota potenciálu  $V$  blíží k nekonečnu,  $V \rightarrow \infty$  ( $-\infty$ ).



## Potenciál elektrického pole více bodových nábojů.



Z platnosti principu superpozice pro elektrické pole lze snadno určit elektrický potenciál pole vytvořeného větším počtem nábojů. Elektrické potenciály polí vytvářených jednotlivými bodovými náboji  $q_1$ ,  $q_2$  a  $q_3$  jsou:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}, \quad V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_3}$$

Z principu superpozice  $V = V_1 + V_2 + V_3$  pro potenciál elektrického pole tří bodových nábojů dostaneme vztah:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_3}$$

Zobecněním vztahu pro potenciál elektrického pole  $n = 1, 2, \dots$  nábojů je vztah:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

## Potenciál elektrického pole dipólu.

Elektrický dipól je tvořený náboji  $+q$  a  $-q$  ležícími ve vzdálenosti  $d$ . Z principu superpozice vyplývá pro elektrický potenciál dipólu v bodě  $P$  vzdáleném  $r$  od středu dipólu rovnice:

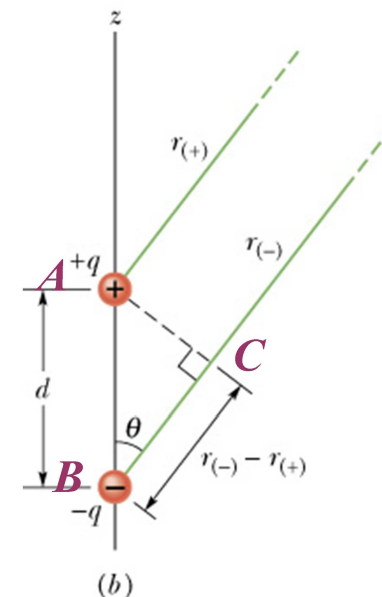
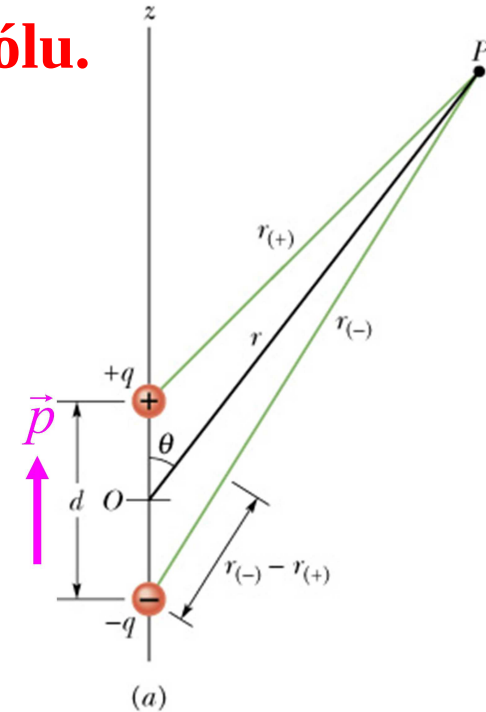
$$V = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_{(+)}} - \frac{q}{r_{(-)}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}$$

Za předpokladu  $r \gg d$  platí pro průvodiče  $r(P)$ ,  $r_{(+)}$  a  $r_{(-)}$  bodu  $P$  vztahy (viz. obrázek):

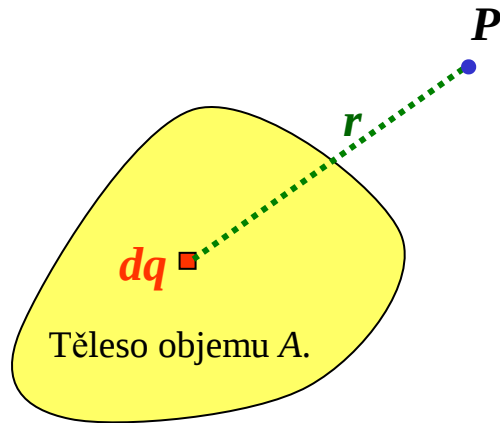
Z trojúhelníku ABC:  $r_{(-)} - r_{(+)} \approx d \cos \theta$ ,  $r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$

Po dosazení a úpravě vztahu dostaneme vztah pro potenciál elektrického pole dipólu za předpokladu, že vzdálenost  $r$  je výrazně větší než vzdálenost nábojů  $d$ .

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} \rightarrow \boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}}$$



## Potenciál elektrického pole prostorově rozložených nábojů.



V případě prostorově rozložených nábojů je třeba použít k výpočtu elektrického potenciálu příslušné vztahy pro hustoty náboje a provést integraci přes objem, plochu a délku nabitého objektu.

Objemově rozložené náboje  $\rho$ :  $dq = \rho dA$

Plošně rozložené náboje  $\sigma$ :  $dq = \sigma dS$

Lineární rozložení náboje  $\lambda$ :  $dq = \lambda dl$

Příspěvek elementu náboje  $dq$  k potenciálu elektrického pole v bodě  $P$ , ležícímu ve vzdálenosti  $r$  od  $dq$ :

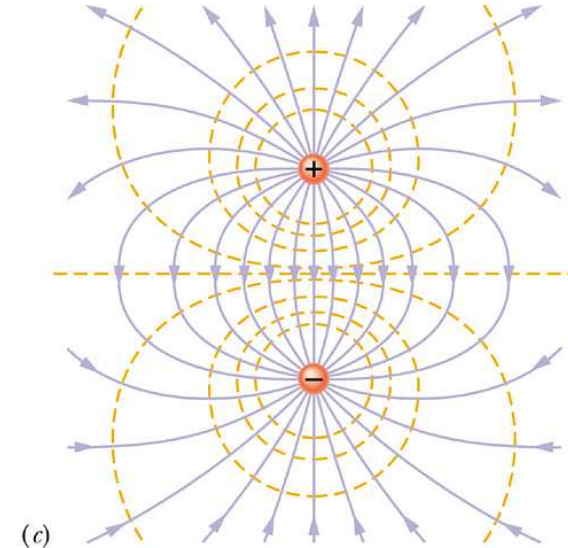
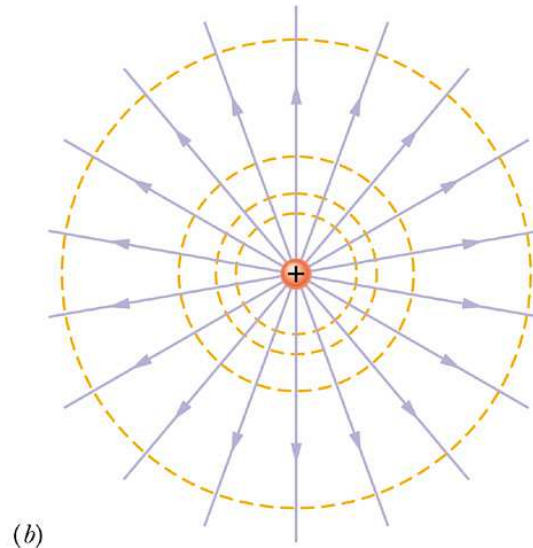
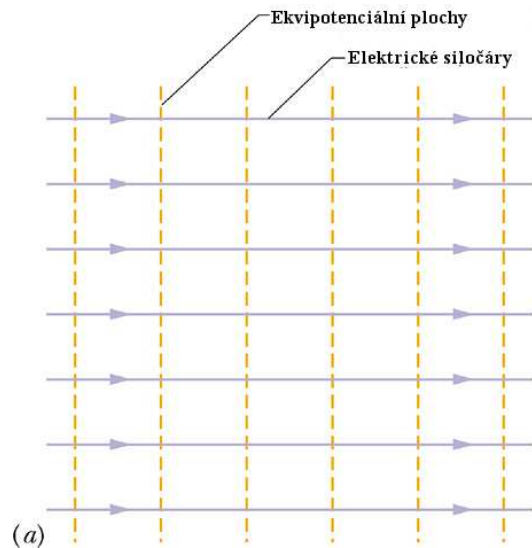
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

Integrací pře celkový objemový a plošný náboj či délku křivky:

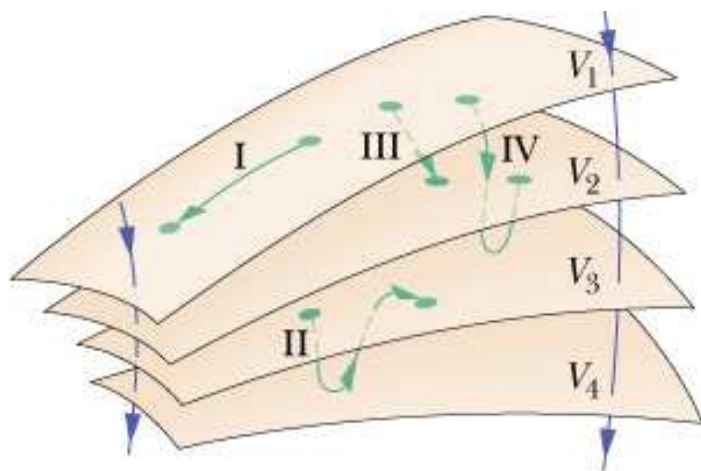
$$V = \int_{A,S,l} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A,S,l} \frac{dq}{r} \rightarrow \boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A,S,l} \frac{dq}{r}}$$

# Ekvipotenciální plochy.

Místa o stejném elektrickém potenciálu tvoří plochu. Tyto plochy stejného potenciálu nazýváme **ekvipotenciální plochy**. Vektor intenzity elektrického pole **E** je kolmý k ekvipotenciální ploše.



## Ekvipotenciální plochy a práce.



Práce vykonaná elektrickým polem intenzity  $\mathbf{E}$  při přesunu náboje  $q$  mezi dvěma místy s potenciálním rozdílem  $\Delta V$  je dána vztahem:

$$W = -q\Delta V$$

Práce vykonaná při přenášení náboje pro různé dráhy.

Dráha I.:  $\Delta V = 0 \rightarrow W_I = 0$

Dráha II.:  $\Delta V = 0 \rightarrow W_{II} = 0$

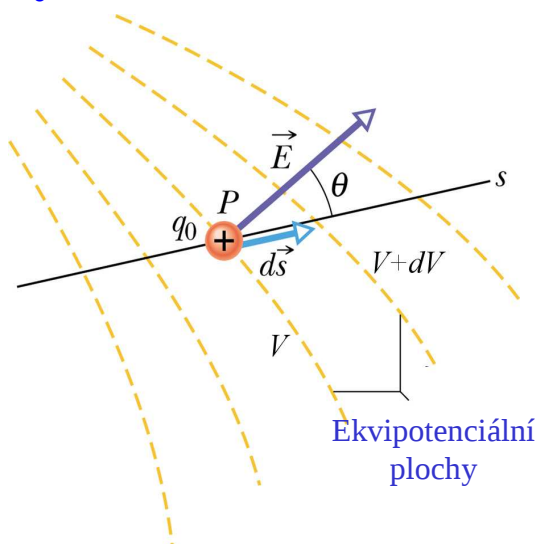
Dráha III.:  $q(V_2 - V_1) \rightarrow W_{III} \neq 0$

Dráha IV.:  $q(V_2 - V_1) \rightarrow W_{IV} \neq 0$

Práce vykonaná elektrickým polem je rovna nule, leží-li výchozí a konečná poloha náboje na stejné ekvipotenciální ploše, dráhy I. a II..

## Výpočet intenzity elektrického pole z elektrického potenciálu.

Ze znalosti potenciálu elektrického pole  $V$  lze snadno vypočítat intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$ . Vezměme testovací náboj  $q_0$ , tento náboj je působením síly elektrického pole přemístěn na vzdálenost  $ds$ . Rozdíl elektrických potenciálů míst mezi nimiž se náboj  $q_0$  přemístil je  $dV$ .



Práce vykonaná elektrickým polem při přemístění testovacího náboje  $q_0$  mezi místy o potenciálovém rozdílu  $dV$  je rovna  $-q_0 dV$ . Tuto práci lze ale též vyjádřit z definice práce:  $q_0 \mathbf{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E ds \cos \theta$ . Z porovnání obou vyjádření práce vyplývá:

$$-q_0 dV = q_0 E ds \cos \theta \rightarrow E \cos \theta = -\frac{dV}{ds} \rightarrow E_s = -\frac{dV}{ds}$$

$E \cos \theta$  je složka vektoru elektrické intenzity ve směru vektoru posunutí, přejdeme proto k symbolu pro parciální derivaci:

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

## Výpočet intenzity elektrického pole z elektrického potenciálu.

Přechodem k vyjádření ve složkách ve směru souřadných os  $x$ ,  $y$  a  $z$ :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \rightarrow \boxed{\vec{E}(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

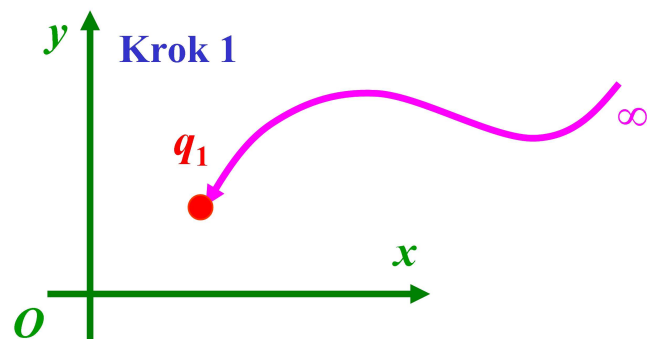
Známe-li tedy funkci potenciálu elektrického pole  $V(x,y,z)$ , pak snadno získáme složky vektoru intenzity elektrického pole derivováním potenciálu podle jednotlivých souřadnic. Vyjádření se výrazně zjednoduší zavedením operátoru:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Říkáme, že intenzita elektrického pole  $\mathbf{E}$  je záporně vzatým **gradientem** elektrického potenciálu  $V(x,y,z)$ :

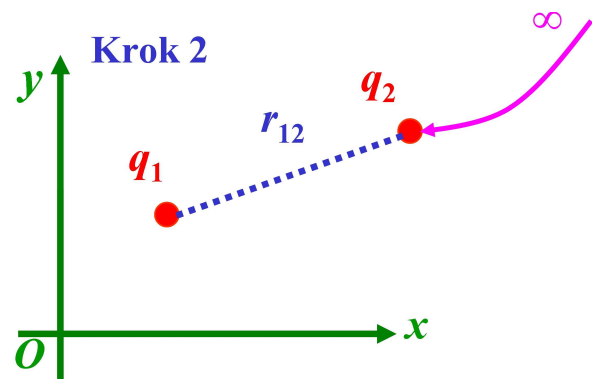
$$\boxed{\vec{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)}$$

## Interakční energie systému bodových nábojů.



Krok 1

Interakční energii bodových nábojů definujeme jako práci, kterou je třeba vynaložit k vytvoření soustavy bodových nábojů postupným přidáváním nábojů k soustavě přesunem z nekonečna do místa soustavy nábojů.

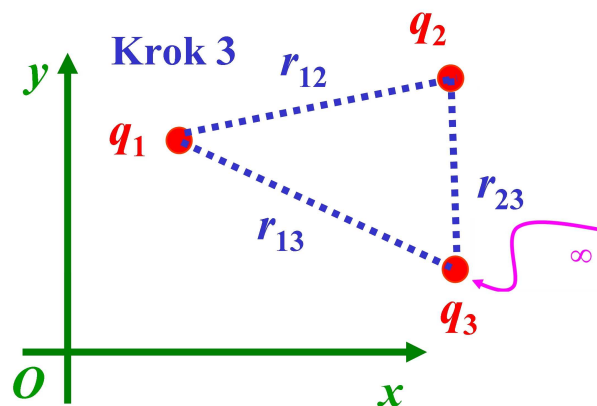


Krok 2

Krok 1: Náboj  $q_1$  je přenesen z  $\infty$  do místa 1.  
Práce  $W_1 = 0$

Krok 2: Náboj  $q_2$  je přenesen z  $\infty$  do místa 2.  
Práce  $W_2 = q_2 V(2)$

$$V(2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \rightarrow W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

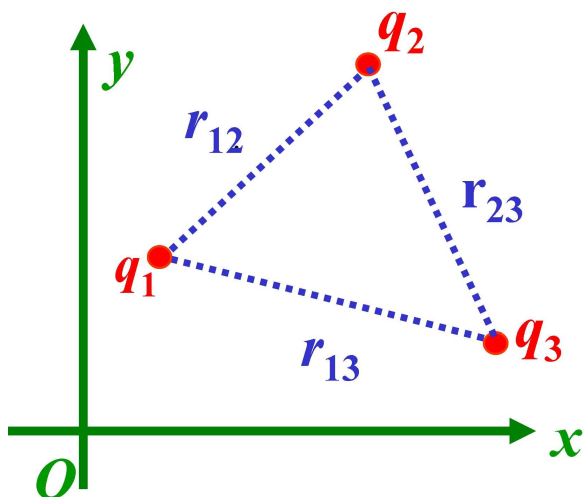


Krok 3

Krok 3: Náboj  $q_3$  je přenesen z  $\infty$  do místa 3.  
Práce  $W_3 = q_3 V(3)$

$$V(3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \rightarrow W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

## Interakční energie systému bodových nábojů.



Celková práce vynaložená ke vzniku soustavy tří bodových nábojů je dána součtem jednotlivých prací:

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

Interakční energie systému tří bodových nábojů je dána vztahem:

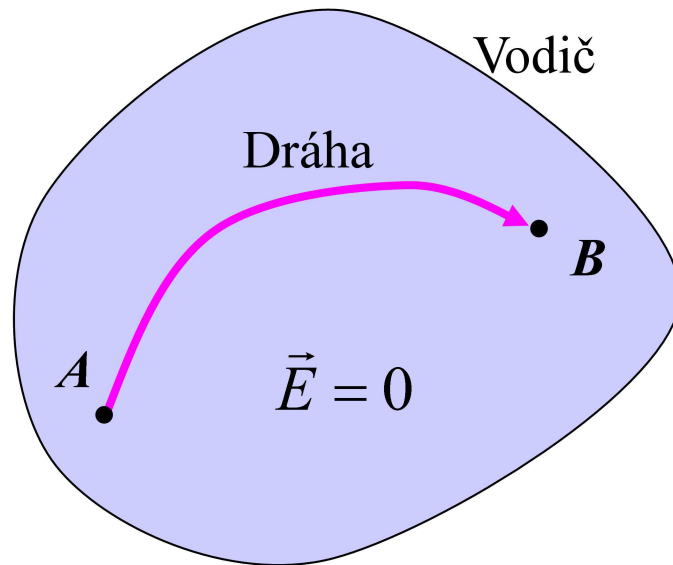
$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}}$$

Zobecnění pro libovolné množství nábojů:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Zde  $r_{ij}$  je vzdálenost mezi náboji  $q_i$  a  $q_j$ , sumace přes  $i$  a  $j$  provádíme za předpokladu  $i < j$ , z důvodu vyloučení stejných členů dvakrát.

## Potenciál izolovaného vodiče.



Tvrzení:

Izolovaná vodivá plocha je ekvipotenciální plochou.

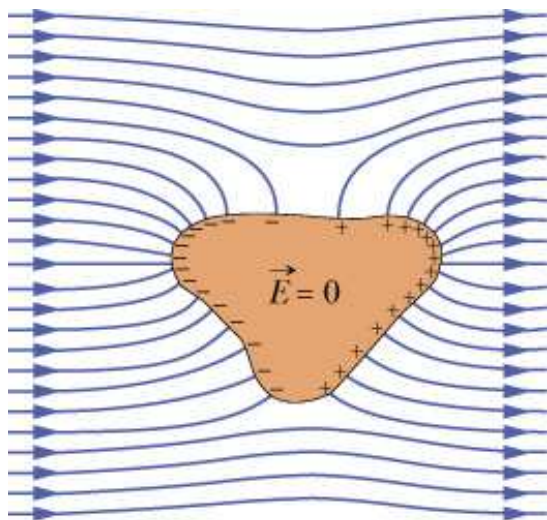
Uvažme dva body  $A$  a  $B$  uvnitř nebo na povrchu vodivé plochy. Rozdíl potenciálů  $V_B - V_A$  mezi těmito body je dán rovnicí:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Z poznatku, že elektrostatické pole  $\mathbf{E}$  uvnitř vodiče je nulové vyplývá, že integrál na pravé straně rovnice je roven nule a tedy  $V_B = V_A$ . Stejné tvrzení platí i pro body na povrchu vodiče.

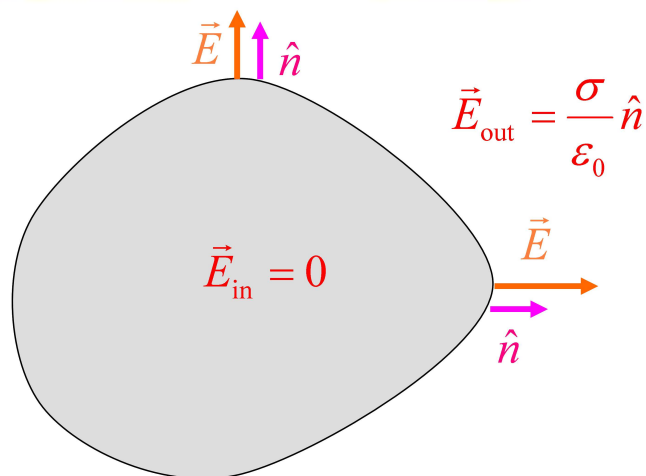
## Izolovaný vodič ve vnějším elektrickém poli.

Povrch vodiče je ekvipotenciální plochou, dále platí, že siločáry elektrického pole a tedy i vektor intenzity elektrického pole jsou kolmé k ekvipotenciální ploše.

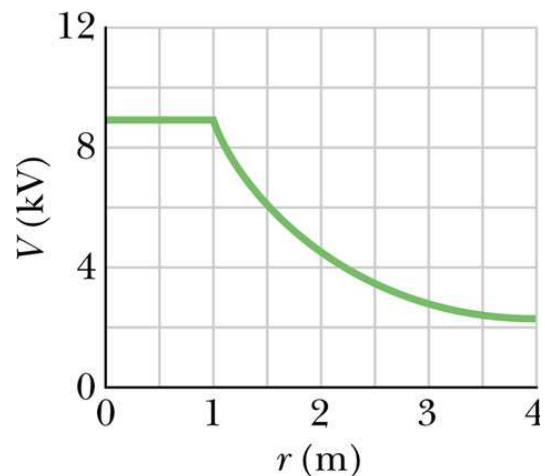
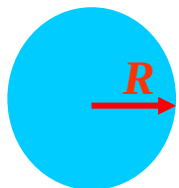


Z těchto tvrzení vyplývá, že vektor intenzity elektrického pole je kolmý k povrchu vodiče. Všechny náboje se rozmístí na povrchu vodiče a uspořádají se tak, aby výsledné elektrické pole uvnitř vodiče  $E_{\text{in}} = 0$ . Vně vodiče je elektrické pole dáno rovnicí:

$$E_{\text{out}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

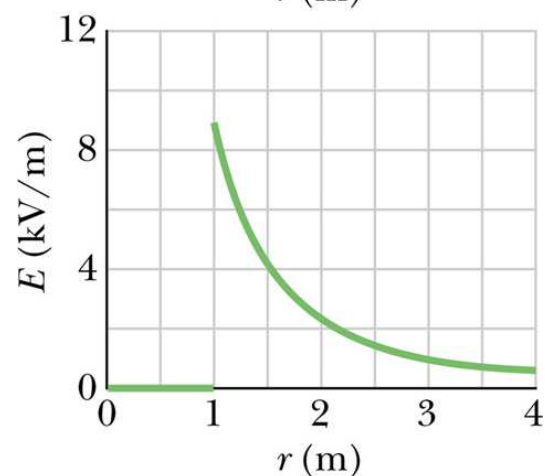


## Elektrické pole a elektrický potenciál vodivé koule poloměru $R$ nesoucí náboj $q$ .



$$\text{Pro } r < R, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

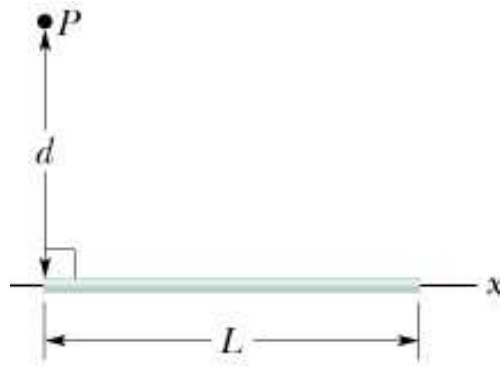
$$\text{Pro } r > R, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$



$$\text{Pro } r < R, \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

$$\text{Pro } r > R, \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

## Potenciál pole nabité přímky.



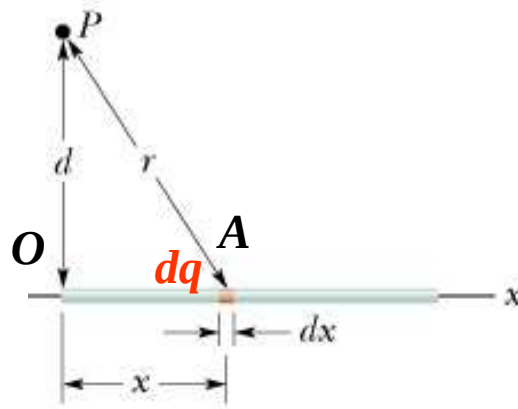
(a)

Úkolem je určit potenciál elektrického pole vytvořeného nabitým přímým vodičem délky  $L$ , nesoucí náboj s lineární hustotou  $\lambda$  v bodě  $P$ . Délkový element vodiče  $dx$  v bodě  $A$  ve vzdálenosti  $x$  nese náboj  $dq = \lambda dx$ . Z trojúhelníku  $OAP$  vyplývá pro vzdálenost  $r$  bodu  $P$  od elementu  $dx$ :

$$r = \sqrt{d^2 + x^2}$$

Příspěvek  $dV$  nabitého elementu  $dx$  k potenciálu  $V$  v bodě  $P$ :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{d^2 + x^2}} \rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$



(b)

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( x + \sqrt{d^2 + x^2} \right) \right]_0^L$$

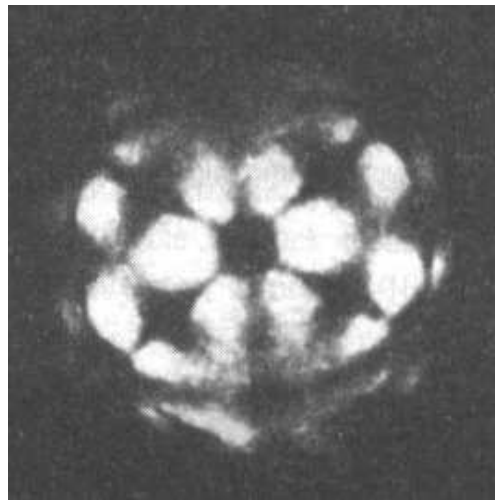
$$\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 + x^2}} = \ln \left( x + \sqrt{d^2 + x^2} \right)$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( L + \sqrt{L^2 + d^2} \right) - \ln d \right]$$

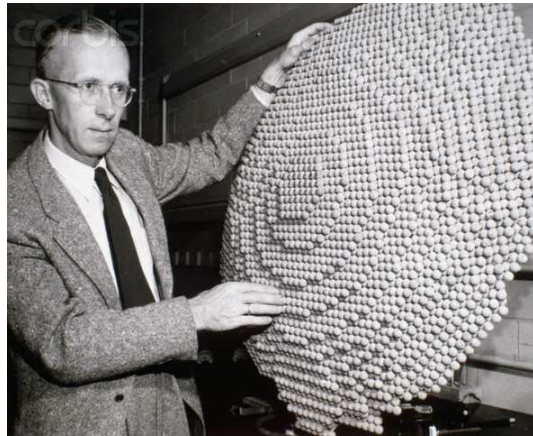
# Použití nehomogenního elektrického pole.

Field emission microscope (FEM)

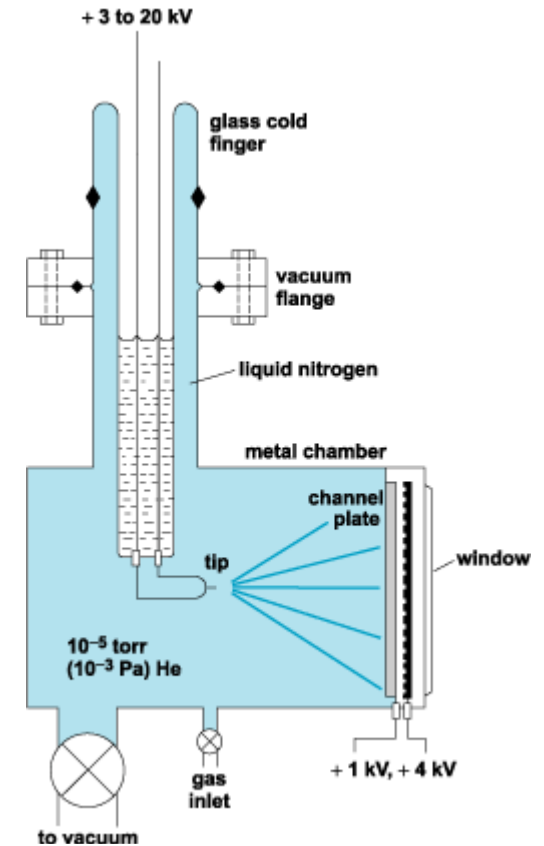
FEM



Field Ion microscope (FIM)



Erwin Wilhelm Müller, 1931



FIM

