

A portrait of Carl Friedrich Gauss, a German mathematician, physicist, and astronomer. He is shown from the chest up, wearing a dark coat and a white cravat. The background is dark and textured.

Gaussův zákon.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

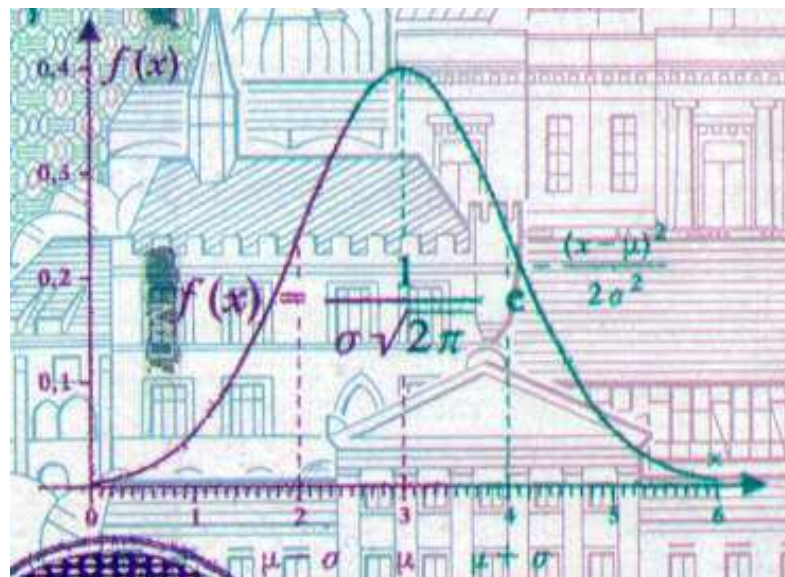
Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Carl Friedrich Gauss



Německý matematik, fyzik, astronom a geodet Karl Friedrich Gauss se narodil 30. dubna 1777 v Braunschweigu v chudé rodině a už jako dítě na sebe upozornil počtářským nadáním. Známý je jeho rychlý součet čísel od 1 do 100 a to tak, že sestavil 50 párů čísel, která mají součet 101 (1+100, 2+99, 3+98 atd.).

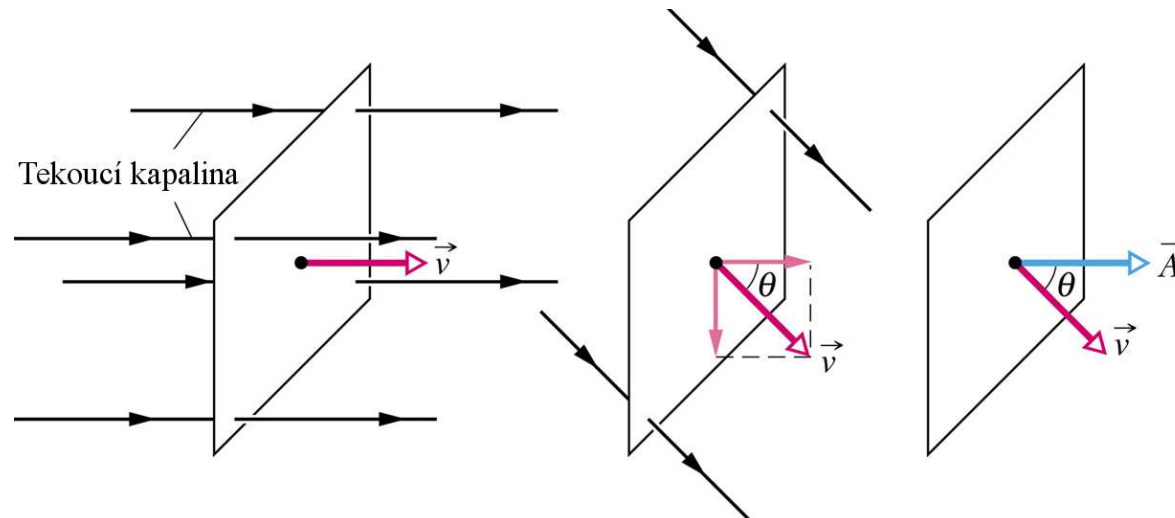


Tok vektorového pole.

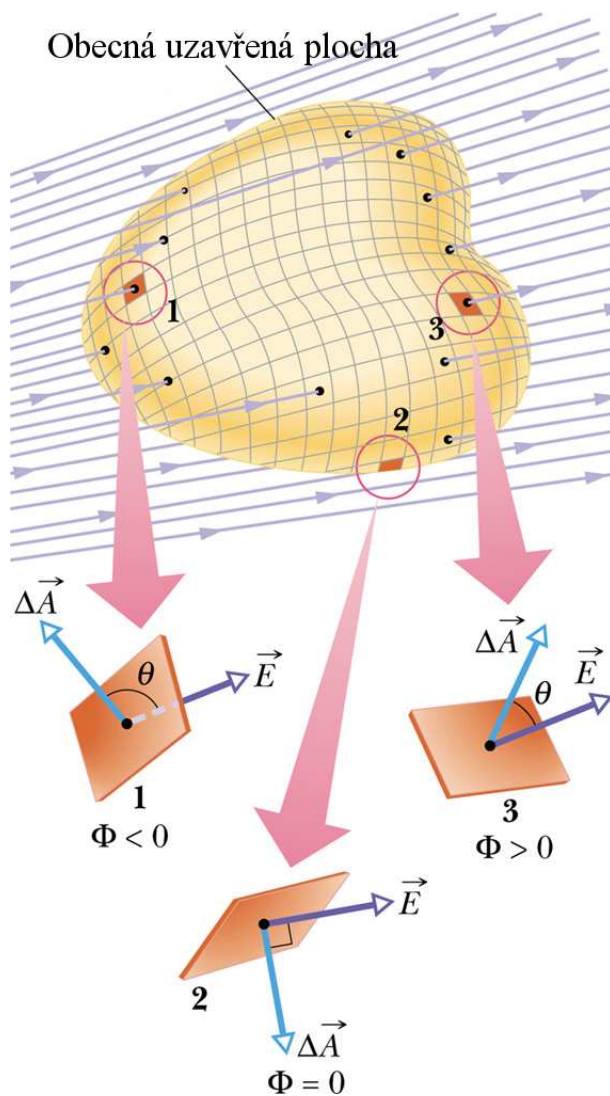
Uvažujme, proud kapaliny protékající korytem rychlostí $\vec{v}$. Vložme do proudu trubku, kterou část kapaliny odvádíme. Množství kapaliny, které trubkou proteče za jednotku času je úměrné **ploše trubky A** , **úhlu θ** , který svírá vektor rychlosti kapaliny s kolmicí k ploše trubky a **velikosti rychlosti v** kapaliny. Součin průmětu velikosti vektoru rychlosti do směru kolmého k ploše a velikosti plochy nazýváme **tok vektoru rychlosti**, označujeme jej Φ .

Jelikož velikost toku závisí na úhlu který svírá vektorová veličiny jejíž tok nás zajímá a kolmicí k ploše, zavádí se **plošný vektor** jako součin velikosti plochy A a jednotkového vektoru $\vec{n}$ kolmého k ploše s počátkem na ploše $\vec{A} = A\vec{n}$.

Pak pro tok vektoru píšeme: $\Phi = |\vec{v}| |\vec{A}| \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{A}$



Tok vektoru elektrické intenzity uzavřenou plochou.



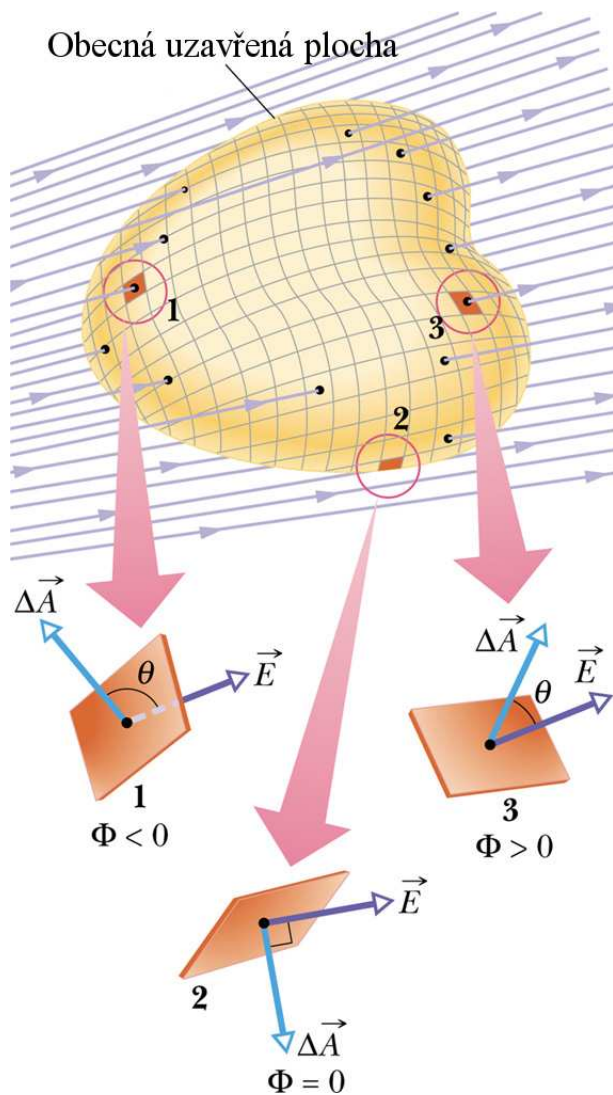
Vezměme obecnou uzavřenou plochu (**Gaussovu plochu**) vloženou do elektrického pole intenzity **E**. Jak nyní spočítáme tok vektoru elektrické intenzity touto uzavřenou plochou? Rozdělme plochu na malé elementární plošky ΔA a spočtěme tok vektoru elektrické intenzity **E** těmito ploškami. Celkový tok Φ vektoru elektrické intenzity uzavřenou plochou dostaneme, jestliže sečteme všechny toky jednotlivými ploškami ΔA :

$$\Phi = \sum \Delta\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$

Výpočtem limity tohoto součtu pro $\Delta A \rightarrow 0$ dostaneme:

$$\Phi = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

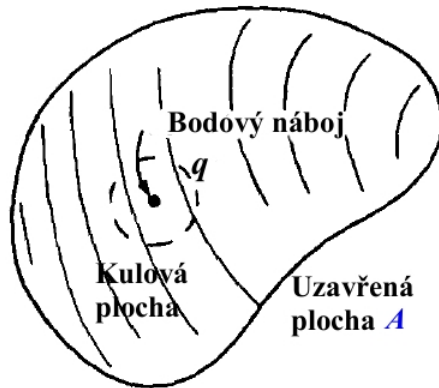
Symbol $\oint$ znamená integraci přes uzavřenou plochu. SI jednotkou toku vektoru elektrické intenzity je $[\text{Nm}^2\text{C}^{-1}]$.



Poznámky k obrázku

1. Tok vektoru je záporný pro ty elementy plochy ΔA jejichž normála míří proti směru vektoru intenzity elektrického pole, tedy pro úhly z intervalu $(\pi/2, 3\pi/2)$.
2. Je-li úhel mezi vektory intenzity elektrického pole a normálovým vektorem k plošce ΔA roven $\pi/2$ nebo $3\pi/2$ je tok roven nule.
3. Pro úhly z intervalu mezi $3\pi/2$ a $\pi/2$ je tok ploškami ΔA kladný.
4. Celkový tok obecnou uzavřenou plochou je nulový, neleží-li zdroj elektrického pole náboj uvnitř plochy.

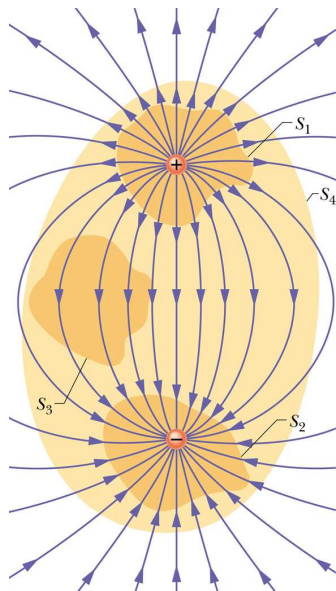
Gaussův zákon.



Ohraničme náboj q uzavřenou plochou A . Tok vektoru intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ je dán vztahem

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Tok vektoru intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ plochou A obklopující náboj q je přímo úměrný velikosti tohoto náboje.



Nyní předpokládejme, že uzavřená plocha obklopuje dva náboje q_1 a q_2 . Pro celkovou intenzitu $\mathbf{E}$ platí $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, celkový tok vektoru intenzity $\mathbf{E}$ platí:

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_1} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot d\vec{A} = \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} + \oint_{S_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0}$$

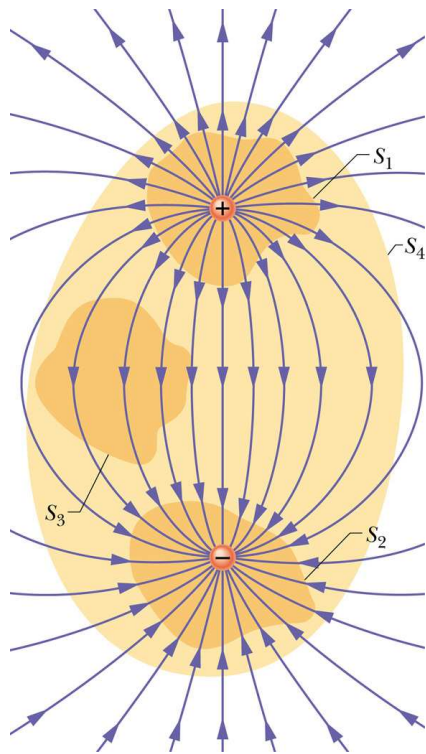
Výsledný tok intenzity elektrického pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ vytvořeného náboji q_1 a q_2 plochou S_1 obklopující oba náboje je přímo úměrný součtu obou nábojů:

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{(q_1 + q_2)}{\epsilon_0}$$

Zobecněním pro libovolný počet elektrických nábojů $q_1, q_2, \dots, q_n$ uzavřených v ploše A je Gaussův zákon:

Celkový tok vektoru intenzity elektrického pole nábojů $q_1, q_2, \dots, q_n$ (v případě spojitého rozložení nábojů je třeba uvažovat rozložení nábojů v objemu, ploše nebo přímce, hustotu náboje) uzavřenou plochou A je přímo úměrný celkovému náboji uzavřenému plochou A .

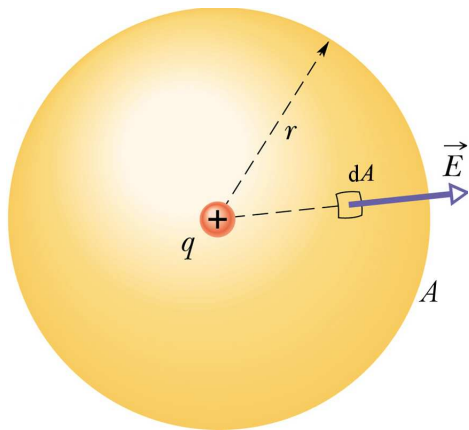
$$\oint_{S_l} \vec{E}_{Net} \cdot d\vec{A} = \frac{(q_1 + q_2 + \dots + q_n)}{\epsilon_0}$$



Z Gaussova zákona vyplývají následující důsledky (obrázek) :

1. Náboje vně uzavřené plochy nepřispívají k výslednému toku vektoru intenzity elektrického pole, na obrázku například plocha S_3 .
2. Orientace vektoru toku intenzity el. pole je dána znaménkem náboje, na obrázku plochy S_1 a S_2 .
3. Tok plochou obklopující celkový nulový náboj (součet všech $+q$ a $-q$ je roven nule), tok plochou S_4 .

Gaussův zákon → Coulombův zákon.



Bodový náboj q , je obklopen kulovou plochou A poloměru r , tento náboj položíme do středu kulové plochy A obklopující náboj.

Tok vektoru elektrické intenzity elementem plochy dA je rovna:

$$d\Phi = E dA \cos 0 = E dA$$

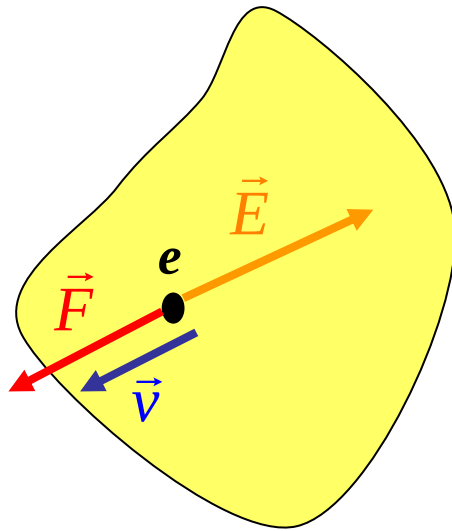
Celkový náboj obklopený kulovou plochou je q ; vektory intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ a normálový vektor $\mathbf{n}$ k ploše dA považujeme pro plošný element dA za rovnoběžné. Pak celkový tok vektoru intenzity elektrického pole náboje q kulovou plochou A je dán vztahem

$$\Phi = \oint E dA = E \oint dA = E (4\pi r^2)$$

Z Gaussova zákona a definice vektoru intenzity elektrického pole pak dostaneme intenzitu elektrického pole bodového náboje q :

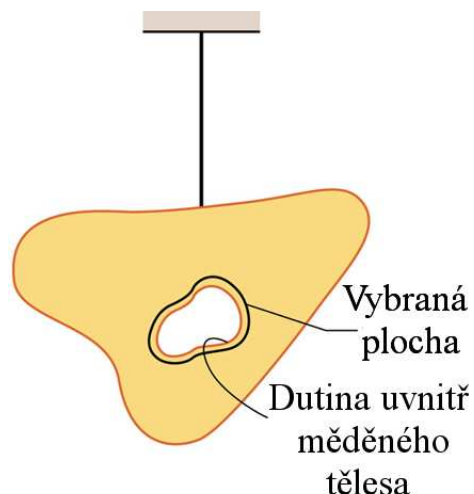
$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{celk}} = q \rightarrow 4\pi r^2 \varepsilon_0 E = q \rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Elektrické pole uvnitř vodiče.



Nositeli záporného náboje ve vodiči jsou elektrony. Elektrony ve vodiči jsou volné náboje, to znamená, že vložíme-li vodič do elektrického pole intenzity $\mathbf{E}$, záporně nabitě elektrony se budou v důsledku síly $\mathbf{F} = -e \mathbf{E}$ vodičem pohybovat ve směru působící elektrostatické síly rychlostí $\mathbf{v}$. Pohyb nosičů elektrického náboje způsobený elektrickým polem označujeme **elektrický proud**. Důsledkem pohybu nosičů náboje je vznik magnetického pole. V okamžiku kdy elektrické pole „vypneme“ nepozorujeme, žádný z uvedených jevů. Z toho lze vyvodit, že ve uvnitř vodiče neexistuje žádné elektrické pole, které by vyvolalo pohyb nositelů náboje-elektronů-elektrický proud.

Elektrické pole uvnitř izolovaného vodiče.

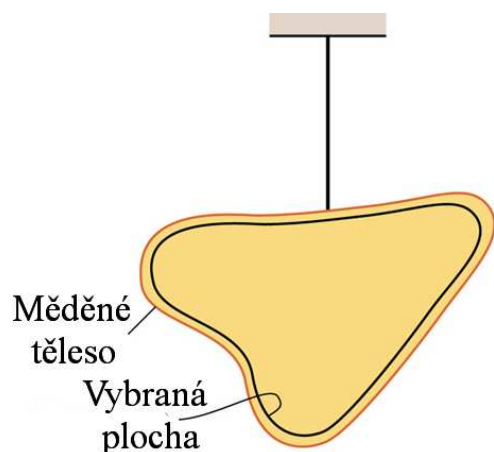


Vezměme měděné těleso zavěšené na nevodivém závěsu, uvnitř tělesa vytvořme dutinu. Na měděné těleso přenesme nadbytečný elektrický náboj. Vzniká otázka, zda nabití měděného tělesa povede ke vzniku náboje na povrchu dutiny.

Zvolme v blízkosti povrchu dutiny uzavřenou Gaussovu plochu obklopující dutinu. Intenzita elektrického pole uvnitř vodiče musí být nulová, z Gaussova zákona pak vyplývá, že stěna dutiny neponese žádný povrchový náboj. Veškerý nadbytečný náboj přivedený na těleso bude rozložen opět pouze na vnějším povrchu tělesa.

Z rovnice $\Phi = \oint \vec{E} \cdot \Delta \vec{A} = 0$ a z Gaussova zákona $\Phi = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$ vyplývá $q_{\text{int}} = 0$.

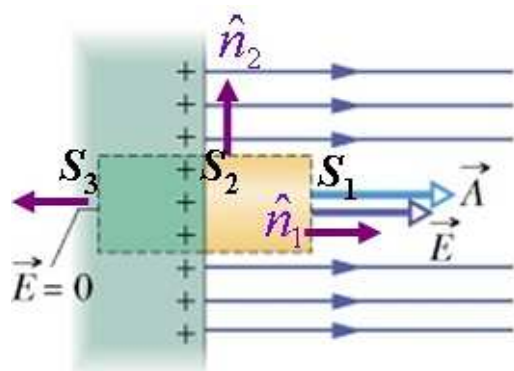
Elektrické pole uvnitř izolovaného vodiče.



Vezměme měděné těleso (obrázek), zavěsme ho na nevodivé vlákno. Přenesením nadbytečného náboje na toto těleso se změní rozložení nábojů (v důsledku elektrické indukce) tak, aby uvnitř měděného tělesa nezbyl žádný další nadbytečný náboj jehož pole by vyvolalo vznik elektrického proudu. Veškerý nadbytečný náboj se rozloží na povrchu měděného tělesa, vznikne povrchově rozložený elektrický náboj - **povrchový náboj**. Z Gaussova zákona pak vyplývá, že výsledný tok vektoru elektrické intenzity plochou, kterou umístíme v blízkosti povrchu a která neprochází žádnými náboji je nulový.

Z rovnice $\oint \vec{E} \cdot \Delta \vec{A} = 0$ a z Gaussova zákona $\Phi = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$ vyplývá $q_{\text{int}} = 0$.

Elektrické pole vně izolovaného nabitého vodiče.



Elektrické pole uvnitř vodiče je nulové, vně vodiče je v důsledku povrchového rozložení nábojů nenulové. Vektor intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ je kolmý k povrchu vodiče. To znamená, že zde neexistuje složka vektoru intenzity rovnoběžná s povrchem vodiče. Tato složka by způsobila pohyb náboje a tedy by těleso nebylo v elektrostatické rovnováze.

Intenzitu vnějšího elektrického pole plošně rozložených nábojů určíme z Gaussova zákona. Zvolme si uzavřenou válcovou plochu kolmou k povrchu tělesa a procházející nabitým povrchem tělesa. Určíme-li tok Φ_1 a Φ_3 oběma podstavami S_1 a S_3 a tok Φ_2 pláštěm válce S_2 , pak z Gaussova zákona, celkového toku plochou válce a definice plošné hustoty náboje vyjádříme intenzitu elektrického pole. Celkový náboj uzavřený ve válci je roven $q_A = \sigma A$.

$$\Phi_1 = EA \cos 0 = EA,$$

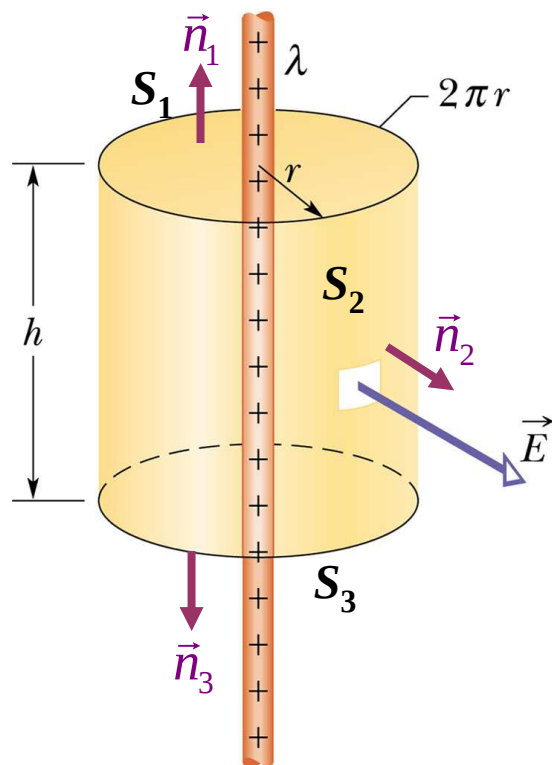
$$\Phi_2 = EA' \cos 90^\circ = 0,$$

$$\Phi_3 = 0$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = EA + 0 + 0 = EA$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 = EA \cos 0 = EA, \\ \Phi_2 = EA' \cos 90^\circ = 0, \\ \Phi_3 = 0 \end{array} \right\} \Phi = EA = \frac{q_A}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

Elektrické pole rovnoměrně nabitého přímého vodiče.



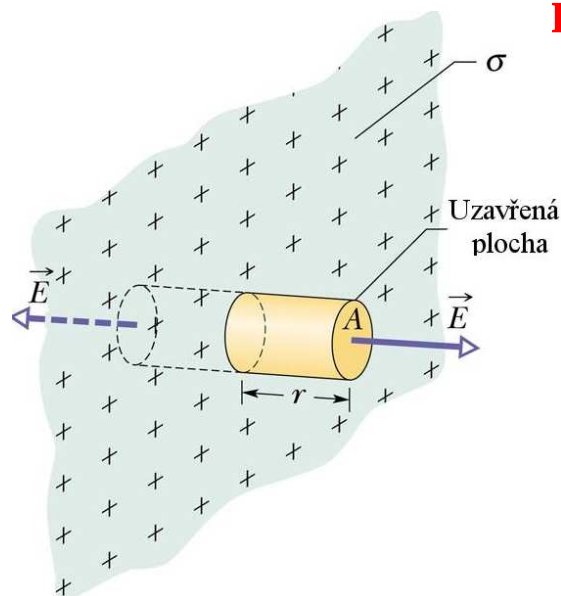
Normálové vektory:

$$\vec{n}_i, i = 1, 2, 3$$

Určíme intenzitu elektrického pole v okolí dlouhého rovnoměrně nabitého vodiče. Elektrický náboj je ve vodiči rozdělen s **lineární hustotou** λ . Natažený dlouhý vodič je válcově symetrický, tudíž vektor elektrické intenzity bude kolmý k vodiči a jeho velikost bude ve všech místech ve vzdálenosti r od osy vodiče stejná. K výpočtu vektoru elektrické intenzity nabitého vodiče s použitím Gaussova zákona si zvolme uzavřenou válcovou plochu S tak, aby podélná osa válce procházela přímým vodičem. Tok Φ elektrického $\mathbf{E}$ pole pláštěm válce výšky h a poloměru r je $\Phi = EA \cos \theta = E(2\pi rh) \cos 0 = E(2\pi rh)$. Tok oběma podstavami je nulový, z Gaussova zákona potom dostaneme vztah pro intenzitu elektrického pole nabitého přímého vodiče:

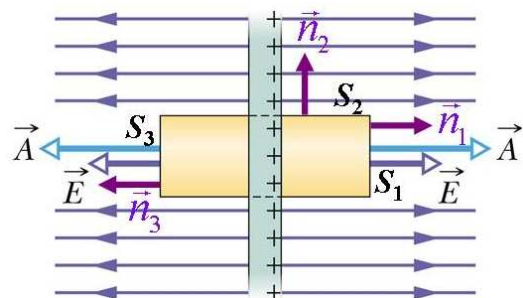
$$\Phi = E(2\pi rh) = \frac{q_{\text{valec}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Elektrické pole tenké, nekonečné rovnoměrně nabitě nevodivé desky.



Předpokládejme, že nekonečná tenká nevodivá plocha nese rovnoměrně rozložený kladný náboj s povrchovou hustotou σ . Z translační symetrie rovinné plochy vyplývá, že vektor intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ bude kolmý k ploše, bude mířit směrem od plochy a jeho velikost bude konstantní.

Zvolme válcovou plochu S s podstavami nad a pod nabitou plochou, kolmou k nabitě rovině. Celkový tok válcem je dán součtem toků podstavami Φ_1 a Φ_2 a pláštěm válce Φ_3 .



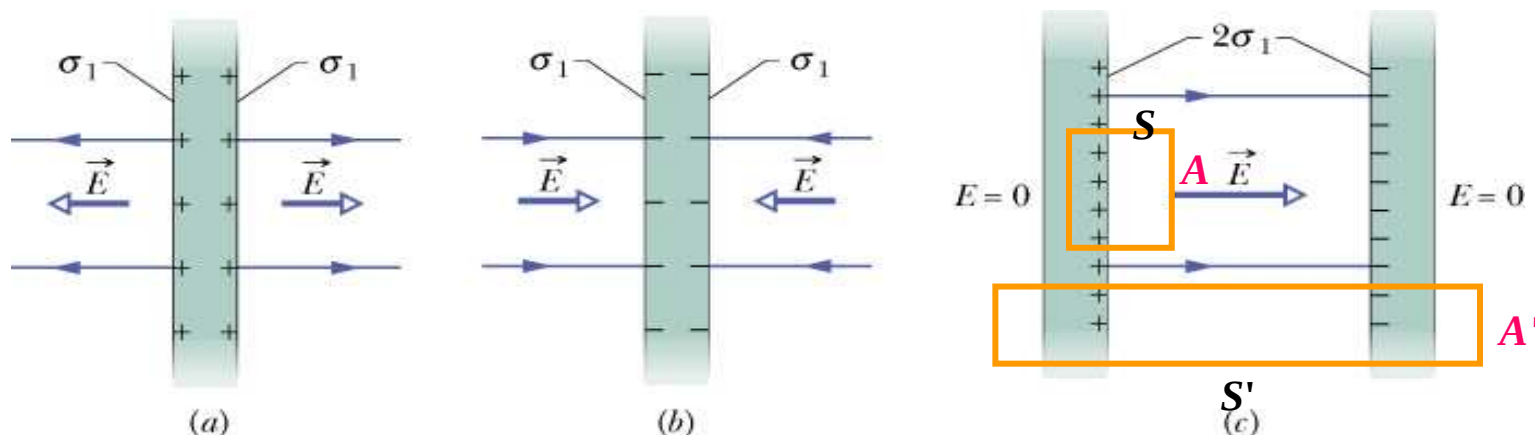
$$\Phi_1 = \Phi_2 = EA \cos 0 = EA, \Phi_3 = 0 \quad (\theta = 90^\circ)$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 2EA$$

Z Gaussova zákona dostaneme pro vektor intenzity $\mathbf{E}$:

$$\Phi = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Elektrické pole dvou tenkých, nekonečných rovnoměrně nabitých vodivých desek.

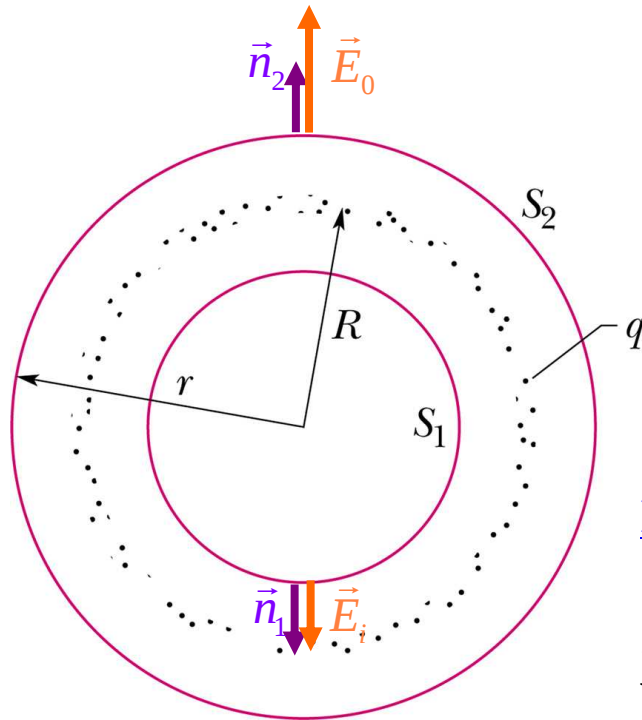


Určeme elektrické pole v prostoru mezi dvěma nekonečnými tenkými rovnoměrně nabitými vzájemně izolovanými rovnoběžnými vodivými deskami nesoucími stejně velké ale opačné náboje s povrchovou hustotou náboje σ_1 a $-\sigma_1$. Jsou-li desky dostatečně vzdálené, náboje budou rovnoměrně rozprostřeny po obou stranách nabitých desek, obr. (a) a (b). Přiblížíme-li desky k sobě na malou vzdálenost, budou se jejich náboje vzájemně přitahovat a dojde k posunu nábojů na vnitřní plochy desek, obr.(c). Celková intenzita elektrického pole mezi deskami:

$$\Phi = E_i A = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma_1 A}{\epsilon_0} \rightarrow E_i = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{kde } \sigma = 2\sigma_1$$

Celková intenzita elektrického pole vně desek: $E_0 = 0$

Elektrické pole nabité kulové vrstvy poloměru R .



Elektrické pole na vnitřní straně nabité kulové vrstvy.

Zvolme kulovou plochu S_1 poloměru $r < R$ s geometrickým středem shodným se středem kulové vrstvy. Z Gaussova zákona pro intenzitu elektrického pole na vnitřní straně kulové vrstvy vyplývá:

$$\Phi = 4\pi r^2 E_i = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \boxed{E_i = 0}$$

Elektrické pole na vnější straně nabité kulové vrstvy.

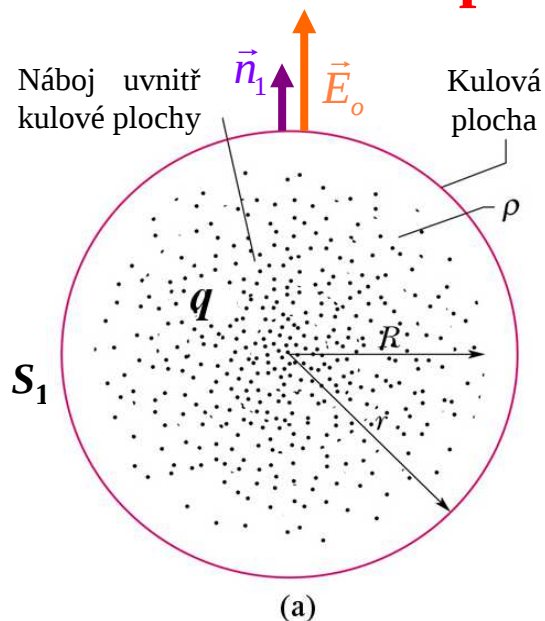
Zvolme kulovou plochu S_2 poloměru $R < r$ s geometrickým středem shodným se středem kulové vrstvy.

Z Gaussova zákona pro intenzitu elektrického pole na vnější straně nabité kulové vrstvy dostaneme vztah:

$$\Phi = 4\pi r^2 E_0 = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

Nabitá kulová vrstva se chová, jako kdyby veškerý náboj kulové vrstvy byl soustředěn v jejím středu.

Elektrické pole rovnoměrně nabité koule poloměru R .

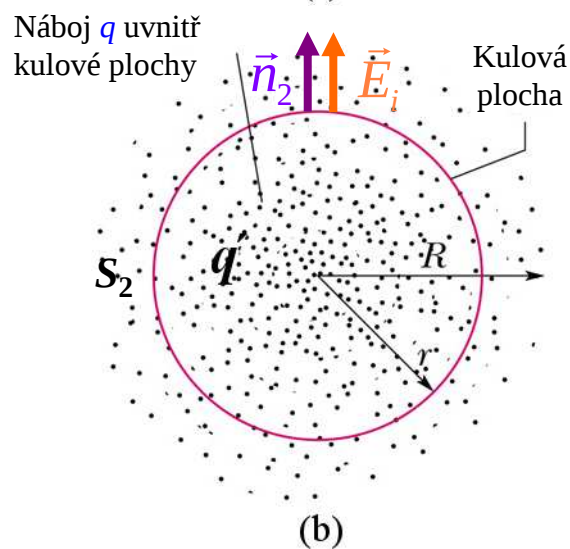


Elektrické pole vně nabité koule.

Zvolme kulovou plochu S_1 poloměru $R < r$ s geometrickým středem shodným se středem nabité koule. Z Gaussova zákona dostaneme vztah pro intenzitu elektrického pole vně nabité koule:

$$\Phi = 4\pi r^2 E_0 = \frac{q_{S_1}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

Elektrické pole vně nabité koule je stejné jako, kdyby veškerý náboj koule byl soustředěn ve středu koule.



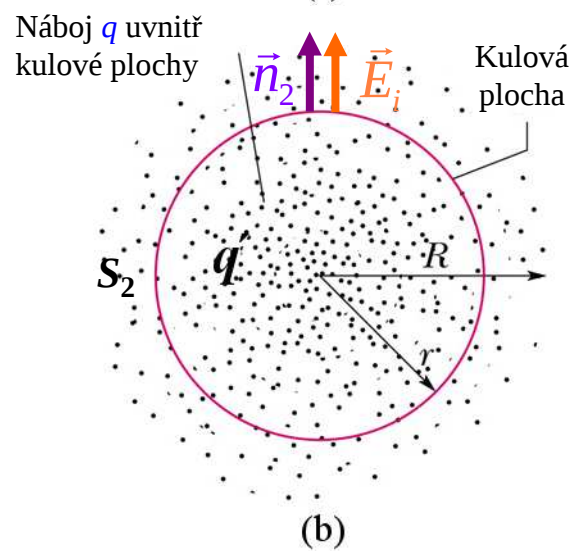
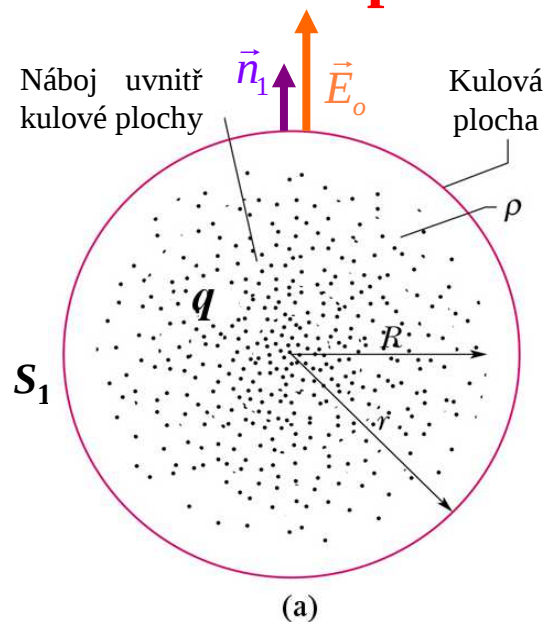
Elektrické pole uvnitř nabité koule.

Zvolme kulovou plochu S_2 poloměru $r < R$ s geometrickým středem shodným se středem kulové vrstvy. Z Gaussova zákona pak získáme vztah pro intenzitu elektrického pole vně nabité koule:

$$q_{S_2} = \frac{4\pi / r^3}{4\pi / R^3} q = \frac{R^3}{r^3} q \rightarrow 4\pi r^2 E_i = \frac{R^3}{r^3} \frac{q}{\epsilon_0}$$

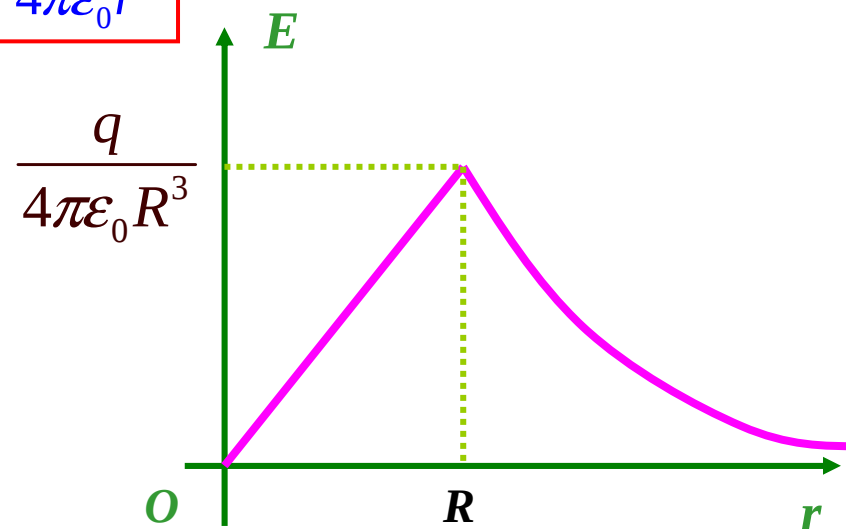
$$\Phi = 4\pi r^2 E_i = \frac{q_{S_2}}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E_i = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r}$$

Elektrické pole rovnoměrně nabité koule poloměru R .



Souhrn výsledků:

$$E_o = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$E_i = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r$$