9-10. Těžiště a hybnost

Zavedeme následující pojmy:

těžiště pro systém částic, rychlost a zrychlení těžiště, hybnost pro jednotlivou částici a pro systém částic

Odvodíme rovnici pohybu těžiště a probereme princip zachování hybnosti.

Použijeme zákon zachování hybnosti ke studiu srážek v jednom a dvou rozměrech a odvodíme rovnici pohybu raket.

9

Soustavy částic

Potemnělé hlediště a ozářená scéna. Obecenstvo s obdivem sleduje sólový výstup primabaleríny. Je nadšeno zejména efektními skoky „grand jeté“, při nichž se její hlava i trup pohybují takřka vodorovně téměř po celou dobu letu. Baletka se na scéně doslova vznáší. Laik v hledišti asi není podrobně obeznámen s problematikou gravitačního působení a pohybu těles v tíhovém poli Země. Ví však, že kdyby se sám pokusil takto vyskočit, bude dráha jeho trupu i hlavy spíše parabolická, podobně jako je tomu v případě vyhozeného kamene či fotbalového míče po brankářově výkopu. Na scéně se tedy zjevně děje něco velmi neobvyklého. Jak to baletka dokáže, že se jí gravitace příliš „netýká“?

9.1 VÝZNAČNÝ BOD

Fyzikové rádi přemýšlejí nad složitými problémy a hledají v nich něco jednoduchého a známého. Představme si například, že vyhazujeme do vzduchu baseballovou pálku. Pálka se otáčí. Její pohyb je tedy mnohem složitější než třeba pohyb míčku, který se chová jako hmotný bod (obr. 9.1a). Trajektorie jednotlivých elementů pálky jsou navzájem odlišné. Proto ji při popisu jejího pohybu nelze nahradit hmotným bodem. Pálku je třeba chápat jako soustavu hmotných bodů.

Při podrobnějším zkoumání však zjistíme, že jeden z bodů pálky má význačné postavení. Pohybuje se totiž po jednoduché parabolické dráze, stejně jako se pohybuje částice při šikmém vrhu (obr. 9.1b). Jeho pohyb je přesně takový, jako kdyby (1) v něm byla soustředěna veškerá hmota pálky a (2) působila v něm celková tíhová síla působící na pálku. Tento význačný bod se nazývá **střed hmotnosti** pálky neboli **těžiště**.* Obecně platí:

Těžiště tělesa nebo soustavy těles je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa (soustavy) a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso (soustavu).

Těžiště baseballové pálky leží na její podélné ose. Můžeme ho najít tak, že si pálku položíme vodorovně na napjatý prst a vyvážíme ji. Těžiště pak bude ležet na ose pálky právě nad prstem.

9.2 TĚŽIŠTĚ

Zabývejme se nyní problémem, jak nalézt těžiště nejrůznějších soustav. Začneme u soustavy složené pouze z několika částic a teprve pak budeme uvažovat o souborech obsahujících velké množství částic (např. baseballová pálka).

Soustavy částic

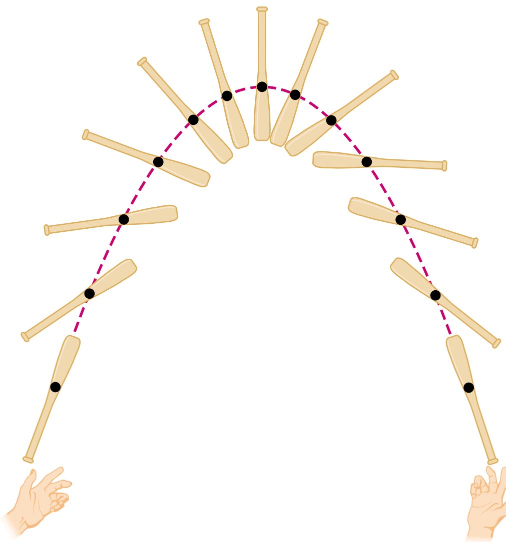
Na obr. 9.2a jsou zakresleny dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2. Jejich vzdálenost je d. Počátek osy x, jehož volba není nijak omezena, jsme vybrali tak, aby splýval s částicí m_1. Polohu těžiště této dvoučásticové soustavy *definujeme* vztahem

$$x_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \tag{9.1}$$

Abychom posoudili, nakolik je tato definice rozumná, uvažujme speciální případy. Zvolme nejprve $m_2 = 0$. Tato volba odpovídá soustavě s jedinou částicí m_1. Její těžiště

* V celé knize užíváme označení „těžiště", „hmotný střed" a „střed hmotnosti" jako synonyma. V čl. 13.3 najdete podrobné zdůvodnění.

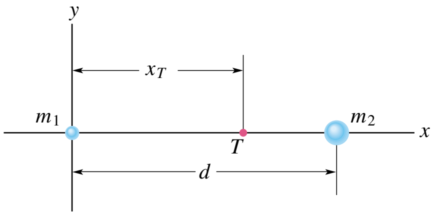
(*a*)



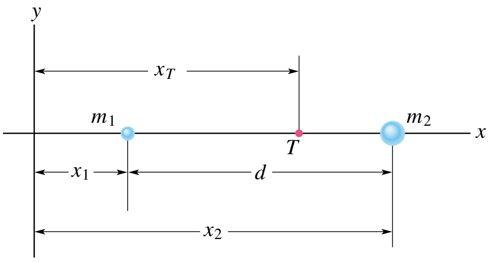
(*b*)

Obr. 9.1 (a) Míček vržený šikmo vzhůru se pohybuje po parabolické trajektorii. (b) Těžiště baseballové pálky (černá tečka) vyhozené do vzduchu se rovněž pohybuje po parabole, ostatní body pálky však opisují trajektorie komplikovanější.

by mělo s touto částicí splývat. Z rov. (9.1) skutečně plyne $x_T = 0$. Je-li naopak $m_1 = 0$, obsahuje soustava opět jedinou částici, tentokrát m_2. Podle očekávání dostáváme $x_T = d$. Pro $m_1 = m_2$ by mělo být těžiště uprostřed mezi částicemi. Skutečně tomu tak je, neboť z rov. (9.1) dostáváme $x_T = d/2$. Ze vztahu (9.1) také vyplývá, že pro obecně zvolené nenulové hmotnosti obou částic leží hodnota x_T vždy uvnitř intervalu $(0, d)$. Těžiště tedy v každém případě leží někde mezi oběma částicemi.



(a)



(b)

Obr. 9.2 (a) Vzdálenost dvou částic o hmotnostech m_1 a m_2 je d. Bod označený symbolem T je těžištěm dvoučásticové soustavy, vypočteným z rov. (9.1). (b) Situace se od obr. (a) liší obecným umístěním počátku soustavy souřadnic. Těžiště je vypočteno z rov. (9.2). Poloha těžiště soustavy vzhledem k oběma částicím je v obou případech stejná.

Na obr. 9.2b je znázorněna situace odpovídající obecnější volbě počátku soustavy souřadnic. Poloha těžiště je v takovém případě definována vztahem

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.2}$$

Všimněme si, že pro $x_1 = 0$ přejde rov. (9.2) na jednodušší tvar (9.1). Posunutí počátku soustavy souřadnic nemá vliv na polohu těžiště vzhledem k jednotlivým částicím.

Přepišme rov. (9.2) do tvaru

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \tag{9.3}$$

kde M je celková hmotnost soustavy, $M = m_1 + m_2$. Platnost tohoto vztahu lze snadno zobecnit na případ soustavy n částic umístěných na ose x. Celková hmotnost soustavy je $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ a těžiště je v bodě o souřadnici

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{9.4}$$

Sčítací index i nabývá všech celočíselných hodnot od 1 do n. Představuje pořadové (identifikační) číslo částice a „čísluje" i její hmotnost a x-ovou souřadnici.

Jsou-li částice soustavy rozmístěny v trojrozměrném prostoru, je poloha jejího těžiště určena trojicí souřadnic. Získáme ji zobecněním rov. (9.4) na trojrozměrný případ:

$$x_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{9.5}$$

Polohu těžiště můžeme zapsat i použitím vektorové symboliky. Polohu i-té částice lze totiž zadat buď jejími souřadnicemi x_i, y_i a z_i, nebo polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k}. \tag{9.6}$$

Index i označuje částici, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory kartézské soustavy souřadnic. Těžiště je zadáno polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_T = x_T \boldsymbol{i} + y_T \boldsymbol{j} + z_T \boldsymbol{k}. \tag{9.7}$$

Tři skalární rovnice (9.5) lze tak nahradit jedinou vektorovou rovnicí:

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i. \tag{9.8}$$

O její správnosti se můžeme přesvědčit dosazením z (9.6) a (9.7) a rozepsáním do souřadnic. Dostaneme skalární rovnice (9.5).

Tuhá tělesa

Běžné těleso, jakým je například i baseballová pálka, obsahuje tak obrovské množství částic (atomů), že je přirozenější posuzovat je jako objekt se spojitě rozloženou hmotou. Takový objekt již není tvořen jednotlivými navzájem oddělenými částmi, nýbrž infinitezimálně malými částicemi (elementy) o hmotnosti dm. Součty v rovnicích (9.5) je třeba nahradit integrály a souřadnice těžiště definovat vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m, \quad y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m, \quad z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

M opět představuje celkovou hmotnost tělesa. Integrály symbolizují „sčítání“ všech elementů v celém tělese. Jejich výpočet je ovšem třeba provádět v souřadnicích. Je-li těleso homogenní, lze jeho hustotu ϱ (hmotnost jednotkového objemu) vyjádřit vztahem

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{M}{V}, \tag{9.10}$$

kde dV je objem elementu hmotnosti dm a V je celkový objem tělesa. V rov. (9.9) můžeme element dm nahradit výrazem $\varrho\,\mathrm{d}V$ získaným z rov. (9.10) a dostaneme

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V, \quad y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V, \quad z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V. \tag{9.11}$$

Integračním oborem těchto integrálů je objem tělesa, tj. útvar vymezený tímto tělesem v trojrozměrném prostoru (př. 9.4).

Celá řada těles má určitou geometrickou symetrii, například středovou, osovou nebo rovinnou. Poloha těžiště takového symetrického *homogenního* tělesa s jeho symetrií úzce souvisí. Je-li těleso středově symetrické, splývá jeho těžiště se středem symetrie. Těžiště tělesa s osovou (resp. rovinnou) symetrií leží na ose (resp. v rovině) symetrie. Těžiště homogenní koule splývá s jejím geometrickým středem. Těžiště homogenního kužele leží na jeho ose. Těžiště banánu, jehož rovina symetrie jej dělí na dvě zrcadlově stejné části, leží v této rovině.

Těžiště však nemusí nutně ležet v tělese. Tak například v těžišti preclíku není žádné těsto a v těžišti podkovy není žádné železo.

PŘÍKLAD 9.1

Na obr. 9.3 jsou tři částice o hmotnostech $m_1 = 1{,}2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ a $m_3 = 3{,}4\,\mathrm{kg}$ umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 140\,\mathrm{cm}$. Určete polohu těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Zvolme souřadnicové osy x a y tak, aby jedna z částic byla umístěna v počátku a osa x splývala s jednou ze stran trojúhelníka. Částice mají tyto souřadnice:

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	x (cm)	y (cm)
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,4	70	121

Díky vhodné volbě soustavy souřadnic jsou tři souřadnice v tabulce nulové. Výpočet bude velmi jednoduchý.

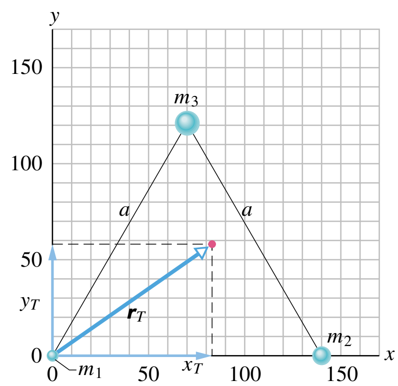
Z rov. (9.5) plyne, že souřadnice těžiště jsou

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} =$$
$$= \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(140\,\mathrm{cm}) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(70\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} =$$
$$= 83\,\mathrm{cm} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} =$$
$$= \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(0) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(121\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} =$$
$$= 58\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Těžiště soustavy na obr. 9.3 je určeno polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_T$ o souřadnicích x_T a y_T.



Obr. 9.3 Příklad 9.1. Tři částice s různými hmotnostmi tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a. Polohový vektor těžiště je $\boldsymbol{r}_T$.

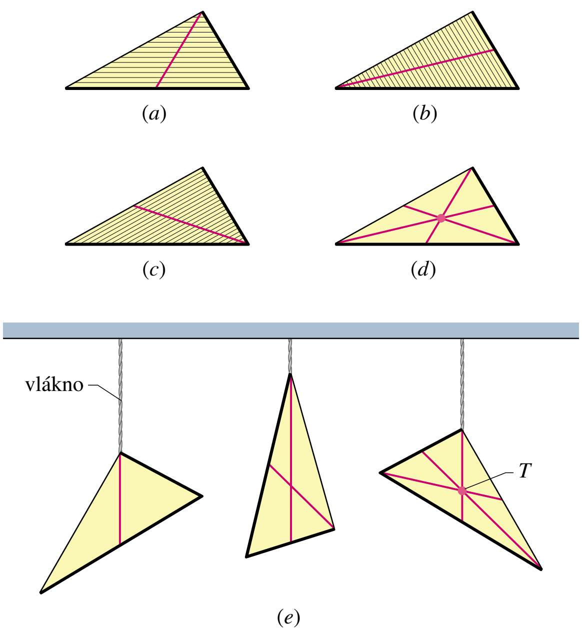
PŘÍKLAD 9.2

Najděte těžiště homogenní trojúhelníkové desky znázorněné na obr. 9.4.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.4a znázorňuje desku rozdělenou na úzké proužky rovnoběžné s jednou z jejích stran. Ze symetrie je zřejmé, že těžiště úzkého homogenního proužku leží v jeho geometrickém středu. Těžiště trojúhelníkové desky musí proto ležet někde na spojnici středů všech rovnoběžných proužků. Touto spojnicí je přímka spojující vrchol trojúhelníka se středem protilehlé strany, tj. je těžnicí trojúhelníka. Kdybychom desku podepřeli rovným ostřím nože přesně podél těžnice, byla by v rovnováze.

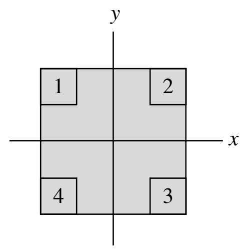
Na obr. 9.4b, c jsme desku rozdělili na proužky rovnoběžné s dalšími dvěma stranami. V každém z těchto případů leží těžiště desky na přímce spojující středy proužků (na těžnici trojúhelníka), podobně jako na obr. 9.4a. Všechny tři těžnice mají společný průsečík. V něm leží těžiště desky (obr. 9.4d).

Předchozí závěr můžeme ověřit jednoduchým pokusem. Využijeme při tom správnou intuitivní představu, že těleso zavěšené v jednom bodě zaujme takovou polohu, v níž jeho těžiště leží pod bodem závěsu. Zavěsíme tedy trojúhelníkovou desku postupně v jednotlivých vrcholech a podle obr. 9.4e vedeme z každého vrcholu svislou přímku. Těžiště desky splývá s průsečíkem těchto tří přímek. Kdybychom desku umístili do vodorovné polohy a podepřeli ji v těžišti hrotem, byla by v rovnováze.



Obr. 9.4 Příklad 9.2. Na obrázcích (a), (b) a (c) je trojúhelníková deska rozdělena na soustavu úzkých proužků rovnoběžných s některou její stranou. Těžiště desky leží na těžnici trojúhelníka, tj. na spojnici středů proužků. (d) Průsečík těžnic splývá s těžištěm desky. (e) Experimentální zjištění polohy těžiště. Trojúhelník postupně zavěšujeme v jeho vrcholech.

KONTROLA 1: Na obrázku je nakreslena homogenní čtvercová deska, z níž byly odříznuty čtyři stejné čtverce. (a) Jaká je poloha těžiště původní desky? (b) Odhadněte polohu těžiště zbylého útvaru po odstranění čtverce 1, (c) čtverců 1 a 2, (d) čtverců 1 a 3, (e) čtverců 1, 2 a 3, (f) všech čtyř čtverců. Neprovádějte žádný přesný výpočet. Využijte pouze symetrie útvaru nebo naopak jeho asymetrie vzniklé odstraňováním čtverců a rozhodněte, v kterém z kvadrantů, na které ose či v kterém bodě těžiště leží.



PŘÍKLAD 9.3

Obr. 9.5a znázorňuje zbytek homogenní kruhové kovové desky o poloměru $2R$, z níž byl vyříznut kotouč o poloměru R. Vzniklé těleso označme X. Jeho těžiště leží na ose x a v obrázku je označeno tečkou. Určete jeho souřadnici.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.5b ukazuje desku C před vyjmutím kotouče D. Ze symetrie vyplývá, že těžiště desky C je v jejím středu (obr. 9.5b).

Těleso C je složeno ze dvou částí, D a X. Můžeme předpokládat, že hmotnost každé z nich je soustředěna v jejím těžišti. Těžiště dvoučásticové soustavy $T_\mathrm{D} + T_\mathrm{X}$ splývá s těžištěm tělesa C. Polohy těžišť těles C, D a X na ose x jsou vyznačeny v obr. 9.5c.

Z rov. (9.2) vyplývá, že těžiště tělesa C je v bodě

$$x_\mathrm{C} = \frac{m_\mathrm{D} x_\mathrm{D} + m_\mathrm{X} x_\mathrm{X}}{m_\mathrm{D} + m_\mathrm{X}},$$

kde x_D a x_X jsou souřadnice těžišť těles D a X. Vzhledem k tomu, že je $x_\mathrm{C} = 0$, platí

$$x_\mathrm{X} = -\frac{x_\mathrm{D} m_\mathrm{D}}{m_\mathrm{X}}. \tag{9.12}$$

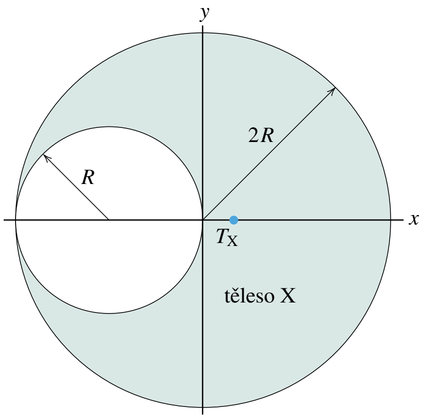
Označme ϱ hustotu materiálu desky a d její (konstantní) tloušťku. Pak

$$m_\mathrm{D} = \pi R^2 \varrho d \qquad \text{a} \qquad m_\mathrm{X} = \pi (2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d.$$

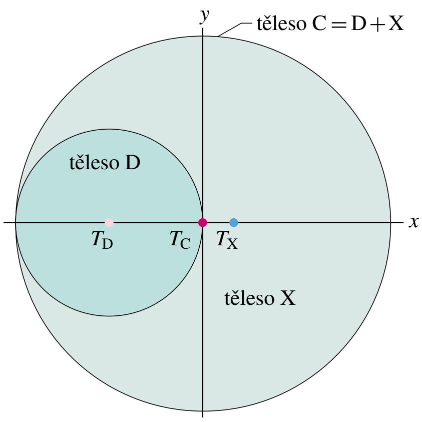
Uvážíme-li navíc, že $x_\mathrm{D} = -R$, dostaneme z rov. (9.12) polohu těžiště tělesa X:

$$x_\mathrm{X} = -\frac{(-R)(\pi R^2 \varrho d)}{\pi (2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d} = \frac{1}{3} R. \quad \text{(Odpověď)}$$

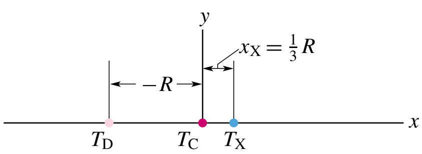
Všimněme si, že konstantní hustota a konstantní tloušťka desky se při výpočtu vykrátily. Na hodnotu x_X tedy nemají vliv.



(*a*)



(*b*)



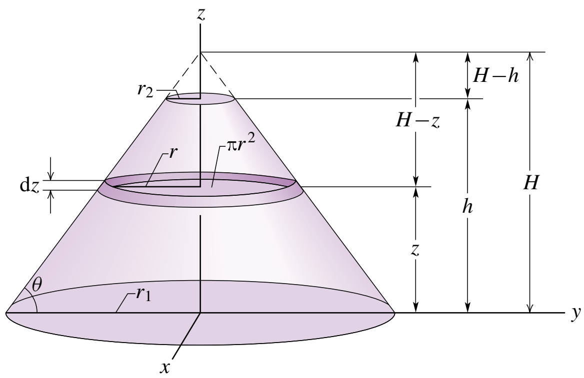
(*c*)

Obr. 9.5 Příklad 9.3. (a) Těleso X, jehož těžiště je označeno T_X, vzniklo vyříznutím kruhového otvoru o poloměru R v kovovém kotouči o poloměru $2R$. (b) Vyjmutý kotouč je označen symbolem D. Jeho těžiště T_D leží v jeho geometrickém středu a má souřadnici $x_D = -R$. Těleso C je složeno z částí X a D. Jeho těžiště je v počátku soustavy souřadnic. (c) Těžiště všech tří těles.

PŘÍKLAD 9.4

Obr. 9.6a zachycuje mohylu Silbury Hill, postavenou na pláních nedaleko Stonehenge před 4 600 lety. Účel stavby není přesně znám, pravděpodobně sloužila jako pohřebiště. Má tvar komolého kužele (obr. 9.6b) o výšce $h = 40$ m a poloměrech podstav $r_2 = 16$ m (horní podstava) a $r_1 = 88$ m (základna). Jeho objem je $V = 4{,}09 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^3$. Povrchové přímky kužele svírají s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30°$.

(*a*)



(*b*)

Obr. 9.6 Příklad 9.4. (a) Mohyla Silbury Hill v Anglii pochází z mladší doby kamenné. Její stavba si vyžádala asi $1{,}8 \cdot 10^7$ pracovních hodin. (b) Komolý kužel představující Silbury Hill. V obrázku je vyznačena vrstva o poloměru r s infinitezimální tloušťkou dz, ležící ve výšce z nad základnou kužele.

(a) Určete polohu těžiště mohyly.

ŘEŠENÍ: Mohyla je rotačně symetrická, takže její těžiště leží na její ose symetrie, ve výšce z_T nad základnou kužele. K výpočtu této výšky použijeme poslední z rovnic (9.11) a integrál zjednodušíme užitím symetrie mohyly. Uvažme tenkou vodorovnou vrstvu zvolenou podle obr. 9.6b. Vrstva má poloměr r, tloušťku dz a leží ve vzdálenosti z od základny mohyly. Obsah její podstavy je πr^2 a objem

$$dV = \pi r^2\, dz. \tag{9.13}$$

Mohyla je tvořena všemi takovými vrstvami, jejichž poloměr se mění od největší hodnoty r_1, odpovídající poloměru základny, po hodnotu r_2 poloměru horní podstavy. Výšku celého kužele, z něhož náš komolý kužel vznikl, označme H (obr. 9.6b). Pro poloměr r libovolné vrstvy pak platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H-z}{r},$$

tj.

$$r = (H-z)\frac{r_1}{H}. \tag{9.14}$$

Dosazením z (9.13) a (9.14) do poslední z rovnic (9.11) dostaneme

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{1}{V}\int z\,dV = \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h z(H-z)^2\,dz = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h (z^3 - 2z^2H + zH^2)\,dz = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3H}{3} + \frac{z^2H^2}{2}\right]_0^h = \\ &= \frac{\pi r_1^2 h^4}{VH^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3h} + \frac{H^2}{2h^2}\right]. \end{aligned}$$

Pro zadané číselné hodnoty pak vychází

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{\pi(88\,\mathrm{m})^2(40\,\mathrm{m})^4}{(4{,}09\cdot 10^5\,\mathrm{m}^3)(50{,}8\,\mathrm{m})^2}\,\cdot \\ &\quad\cdot\left[\frac{1}{4} - \frac{2(50{,}8\,\mathrm{m})}{3(40\,\mathrm{m})} + \frac{(50{,}8\,\mathrm{m})^2}{2(40\,\mathrm{m})^2}\right] = \\ &= 12{,}37\,\mathrm{m} \doteq 12\,\mathrm{m}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že průměrná hustota materiálu, z něhož je mohyla Silbury Hill postavena, je $\varrho = 1{,}5\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jakou práci vykonali dělníci při vršení mohyly, jestliže zeminu zvedali z úrovně základny kužele?

ŘEŠENÍ: K výpočtu elementární práce dW potřebné k vyzdvižení hmotného elementu dm do výšky z použijeme rov. (7.21), do níž dosadíme $\varphi = 180°$:

$$dW = -dm\,gz\cos 180° = gz\,dm.$$

Ze vztahu (9.10) vyjádříme $dm = \varrho\,dV$ a dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$dW = \varrho gz\,dV.$$

Celkovou práci vypočteme pomocí integrálu jako součet elementárních prací dW:

$$W = \int dW = \int \varrho gz\,dV = \varrho g\int z\,dV.$$

Ze vztahů (9.11) je zřejmé, že poslední integrál má hodnotu Vz_T. Nakonec tedy dostáváme

$$W = \varrho V g z_T. \tag{9.15}$$

Práce potřebná k navršení mohyly Silbury Hill je tedy stejná jako práce, kterou bychom museli vykonat při zvednutí stejně hmotného bodového objektu z úrovně základny do těžiště mohyly. Pro číselné hodnoty uvedené v zadání úlohy pak z rov. (9.15) dostaneme:

$$\begin{aligned} W &= (1{,}5\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})(4{,}09\cdot 10^5\,\mathrm{m}^3)\,\cdot \\ &\quad\cdot(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(12{,}37\,\mathrm{m}) = \\ &= 7{,}4\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.1: *Úlohy o těžišti*

V příkladech 9.1 až 9.3 jsme se seznámili se třemi různými způsoby zjednodušení úloh směřujících k výpočtu polohy těžiště: (1) Využití všech prvků symetrie zadaného tělesa (střed symetrie, osy symetrie, roviny symetrie). (2) Těleso lze pro účely výpočtu rozdělit na několik částí a každou z nich nahradit částicí umístěnou v jejím těžišti. (3) Vhodná volba souřadnicových os: volba souřadnic nemá vliv na polohu těžiště soustavy částic vzhledem k těmto částicím. Je proto vhodné volit počátek i osy soustavy souřadnic tak, aby se výpočet co nejvíce zjednodušil. Je-li zadaná soustava tvořena jen několika částicemi, volíme obvykle počátek soustavy souřadnic v některé z nich. Má-li soustava navíc osu symetrie, ztotožníme ji s některou ze souřadnicových os, například s osou x.

9.3 VĚTA O HYBNOSTI

Sledujeme-li srážku dvou kulečníkových koulí, z nichž jedna je zpočátku v klidu, přirozeně očekáváme, že i po srážce bude soustava nějak pokračovat v pohybu ve směru nárazu. Asi bychom se divili, kdyby se obě koule vrátily zpět nebo se třeba pohybovaly obě stejným směrem kolmým k pohybu první koule před srážkou.

Bod, který se stále pohybuje kupředu bez ohledu na srážku, opravdu existuje. Je jím těžiště soustavy našich dvou koulí. Snadno se o tom přesvědčíme přímo při kulečníkové hře. Stačí si uvědomit, že těžiště soustavy dvou stejně hmotných těles leží vždy uprostřed mezi nimi. Ať je srážka jakákoliv — přímá, nebo zcela obecná, těžiště se neochvějně pohybuje kupředu, jako by srážka vůbec nenastala. Sledujme tento jev podrobněji.

Místo dvojice kulečníkových koulí vezměme v úvahu soustavu n částic, jejichž hmotnosti jsou obecně různé. Budeme se zabývat pohybem těžiště této soustavy, *bez ohledu* na pohyb jednotlivých částic. I když je těžiště pouze geometrickým bodem, můžeme o něm uvažovat jako o částici, jejíž hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy. Můžeme mu přisoudit polohu, rychlost i zrychlení. Později ukážeme, že vektorová rovnice popisující pohyb těžiště soustavy částic, zvaná **věta o hybnosti** (soustavy částic) neboli **první impulzová věta**,* má tvar

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \tag{9.16}$$

Vztah (9.16) má tvar druhého Newtonova zákona pro těžiště soustavy částic. Skutečně, má stejný tvar ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) jako druhý Newtonův zákon pro částici. Veličiny vystupující v rov. (9.16) je však třeba správně interpretovat:

1. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ je *vektorový* součet *všech vnějších sil* působících na soustavu, tj. všech sil, jimiž okolní objekty působí na jednotlivé částice soustavy. Síly, kterými na sebe působí jednotlivé částice, resp. části soustavy navzájem, se nazývají silami *vnitřními*. Ve vztahu (9.16) nevystupují, neboť podle třetího Newtonova zákona je jejich součet roven nule: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{0}$.
2. M je *celková hmotnost* soustavy. Předpokládáme, že nedochází k výměně hmoty mezi soustavou a jejím okolím, takže M je konstantní. Taková soustava se nazývá **uzavřená**.
3. $\boldsymbol{a}_T$ je zrychlení *těžiště* soustavy. Vztah (9.16) nedává žádnou informaci o zrychlení jiných bodů soustavy.

Jako každá vektorová rovnice je i rov. (9.16) ekvivalentní třem rovnicím skalárním pro složky vektorů $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ a $\boldsymbol{a}_T$ vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic:

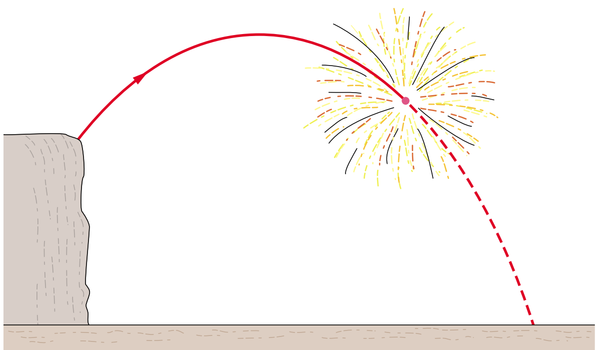
$$\begin{aligned} Ma_{T,x} &= \sum F_{\text{ext},x}, \\ Ma_{T,y} &= \sum F_{\text{ext},y}, \\ Ma_{T,z} &= \sum F_{\text{ext},z}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Vraťme se nyní k původnímu problému a zkoumejme chování soustavy dvou kulečníkových koulí. Po uvedení první koule do pohybu je výsledná vnější síla působící na soustavu nulová, tj. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0}$. Podle rov. (9.16) je tedy nulové i zrychlení těžiště soustavy ($\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{0}$). Těžiště soustavy koulí se tedy před srážkou pohybuje konstantní rychlostí. Při srážce na sebe koule působí silami, které jsou z hlediska soustavy silami *vnitřními*. Tyto síly mají sice vliv na pohyb každé z koulí, neovlivní však pohyb těžiště soustavy. Nepřispívají totiž k výrazu $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jehož hodnota tak zůstává stále nulová. Těžiště soustavy se i po srážce pohybuje konstantní rychlostí, shodnou s jeho rychlostí před srážkou.

* Její první název pochopíme později z jejího ekvivalentního zápisu (9.28). Druhý název souvisí s rovnicí (10.4).

Rov. (9.16) platí nejen pro soustavu částic, ale i pro tuhé těleso, jakým je např. baseballová pálka na obr. 9.1b. V tomto případě značí M v rov. (9.16) hmotnost pálky a $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ představuje tíhovou sílu $M\boldsymbol{g}$, jíž na pálku působí Země.

Obr. 9.7 ukazuje jiný zajímavý případ. Raketa vystřelená při ohňostroji se pohybuje po parabolické dráze a najednou se roztrhne na malé části. Kdyby k explozi nedošlo, raketa by pokračovala v pohybu po parabole, vyznačené v obrázku. Síly, které způsobily explozi, jsou z hlediska soustavy, tvořené nejprve raketou a poté všemi jejími částmi, silami *vnitřními*, tj. silami vzájemného působení jednotlivých částí soustavy. Zanedbáme-li odpor vzduchu, je výslednice *vnějších* sil působících na soustavu určena výhradně silou tíhovou: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{g}$, bez ohledu na to, zda raketa explodovala či nikoliv. Z rov. (9.16) je tedy zřejmé, že zrychlení těžiště soustavy úlomků (pokud jsou ještě všechny v pohybu ve vzduchu) je $\boldsymbol{g}$ a těžiště opisuje tutéž parabolickou trajektorii, po jaké by se pohybovala raketa, kdyby se neroztrhla.

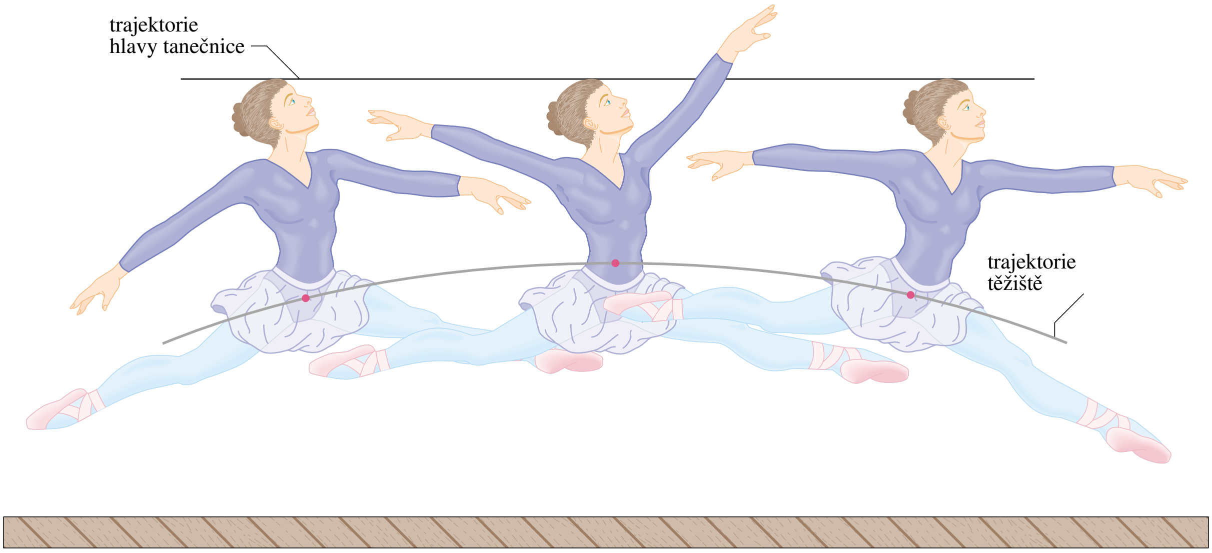


Obr. 9.7 Při ohňostroji exploduje raketa během letu. Zanedbáme-li odpor vzduchu, opisuje těžiště soustavy úlomků původní parabolickou dráhu rakety, dokud některý z úlomků nedopadne na zem.

Při figuře „grand jeté“, zvedne baletka ruce a napne nohy do vodorovné polohy (obr. 9.8). Tím posune těžiště uvnitř svého těla co nejvýše. Těžiště samozřejmě věrně sleduje parabolickou trajektorii. Hmotnost tanečnice je však vůči němu rozložena tak, že se její hlava a trup pohybují takřka vodorovně.

Odvození věty o hybnosti

Věta o hybnosti je jednou ze dvou významných pohybových rovnic soustavy částic. V tomto odstavci se věnujeme jejímu odvození. Uvažujme soustavu n částic. Podle



Obr. 9.8 Baletní skok „grand jeté". (Převzato z Kennet Laws, *The Physics of Dance*, Schirmer Books, 1984.)

rov. (9.8) pro ni platí

$$M\boldsymbol{r}_T = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n, \qquad (9.18)$$

kde M je její celková hmotnost, $\boldsymbol{r}_T$ polohový vektor jejího těžiště. Derivováním rov. (9.18) podle času dostaneme

$$M\boldsymbol{v}_T = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \qquad (9.19)$$

Symbolem $\boldsymbol{v}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i/\mathrm{d}t)$ jsme označili rychlost i-té částice a $\boldsymbol{v}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_T/\mathrm{d}t)$ představuje rychlost těžiště.

Dalším derivováním rov. (9.19) vzhledem k času již dospějeme ke vztahu

$$M\boldsymbol{a}_T = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n, \qquad (9.20)$$

kde $\boldsymbol{a}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i/\mathrm{d}t)$ je zrychlení i-té částice a $\boldsymbol{a}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_T/\mathrm{d}t)$ zrychlení těžiště. Znovu si uvědomme, že těžiště je pouze geometrickým bodem. Má však smysl mu kromě polohy připisovat i rychlost a zrychlení, jako by se jednalo o hmotnou částici.

Podle druhého Newtonova zákona je součin $m_i\boldsymbol{a}_i$ určen výslednicí $\boldsymbol{F}_i$ všech sil působících na i-tou částici. Vztah (9.20) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$M\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \qquad (9.21)$$

Pravá strana rov. (9.21) zahrnuje kromě vnějších sil, jimiž na jednotlivé částice soustavy působí její okolí, i interakční síly, jimiž na sebe částice působí navzájem (vnitřní síly). Podle třetího Newtonova zákona je však součet vnitřních sil nulový, neboť je tvořen dvojicemi typu akce — reakce, tj. dvojicemi stejně velkých opačně orientovaných sil. Na pravé straně rov. (9.21) tak zůstane pouze vektorový součet *vnějších* sil působících na soustavu, ve shodě s větou o hybnosti (9.16).

KONTROLA 2: František a Eva bruslí ve dvojici. Drží přitom v rukou opačné konce dlouhé tyče. František má dvakrát větší hmotnost než Eva, hmotnost tyče je zanedbatelná. Tření mezi bruslemi a ledem rovněž zanedbáváme. Bruslaři jsou zpočátku v klidu. (a) Potom František začne ručkovat k Evě, zatímco ona drží pevně v rukou svůj konec tyče. Určete polohu bodu, v němž se setkají. (b) Řešte tutéž úlohu za předpokladu, že se Eva přitahuje k Františkovi, a (c) za předpokladu, že ručkují oba. Soustavu souřadnic volíme tak, že její počátek umístíme do počáteční polohy těžiště soustavy a jednu z os namíříme podél tyče.

PŘÍKLAD 9.5

Na obr. 9.9a je soustava tří částic, které jsou zpočátku v klidu. Na každou z nich působí vnější síla, která je v obrázku rovněž vyznačena. Určete zrychlení těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Podle př. 9.1 vypočteme počáteční polohu těžiště soustavy (obr. 9.9a). Jak napovídá obr. 9.9b, zacházíme s ním jako s částicí o hmotnosti M, shodné s celkovou hmotností soustavy (16 kg), na niž působí všechny vnější síly působící na soustavu. Výslednice všech vnějších sil působících na soustavu $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ představuje tedy výslednici všech sil působících na těžiště. Její x-ová, resp. y-ová složka jsou

$$\sum F_{\text{ext},x} = (14\,\mathrm{N}) - (6{,}0\,\mathrm{N}) + (12\,\mathrm{N})\cos 45^\circ = 16{,}5\,\mathrm{N},$$

resp.

$$\sum F_{\text{ext},y} = (12\,\mathrm{N})\sin 45^\circ = 8{,}49\,\mathrm{N}.$$

Výsledná síla má velikost

$$\sum F_{\text{ext}} = \sqrt{(16{,}5\,\text{N})^2 + (8{,}49\,\text{N})^2} = 18{,}6\,\text{N}$$

a svírá s osou x úhel

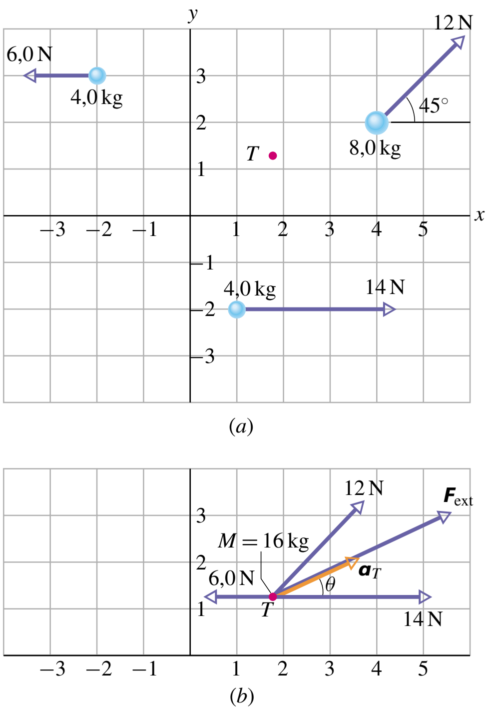
$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{8{,}49\,\text{N}}{16{,}5\,\text{N}}\right) = 0{,}515,$$

$$\theta = 27^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tímto úhlem je určen směr zrychlení těžiště $\boldsymbol{a}_T$, jehož velikost je podle rov. (9.16)

$$a_T = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{(18{,}6\,\text{N})}{(16\,\text{kg})} = 1{,}16\,\text{m·s}^{-2} \doteq$$

$$\doteq 1{,}2\,\text{m·s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 9.9 Příklad 9.5. (a) Na tři částice, které jsou zpočátku v klidu, působí vnější síly. Těžiště soustavy je v bodě označeném T. (b) Vnější síly umístíme do těžiště. Jeho pohyb se řídí stejnými zákonitostmi jako pohyb částice o hmotnosti M shodné s celkovou hmotností soustavy. Obrázek zachycuje výslednici vnějších sil i zrychlení těžiště soustavy částic.

Pohyb každé z částic na obr. 9.9a je přímočarý a rovnoměrně zrychlený, stejně jako pohyb těžiště celé soustavy. Jednotlivá zrychlení jsou však navzájem různá. Poněvadž zpočátku byly částice v klidu, bude se každá z nich pohybovat s rovnoměrně rostoucí rychlostí ve směru síly, která na ni působí. Těžiště se bude pohybovat po přímce rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{a}_T$.

9.4 HYBNOST

Hybnost částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \tag{9.22}$$

kde m je hmotnost částice a $\boldsymbol{v}$ její rychlost. Hmotnost částice je kladná skalární veličina. Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou tedy souhlasně rovnoběžné. Z rov. (9.22) je také zřejmé, že jednotkou hybnosti v soustavě jednotek SI je kg·m·s^{-1}.

Původní Newtonova formulace druhého zákona již pojem hybnosti obsahovala:

Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici sil, které na částici působí.

Matematické vyjádření tohoto zákona má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{9.23}$$

Předpokládejme, že hmotnost částice je neproměnná. Dosazením za $\boldsymbol{p}$ z definičního vztahu (9.22) a úpravou pak dostaneme

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}.$$

Vztahy $\sum \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ tedy představují dvě ekvivalentní vyjádření druhého Newtonova zákona pro pohyb částice s konstantní hmotností v rámci klasické mechaniky.

Hybnost při velmi velkých rychlostech

Víme již, že pro částice s rychlostmi blízkými rychlosti světla nesouhlasí výsledky newtonovské mechaniky s experimenty. V takových případech musíme použít Einsteinovu speciální teorii relativity. Vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$ zůstane v platnosti i v rámci této obecnější teorie *za předpokladu*, že změníme definici hybnosti takto:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{9.24}$$

Člen $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ signalizuje relativistický charakter vztahu.

Tabulka 9.1 **Některé definice a zákony v klasické mechanice**

DEFINICE NEBO ZÁKON	JEDNA ČÁSTICE		SOUSTAVA ČÁSTIC	
Druhý Newtonův zákon	$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$	(5.1)	$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$	(9.16)
Hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	(9.22)	$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$	(9.26)
Druhý Newtonův zákon	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}$	(9.23)	$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$	(9.28)

Rychlosti běžných makroskopických objektů, jakými jsou například míče, projektily nebo kosmické sondy, jsou ovšem mnohem menší než rychlost světla, takže veličina $(v/c)^2$ v rovnici (9.24) je prakticky nulová. V takovém případě lze (9.24) nahradit klasickou definicí (9.22) a Einsteinova speciální teorie relativity se redukuje na newtonovskou mechaniku. U elektronů a jiných subatomových částic lze však snadno dosáhnout rychlostí velmi blízkých rychlosti světla. Pak *je nutné* použít pro vyjádření hybnosti vztahu (9.24), a to dokonce i při rutinních technických výpočtech.

9.5 HYBNOST SOUSTAVY ČÁSTIC

Uvažujme nyní soustavu n částic, z nichž každá je charakterizována svou hmotností, rychlostí a hybností. Částice mohou vzájemně interagovat a okolní objekty na ně mohou působit vnějšími silami. Soustavě přisoudíme celkovou hybnost $\boldsymbol{P}$, definovanou jako vektorový součet hybností jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \quad (9.25)$$

Porovnáme-li tento vztah s (9.19), vidíme, že platí

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T. \quad (9.26)$$

Hybnost soustavy částic můžeme tedy vyjádřit i jinak:

Hybnost soustavy částic je rovna součinu její celkové hmotnosti M a rychlosti jejího těžiště.

Derivací rov. (9.26) dostaneme

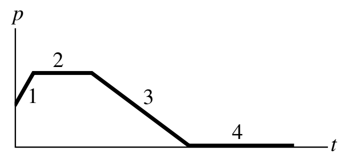
$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\frac{d\boldsymbol{v}_T}{dt} = M\boldsymbol{a}_T. \quad (9.27)$$

Porovnáním rov. (9.26) a (9.27) získáme nakonec ekvivalentní vyjádření věty o hybnosti ve tvaru

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \quad (9.28)$$

Tento výsledek můžeme považovat za zobecnění druhého Newtonova zákona pro částici, zapsaného ve tvaru $(d\boldsymbol{p}/dt) = \sum \boldsymbol{F}$, na případ soustavy částic. (Uvědomme si, že jsme při formulaci tohoto zobecnění použili i třetího Newtonova zákona.) V tab. 9.1 jsou shrnuty důležité vztahy platné pro jednu částici a odpovídající vztahy odvozené pro soustavu částic.

KONTROLA 3: Na obrázku je znázorněna časová závislost hybnosti částice pohybující se po přímce. Na částici působí síla ve směru této přímky. (a) Seřaďte čtyři označené oblasti sestupně podle velikosti této síly. (b) V které oblasti je částice brzděna?



PŘÍKLAD 9.6

Obr. 9.10a zachycuje dětské autíčko o hmotnosti 2,0 kg před a za zatáčkou. Velikost jeho rychlosti před zatáčkou je $0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, za zatáčkou $0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete odpovídající změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$.

ŘEŠENÍ: K vyjádření počáteční a výsledné hybnosti autíčka použijeme vztahu (9.26). Nejprve však musíme vyjádřit vektor jeho rychlosti $\boldsymbol{v}_i$ před zatáčkou a vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_f$ poté, co autíčko zatáčkou projelo. Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 9.10a, dostaneme

$$\boldsymbol{v}_i = -(0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v}_f = (0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i}.$$

Pro odpovídající hybnosti $\boldsymbol{P}_i$ a $\boldsymbol{P}_f$ pak podle rov. (9.26) platí

$$\boldsymbol{P}_i = M\boldsymbol{v}_i = (2{,}0\,\mathrm{kg})(-0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} = (-1{,}0\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{P}_f = M\boldsymbol{v}_f = (2{,}0\,\mathrm{kg})(0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} = (0{,}80\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i}.$$

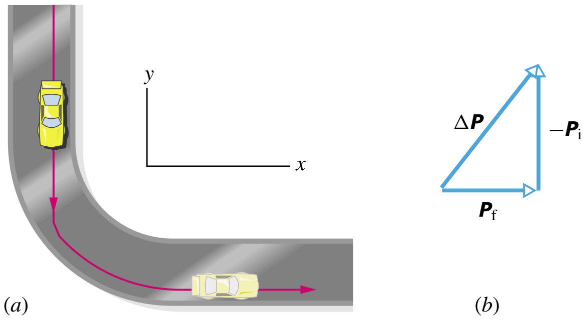
Tyto hybnosti mají různý směr. Proto *nemůžeme* vyjádřit změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ jako pouhý rozdíl velikostí vektorů $\boldsymbol{P}_f$ a $\boldsymbol{P}_i$. Změna hybnosti je dána vektorovým vztahem

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_f - \boldsymbol{P}_i, \quad (9.29)$$

tj.

$$\Delta \boldsymbol{P} = (0{,}80\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (-1{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j} =$$
$$= (0{,}8\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Na obr. 9.10b jsou vyznačeny vektory $\Delta\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$. Připomeňme si, že $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ odečítáme od $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ tak, že k vektoru $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ přičteme vektor $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.



Obr. 9.10 Příklad 9.6. (a) Autíčko v zatáčce závodní dráhy. (b) Změna hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ autíčka je vektorovým rozdílem jeho výsledné hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.

9.6 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

Uvažujme soustavu částic, na kterou nepůsobí žádné vnější síly (soustava je izolovaná), anebo je výslednice vnějších sil nulová. Předpokládejme, že částice soustavu neopouštějí ani do ní nevstupují z okolí (soustava je uzavřená). S uvážením skutečnosti, že $\sum \boldsymbol{F}_\mathrm{ext} = \boldsymbol{0}$, dostaneme z rov. (9.28) vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\boldsymbol{P} = \text{konst.} \tag{9.30}$$

Tento důležitý výsledek představuje **zákon zachování hybnosti** a lze jej vyjádřit také ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \tag{9.31}$$

Indexy (i), resp. (f) označují hybnost soustavy v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Vztahy (9.30) i (9.31) vyjadřují, že celková hybnost soustavy částic se nemění, je-li výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová. Toto tvrzení zahrnuje i méně obecnou, avšak rovněž důležitou formulaci zákona zachování hybnosti: hybnost izolované soustavy částic je stálá.

Podobně jako v případě zákona zachování energie, formulovaného v kap. 8, sahá platnost zákona zachování hybnosti za rámec newtonovské mechaniky. Tento zákon totiž platí i v mikrosvětě, kde již s Newtonovými zákony nelze počítat. Nebude porušen ani pro soustavy částic pohybujících se velkými rychlostmi, pro něž je nutné nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou teorií relativity, pokud hybnost vyjádříme vztahem (9.24) namísto (9.22).

Z rov. (9.26) ($\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$) je zřejmé, že v případě konstantní celkové hybnosti $\boldsymbol{P}$ je stálá i rychlost těžiště soustavy $\boldsymbol{v}_T$. Znamená to, že jeho zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ je nulové, přesně ve shodě s větou o hybnosti uvedenou v tab. 9.1.

Vztahy (9.30) a (9.31) mají vektorový charakter a každý z nich je proto ekvivalentní třem skalárním rovnicím, vyjadřujícím zachování jednotlivých složek vektoru celkové hybnosti. V závislosti na silovém působení okolí na uvažovanou soustavu částic mohou nastat i situace, kdy se zachovává jen jedna nebo dvě složky celkové hybnosti:

Je-li některá složka výslednice *vnějších* sil působících na uzavřenou soustavu nulová, pak se odpovídající složka celkové hybnosti soustavy nemění.

Pro ilustraci si představme letící míč. Při zanedbatelném odporu prostředí je jedinou silou, která na míč při jeho pohybu působí, tíhová síla $m\boldsymbol{g}$. Ta ovšem směřuje svisle dolů. Svislá složka hybnosti míče se tedy mění, zatímco její vodorovná složka se zachovává.

Znovu připomeňme, že celkovou hybnost uzavřené soustavy lze změnit jen působením vnějších sil. Působení vnitřních sil může sice vést ke změnám hybnosti jednotlivých částí soustavy, ke změně celkové hybnosti však nepřispívá.

KONTROLA 4: Předmět spočívající v klidu na vodorovné dokonale hladké podložce explodoval a roztrhl se na dvě části. Jedna z nich se dala do pohybu podél kladné osy x. (a) Jaká byla celková hybnost soustavy po výbuchu? (b) Mohla se druhá část pohybovat po přímce svírající s osou x nenulový úhel? (c) Jaký byl směr vektoru hybnosti druhé části?

PŘÍKLAD 9.7

Záhadná bedna o hmotnosti $m = 6{,}0\,\mathrm{kg}$ klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze podél kladné osy x. Velikost její rychlosti je $v = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Náhle bedna vybuchne a rozpadne se na dvě části: jedna z nich, o hmotnosti $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, se dále pohybuje podél kladné osy x rychlostí o velikosti $v_1 = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je rychlost druhé části?

ŘEŠENÍ: Soustava částic, kterou sledujeme, je tvořena nejprve bednou a po jejím roztržení oběma jejími částmi. Jedná se sice o soustavu uzavřenou, nikoli však izolovanou. Na bednu samotnou i na každou její část působí totiž jednak tíhová síla, jednak tlaková síla podlahy. Všechny tyto síly jsou svislé a nepřispějí proto ke změně vodorovné složky celkové hybnosti soustavy. Síly, jimiž na sebe působí jednotlivé části bedny při explozi, neovlivní celkovou hybnost vůbec, neboť jsou vnitřními silami soustavy. Vodorovná složka hybnosti soustavy se tedy zachovává a platí pro ni vztah (9.31).

Počáteční hybnost soustavy je určena hybností bedny

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = m\boldsymbol{v}.$$

Hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ po roztržení bedny je dána vektorovým součtem hybností obou částí:

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{1f} = m_1\boldsymbol{v}_1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{P}_\mathrm{2f} = m_2\boldsymbol{v}_2,$$
$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = \boldsymbol{P}_\mathrm{1f} + \boldsymbol{P}_\mathrm{2f} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Pro snazší vyjádření složek vektorů hybnosti spojíme soustavu souřadnic s podlahou a osu x zvolíme ve směru pohybu bedny. Všechny vektory hybnosti mají tedy směr osy x a jejich x-ové složky jsou dány přímo jejich velikostmi opatřenými příslušnými znaménky. Z (9.31) pak dostaneme

$$P_{\mathrm{i},x} = P_{\mathrm{f},x},$$

tj.

$$mv_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}.$$

Uvážíme-li, že hmotnost druhé části bedny je $m_2 = m - m_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$, a dosadíme-li do obecných vztahů vstupní číselné údaje, dostaneme nakonec

$$(6{,}0\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = (2{,}0\,\mathrm{kg})(8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (4{,}0\,\mathrm{kg})v_{2x},$$

odkud

$$v_{2x} = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota je kladná. Znamená to, že se druhá část bedny pohybuje rovněž ve směru kladné osy x.

PŘÍKLAD 9.8

Z děla o hmotnosti $M = 1\,300\,\mathrm{kg}$ byla ve vodorovném směru vypálena koule o hmotnosti $m = 72\,\mathrm{kg}$ (obr. 9.11). Rychlost koule vzhledem k dělu je $\boldsymbol{v}$ a má velikost $v = 55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při zpětnému rázu se dělo volně pohybuje vzhledem k Zemi rychlostí $\boldsymbol{V}$.

(a) Určete vektor $\boldsymbol{V}$.

ŘEŠENÍ: Uvažujme soustavu složenou ze dvou těles, děla a koule. Díky této volbě budou síly vzájemného působení děla a koule při výstřelu vnitřními silami soustavy a není třeba se jimi zabývat. Vodorovné složky vnějších sil působících na soustavu jsou nulové a vodorovná složka celkové hybnosti soustavy se při výstřelu zachovává. Rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ je rovna vektorovému součtu rychlosti koule vzhledem k dělu a rychlosti děla vzhledem k Zemi, tj.

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{Z} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}.$$

Soustavu souřadnic spojíme se zemským povrchem a osu x namíříme ve směru hlavně (na obr. 9.11 vpravo). Všechny rychlosti mají směr osy x. (V obrázku směřuje rychlost $\boldsymbol{V}$ doleva, její skutečnou orientaci však dosud neznáme.) Pak

$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x. \qquad (9.32)$$

Před výstřelem má soustava nulovou hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{0}$. Vodorovnou složku její hybnosti po výstřelu označme $P_{\mathrm{f},x}$. Podle (9.32) pro ni platí

$$P_{\mathrm{f},x} = MV_x + mv_{\mathrm{Z},x} = MV_x + m(v_x + V_x).$$

První člen na pravé straně této rovnosti představuje vodorovnou složku hybnosti děla a druhý vodorovnou složku hybnosti koule vzhledem k Zemi.

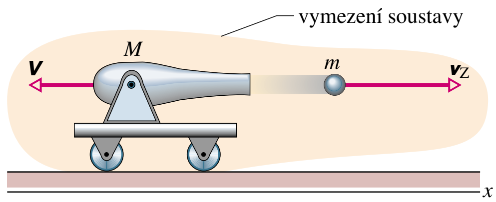
Vodorovná složka celkové hybnosti se ovšem nemění, tj. $P_{\mathrm{f},x} = P_{\mathrm{i},x}$. Platí tedy

$$0 = MV_x + m(v_x + V_x).$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé V_x dostaneme

$$V_x = -\frac{mv_x}{M+m} = -\frac{(72\,\mathrm{kg})(55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(1\,300\,\mathrm{kg} + 72\,\mathrm{kg})} = $$
$$= -2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko potvrzuje očekávání, že se dělo při zpětném rázu pohybuje v opačném směru než koule (v obr. 9.11 vlevo).



Obr. 9.11 Příklad 9.8. Dělo o hmotnosti M vypálilo kouli o hmotnosti m. Koule má rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ vzhledem k Zemi a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem k dělu. Rychlost zpětného rázu děla vzhledem k Zemi je $\boldsymbol{V}$.

(b) Určete rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (9.32) vyplývá

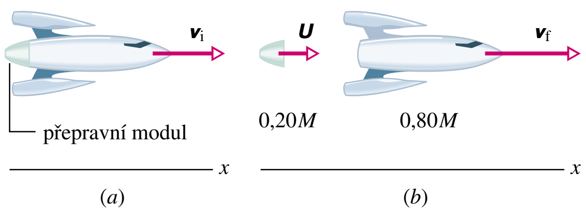
$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x = (55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (-2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = $$
$$= 52\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vlivem zpětného rázu děla se koule pohybuje vzhledem k Zemi poněkud pomaleji, než kdyby ke zpětnému rázu nedocházelo.

Při řešení této úlohy jsme si mohli uvědomit důležitost vhodného vymezení studované soustavy částic (*dělo* + *koule*) i vhodné volby vztažné soustavy, vzhledem k níž vyjadřujeme složky vektorových veličin. (Ze dvou přirozeně se nabízejících možností, spojit soustavu souřadnic buď s povrchem Země, nebo s pohybujícím se dělem, jsme rozumně zvolili prvou možnost.)

PŘÍKLAD 9.9

Představme si vesmírnou loď o celkové hmotnosti M vybavenou přepravním modulem, která letí vesmírem rychlostí $v_i = 2\,100\,\mathrm{km/h}$ vzhledem ke Slunci (obr. 9.12a). Poté, co se přepravní modul o hmotnosti $0{,}20M$ odpoutá od lodi pomocí malého výbuchu (obr. 9.12b), pohybuje se loď o 500 km/h rychleji než modul. (Velikost relativní rychlosti lodi vůči modulu je tedy $v_{rel} = 500\,\mathrm{km/h}$.) Určete velikost rychlosti lodi v_f vzhledem ke Slunci.



Obr. 9.12 Příklad 9.9. (a) Vesmírná loď s přepravním modulem se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. (b) Přepravní modul se odpoutal od lodi. Loď se nyní pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_f$ a modul rychlostí $\boldsymbol{U}$.

ŘEŠENÍ: Soustava tvořená lodí a modulem je uzavřená a izolovaná. Její celková hybnost se tedy zachovává, tj.

$$P_i = P_f. \tag{9.33}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy před a po odpoutání modulu. Soustava souřadnic je volena tak, že osa x směřuje ve směru pohybu lodi. Všechny vektorové veličiny popisující pohyb jednotlivých částí soustavy ve všech jeho fázích mají tedy nenulové pouze x-ové složky, které jsou navíc rovny velikostem příslušných vektorů. Platí

$$P_i = Mv_i. \tag{9.34}$$

Označíme-li symbolem $\boldsymbol{U}$ rychlost uvolněného modulu vzhledem ke Slunci, můžeme výslednou hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_f$ vyjádřit vztahem

$$P_f = (0{,}20M)U + (0{,}80M)v_f. \tag{9.35}$$

První člen na pravé straně odpovídá hybnosti modulu a druhý hybnosti lodi.

Relativní rychlost $\boldsymbol{v}_{rel}$ lodi vzhledem k modulu je rovna rozdílu jejich rychlostí, tj.

$$v_{rel} = v_f - U.$$

Odtud

$$U = v_f - v_{rel}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.35) a využitím vztahů (9.33) a (9.34) dostaneme

$$Mv_i = 0{,}20M(v_f - v_{rel}) + 0{,}80Mv_f.$$

Odtud již snadno získáme výslednou rychlost lodi:

$$v_f = v_i + 0{,}20v_{rel},$$

tj.

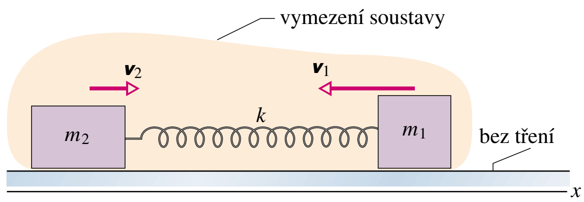
$$v_f = (2\,100\,\mathrm{km/h}) + 0{,}20(500\,\mathrm{km/h}) = 2\,200\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 5: V následující tabulce vztahující se k příkladu 9.9 jsou uvedeny některé hodnoty určující rychlost vesmírné lodi a přepravního modulu vzhledem ke Slunci, resp. relativní rychlost lodi vzhledem k modulu. Doplňte chybějící údaje.

	RYCHLOSTI (km/h) MODUL	RYCHLOSTI (km/h) LOĎ	RELATIVNÍ RYCHLOST (km/h)
(a)	1 500	2 000	
(b)		3 000	400
(c)	1 000		600

PŘÍKLAD 9.10

Dvě tělesa na obr. 9.13 jsou spojena ideální pružinou a mohou se pohybovat po dokonale hladké vodorovné podložce. Jejich hmotnosti jsou m_1 a m_2. Tělesa nejprve oddálíme (pružina se napne) a poté uvolníme.



Obr. 9.13 Příklad 9.10. Dvě tělesa spojená pružinou a ležící na dokonale hladké vodorovné podložce nejprve oddálíme a poté uvolníme. Vektorový součet jejich hybností zůstává při jejich dalším pohybu nulový. V obrázku je vyznačen i způsob vymezení soustavy.

(a) Jaký je poměr rychlostí v_1/v_2 přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Sledujeme soustavu obou těles spojených pružinou. Vztažná soustava je spojena s podložkou a osa x směřuje podél pružiny. Počáteční hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ soustavy před uvolněním těles je nulová. V libovolném okamžiku po uvolnění těles lze hybnost soustavy zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Ze zákona zachování hybnosti plyne rovnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}$, tj.

$$\boldsymbol{0} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2. \tag{9.36}$$

S ohledem na speciální volbu soustavy souřadnic můžeme psát

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} = -\frac{m_2}{m_1}. \tag{9.37}$$

Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že rychlosti těles mají v každém okamžiku opačný směr. Rov. (9.37) platí v libovolném okamžiku po uvolnění těles bez ohledu na jejich okamžitou rychlost.

(b) Jaký je poměr kinetických energií $E_{\mathrm{k},1}/E_{\mathrm{k},2}$ přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Poměr $E_{k,1}/E_{k,2}$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_{1,x}^2}{\frac{1}{2}m_2v_{2,x}^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}\right)^2.$$

Dosazením za $v_{1,x}/v_{2,x}$ z rov. (9.37) a úpravou dostaneme

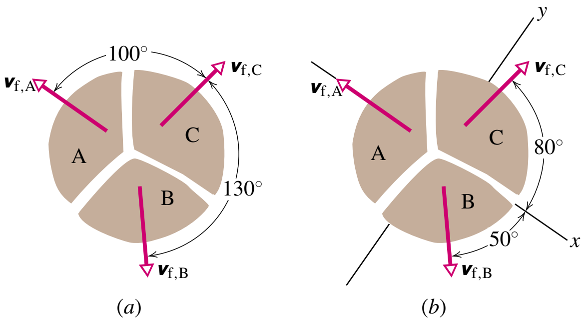
$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{9.38}$$

Zatímco se tělesa k sobě přibližují, zmenšuje se prodloužení spojovací pružiny. Pružná potenciální energie tak klesá ve prospěch kinetických energií těles. Hodnoty veličin $E_{\mathrm{k},1}$ a $E_{\mathrm{k},2}$ rostou, jejich poměr se však nemění. Podle rov. (9.38) je totiž v každém okamžiku určen podílem hmotností těles. Kinetická energie obou těles je největší ve chvíli, kdy je pružina opět nenapjatá. Poté se pružina začne stlačovat a pružná energie soustavy poroste na úkor energie kinetické. Vztah (9.38) však platí i v této fázi pohybu.

Vztahy (9.36) až (9.38) platí i v jiných situacích, kdy se dvě tělesa přitahují (nebo odpuzují). Můžeme je použít například při sledování pádu kamene k Zemi. V analogii s př. 9.10 a obr. 9.13 bude kámen představovat těleso 1 a Země těleso 2. Vzájemné působení kamene a Země je ovšem popsáno nikoli pružnými, nýbrž gravitačními silami. Vztažnou soustavu spojíme s těžištěm dvojice kámen + Země (takzvaná těžišťová soustava). Z rov. (9.36) je vidět, že vzhledem k takto zvolené vztažné soustavě jsou hybnosti kamene a Země v každém okamžiku stejně velké. Z rov. (9.37) a (9.38) je pak zřejmé, že padající kámen má vzhledem k těžišťové soustavě mnohem větší rychlost i kinetickou energii než Země, neboť $m_2 \gg m_1$.

PŘÍKLAD 9.11

Uvnitř tělesa o hmotnosti M, které leží na vodorovné dokonale hladké podlaze, je umístěna malá rozbuška. Výbuch roztrhne těleso na tři části, které se dají do pohybu po podlaze. Obr. 9.14 ukazuje pohled shora na situaci. Díl C o hmotnosti $0{,}30M$ má po výbuchu rychlost o velikosti $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 9.14 Příklad 9.11. Tři díly rozbitého tělesa se pohybují různými směry po dokonale hladké vodorovné podlaze. (a) Pohled na situaci shora. (b) Totéž s vyznačením soustavy souřadnic.

(a) Jaká je rychlost dílu B o hmotnosti $0{,}20M$?

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic podle obr. 9.14b: záporný směr osy x splývá se směrem vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,A}}$. Osa x svírá s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,C}}$ úhel 80° a s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,B}}$ úhel 50°.

Obě složky celkové hybnosti soustavy, tvořené nejprve tělesem a po rozpadu všemi jeho částmi, se zachovávají. Síly působící při výbuchu jsou totiž vnitřními silami soustavy a vnější síly (tíhová a normálová) jsou kolmé k souřadnicové rovině xy. Při výpočtu rychlosti dílu B vyjdeme ze zákona zachování pro y-ovou složku celkové hybnosti:

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y}. \tag{9.39}$$

Indexy (i) a (f) symbolizují jako obvykle počáteční a koncový stav soustavy.

Složky počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ jsou nulové, neboť těleso bylo zpočátku v klidu. Abychom získali $P_{\mathrm{f},y}$, vyjádříme y-ové složky výsledné hybnosti všech dílů tělesa:

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{f,A},y} &= 0,\\
p_{\mathrm{f,B},y} &= -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B},y} = -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50°,\\
p_{\mathrm{f,C},y} &= 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C},y} = 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C}}\sin 80°.
\end{aligned}$$

(Uvědomme si, že vzhledem k speciální volbě os soustavy souřadnic je $p_{\mathrm{f,A},y} = 0$.) Vztah (9.39) lze tedy přepsat do tvaru

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y} = p_{\mathrm{f,A},y} + p_{\mathrm{f,B},y} + p_{\mathrm{f,C},y}.$$

Dosazením $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ dostaneme

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50° + (0{,}30M)(5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\sin 80°$$

a odtud

$$v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 9{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je rychlost části B?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že se zachovává i x-ová složka celkové hybnosti, můžeme psát

$$P_{i,x} = P_{f,x}. \tag{9.40}$$

Platí $P_{i,x} = 0$ (těleso bylo zpočátku v klidu). Vyjádříme x-ové složky výsledných hybností jednotlivých dílů tělesa (díl A má hmotnost $0{,}50M$):

$$\begin{aligned} p_{f,A,x} &= -0{,}50M v_{f,A},\\ p_{f,B,x} &= 0{,}20M v_{f,B,x} = 0{,}20M v_{f,B}\cos 50°,\\ p_{f,C,x} &= 0{,}30M v_{f,C,x} = 0{,}30M v_{f,C}\cos 80°. \end{aligned}$$

Vztah (9.40) nabývá tvaru

$$P_{i,x} = P_{f,x} = p_{f,A,x} + p_{f,B,x} + p_{f,C,x}.$$

Dosadíme $v_{f,C} = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = -0{,}50M v_{f,A} + 0{,}20M(9{,}64\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 50° +\\ + 0{,}30M(5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 80°. \end{aligned}$$

Odtud již získáme velikost rychlosti dílu A:

$$v_{f,A} = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Předpokládejme, že těleso v př. 9.11 je urychlováno ve směru záporné osy y (pohybuje se například po nakloněné rovině). Rozhodněte, zda se zachovává (a) x-ová složka jeho celkové hybnosti (podle (9.40)) a (b) y-ová složka jeho celkové hybnosti (vztah (9.39)).

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.2: *Zachování hybnosti*

Je vhodné vrátit se k bodu 8.2, který se týkal zákona zachování mechanické energie. Otázky, které v něm byly formulovány, stojí za zamyšlení i v souvislosti s úvahami o zákonu zachování hybnosti.

Při výpočtech vycházejících ze zákona zachování hybnosti se především vždy ujistíme, zda soustava, pro niž chceme zákon zachování hybnosti použít, je uzavřená a izolovaná. *Uzavřenost* znamená, že si soustava nevyměňuje částice se svým okolím (žádná částice neprojde ze soustavy do okolí ani naopak). Soustavu považujeme za *izolovanou*, je-li její interakce s okolními objekty zanedbatelná. Z hlediska zákona zachování hybnosti se jako izolovaná chová i soustava, na kterou její okolí působí silami s nulovou výslednicí. Není-li soustava uzavřená nebo izolovaná, vztahy (9.30) a (9.31) neplatí.

Připomeňme si, že hybnost je vektorová veličina. Má tedy smysl uvažovat o zachování každé z jejích složek odděleně. Daná složka celkové hybnosti soustavy se zachovává za předpokladu, že odpovídající složka výslednice vnějších sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí, je nulová. V př. 9.8 byla nulová vodorovná složka výslednice vnějších sil působících na soustavu dělo + koule. Zachovávala se tedy vodorovná složka hybnosti soustavy. Svislá složka výsledné vnější síly ovšem nulová nebyla, neboť na letící kouli působila tíhová síla. Svislá složka hybnosti soustavy byla proměnná.

Vybereme dva vhodné stavy soustavy (počáteční a koncový) a vyjádříme její celkovou hybnost v každém z nich. Přitom bychom si měli stále uvědomovat, v jaké vztažné soustavě pracujeme. Musíme dát pozor, abychom do celkové hybnosti neopomněli zahrnout hybnost některé z částí studované soustavy, nebo naopak do ní omylem nezapočítali hybnost objektů, které do soustavy nepatří. Tak třeba v př. 9.8 jsme se nejprve museli rozhodnout, zda použijeme vztažnou soustavu spojenou se Zemí, nebo s dělem, které se pohybuje vlivem zpětného rázu.

Nakonec výrazy pro $\boldsymbol{P}_i$ a $\boldsymbol{P}_f$ porovnáme a řešením získané rovnice najdeme neznámou veličinu, požadovanou v zadání úlohy.

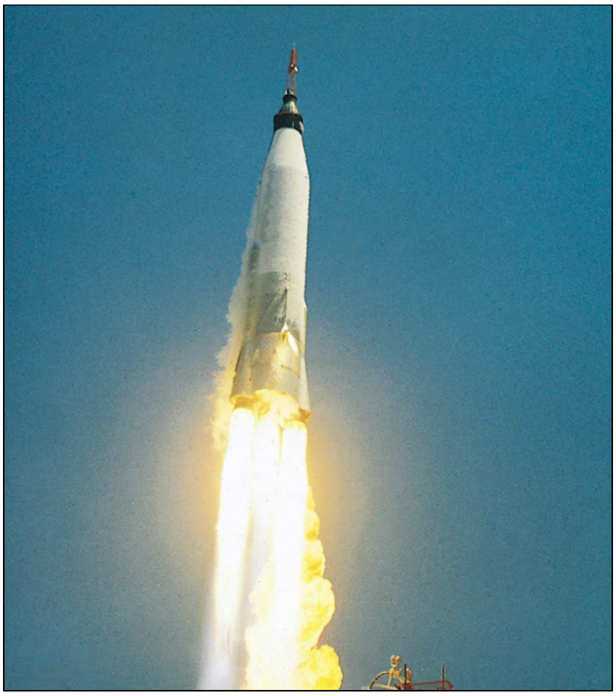
9.7 SOUSTAVY S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ: RAKETA

Prozatím jsme se zabývali soustavami, jejichž celková hmotnost byla konstantní. Tento předpoklad však nebývá vždy splněn. Uvažujme například startující raketu (obr. 9.15). Převážnou část její hmoty před startem tvoří pohonné látky, které se postupně spalují a proudí ven tryskou raketového motoru.

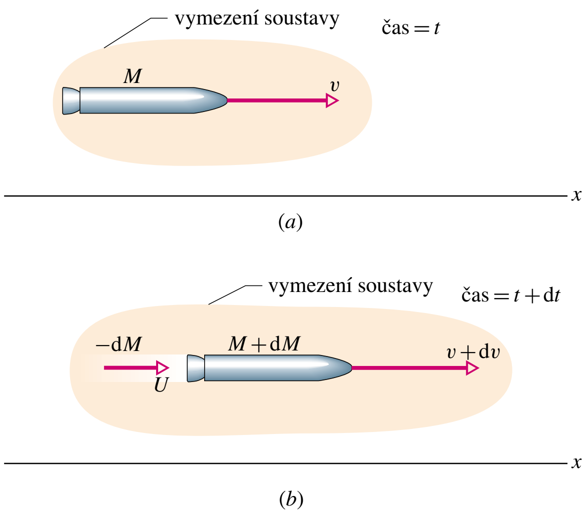
Pro popis pohybu rakety s proměnnou hmotností použijeme větu o hybnosti, nikoli však pro raketu samotnou, nýbrž pro soustavu, do níž kromě rakety zahrneme i zplodiny vzniklé spálením pohonných hmot, které raketu opouštějí. Hmotnost *takto vymezené soustavy* se *nemění*.

Výpočet zrychlení rakety

Sledujme raketu v pozdější fázi jejího pohybu v meziplanetárním prostoru, kde zanedbáme gravitační sílu i odpor prostředí. Přímočarý pohyb rakety budeme popisovat



Obr. 9.15 Start rakety v projektu Mercury



Obr. 9.16 (a) Zrychlený pohyb rakety o hmotnosti M sledujeme v inerciální vztažné soustavě. Obrázek odpovídá okamžiku t. (b) Raketa v okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Obrázek znázorňuje i odpad vzniklý spálením pohonných hmot v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a vypuzený do prostoru.

v inerciální vztažné soustavě a souřadnicovou osu x zvolíme ve směru tohoto pohybu. Označme M hmotnost rakety a v její rychlost (x-ová složka) v libovolném okamžiku t (obr. 9.16a).

Obr. 9.16b zachycuje situaci v pozdějším okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Raketa má nyní rychlost $v + \mathrm{d}v$ a její hmotnost je $M + \mathrm{d}M$. Uvědomme si, že změna hmotnosti $\mathrm{d}M$ je *záporná*. Zplodiny vzniklé spálením pohonných látek v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ mají hmotnost $-\mathrm{d}M$ a opouštějí raketu rychlostí U měřenou ve zvolené inerciální vztažné soustavě.

Uvažujme nyní soustavu tvořenou raketou a zplodinami, které ji opustily během časového intervalu $\mathrm{d}t$. Tato soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost se tedy v intervalu $\mathrm{d}t$ zachovává a platí

$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f}. \tag{9.41}$$

Indexy (i) a (f) označují celkovou hybnost soustavy na začátku a na konci časového intervalu délky $\mathrm{d}t$. Rov. (9.41) můžeme přepsat do tvaru

$$Mv = -\mathrm{d}M\,U + (M + \mathrm{d}M)(v + \mathrm{d}v), \tag{9.42}$$

kde první člen na pravé straně představuje hybnost zplodin vzniklých v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a druhý člen značí hybnost rakety na konci tohoto intervalu.

Vztah (9.42) lze ještě zjednodušit zavedením relativní rychlosti u zplodin vzhledem k raketě. Tato rychlost je rozdílem rychlosti $v + \mathrm{d}v$ rakety na konci intervalu $\mathrm{d}t$ a rychlosti zplodin U:

$$u = (v + \mathrm{d}v) - U,$$

tj.

$$U = v + \mathrm{d}v - u. \tag{9.43}$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.42) dostáváme po malé úpravě

$$-\mathrm{d}M\,u = M\,\mathrm{d}v. \tag{9.44}$$

Vydělením rov. (9.44) délkou časového intervalu $\mathrm{d}t$ dostaneme:

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}u = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{9.45}$$

Výraz $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ vyjadřuje rychlost ubývání hmotnosti rakety. Označme jej symbolem $-R$, kde R ($R > 0$) je rychlost spotřeby paliva v kg/s. Nakonec si uvědomme, že výraz $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ v rov. (9.45) představuje zrychlení a rakety a přepíšeme rovnici ve tvaru

$$Ma = Ru \quad \text{(rovnice Měščerského).} \tag{9.46}$$

Rovnice (9.46) platí v libovolném okamžiku pro okamžité hodnoty hmotnosti M rakety, rychlosti R spotřeby paliva a zrychlení a rakety.

Její levá strana má rozměr síly ($kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2} = N$) a závisí pouze na vlastnostech raketového motoru (na rychlosti R spotřeby paliva a na rychlosti u zplodin vzhledem k raketě). Výraz Ru na pravé straně rovnice nazveme **tahem** raketového motoru a označíme jej symbolem T. Rov. (9.46) získává při tomto označení formální podobu druhého Newtonova zákona $Ma = T$, kde a je zrychlení rakety a M její hmotnost.

Výpočet rychlosti rakety

Položme si nyní otázku, jak se mění rychlost rakety při spalování pohonných hmot. Odpověď získáme integrací rovnice (9.44) upravené na tvar

$$dv = -u\frac{dM}{M}.$$

Dostaneme

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M}.$$

M_i a M_f představují počáteční a výslednou hmotnost rakety. Výpočtem integrálů dostaneme vztah

$$v_f - v_i = u\ln\frac{M_i}{M_f} \qquad \text{(vzorec Ciolkovského)}, \qquad (9.47)$$

který vyjadřuje změnu rychlosti rakety při změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f.* Dokumentuje rovněž výhodnost konstrukce vícestupňových raket, jejichž hmotnost M_f klesá nejen spalováním pohonných hmot, ale i uvolněním vyhořelých stupňů. Ideální raketu by v cíli jejího letu měl tvořit pouze užitečný náklad.

PŘÍKLAD 9.12

Raketa, jejíž počáteční hmotnost M_i je 850 kg, spotřebovává palivo rychlostí $R = 2{,}3\,kg{\cdot}s^{-1}$. Zplodiny opouštějí raketu relativní rychlostí $u = 2\,800\,m{\cdot}s^{-1}$.

(a) Jaký je tah motoru?

ŘEŠENÍ: Tah motoru je

$$T = Ru = (2{,}3\,kg{\cdot}s^{-1})(2\,800\,m{\cdot}s^{-1}) = $$
$$= 6\,440\,N \doteq 6\,400\,N. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaké je počáteční zrychlení rakety?

ŘEŠENÍ: Z pohybové rovnice rakety dostáváme

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{(6\,440\,N)}{(850\,kg)} = 7{,}6\,m{\cdot}s^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při startu rakety z povrchu Země musí být tah T motoru větší než tíhová síla, kterou na raketu působí Země. Ta má v našem případě velikost $M_i g = (850\,kg)(9{,}8\,m{\cdot}s^{-2}) = 8\,300\,N$. Tah motoru je však pouhých $T = 6\,400\,N$, takže naše raketa nemůže odstartovat. Může však být do meziplanetárního prostoru vynesena nějakou silnější raketou.

(c) Předpokládejme, že naše raketa startuje z vesmírné lodi, která se již nachází v meziplanetárním prostoru. Gravitační síly tedy můžeme zanedbat. Po vyčerpání paliva má raketa hmotnost $M_f = 180\,kg$. Jaká je její rychlost vzhledem k lodi v tomto okamžiku? Předpokládejme, že hmotnost vesmírné lodi je tak velká, že start rakety její pohyb neovlivní.

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost rakety vzhledem k vesmírné lodi je $v_i = 0$. Z rov. (9.47) dostaneme

$$v_f = u\ln\frac{M_i}{M_f} =$$
$$= (2\,800\,m{\cdot}s^{-1})\ln\frac{(850\,kg)}{(180\,kg)} =$$
$$= (2\,800\,m{\cdot}s^{-1})\ln 4{,}72 \doteq 4\,300\,m{\cdot}s^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledná rychlost rakety může převýšit relativní rychlost zplodin u vzhledem k raketě.

9.8 VNĚJŠÍ SÍLY A ZMĚNY VNITŘNÍ ENERGIE

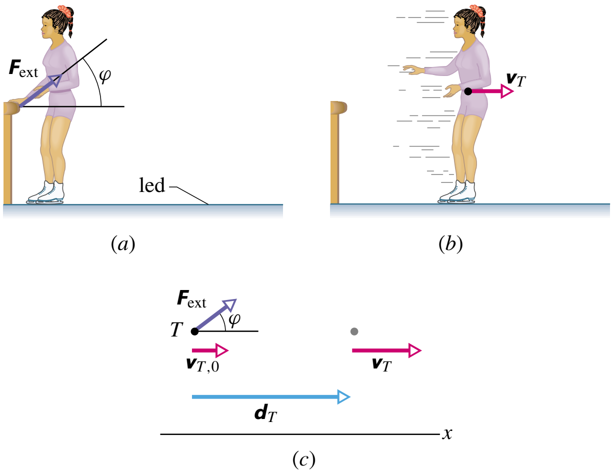
Krasobruslařka na obr. 9.17a se odráží od mantinelu. Ten na ni působí silou $\boldsymbol{F}_{ext}$, svírající s vodorovnou rovinou úhel φ. Bruslařka, která byla zpočátku v klidu, získá vlivem této síly určitou rychlost, s níž se pak vzdaluje od mantinelu (obr. 9.17b). Působením síly se tedy zvýšila kinetická energie bruslařky.

Případ bruslařky se liší od předchozích příkladů, kdy docházelo ke změně kinetické energie tělesa vlivem působení vnějších sil, ve dvou podstatných rysech:

1. V předchozích příkladech byla rychlost všech částí tělesa stejná (těleso jsme mohli při studiu jeho pohybu považovat za bodový objekt). V případě bruslařky již tomu tak není. Například pohyb jejích paží se liší od pohybu jejího trupu.

2. V předchozích příkladech se kinetická energie tělesa měnila vlivem působení vnějších sil na úkor energie okolí. V případě bruslařky dochází ke změně její kinetické energie na úkor energie vnitřní (biochemické). Vnější síla v tomto případě nekoná práci, neboť vektor posunutí jejího působiště je po celou dobu jejího působení nulový (síla působí na ruku bruslařky v pevném bodě mantinelu). Práci konají síly napínající svalstvo, tj. *vnitřní síly soustavy*.

* Symbol „ln" v rovnici (9.47) značí přirozený logaritmus, tj. logaritmus o základu e (= 2,718 …).



Obr. 9.17 (a) Bruslařka se odráží od mantinelu, který na ni působí silou $\boldsymbol{F}_{ext}$. (b) Její těžiště má v okamžiku ztráty kontaktu s mantinelem rychlost $\boldsymbol{v}_T$. (c) Vnější síla $\boldsymbol{F}_{ext}$ působící na bruslařku při odrazu od mantinelu je zakreslena jako síla působící na její těžiště. Při posunutí těžiště o vektor $\boldsymbol{d}_T$ se jeho rychlost změní z $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na $\boldsymbol{v}_T$. Tato změna je určena vodorovnou složkou síly $\boldsymbol{F}_{ext}$.

Zdá se, že tyto rozdíly, odlišující popsaný případ bruslařky od všech ostatních příkladů změny kinetické energie těles, kterými jsme se prozatím zabývali, jsou naprosto zásadní. Přesto však je možné *formálně* vyjádřit změnu kinetické energie bruslařky jako práci síly $\boldsymbol{F}_{ext}$ působící na částici, jejímž pohybem lze nahradit pohyb bruslařky jako *celku*, tj. její **posuvný** neboli **translační** pohyb. Touto „náhradní" částicí je těžiště bruslařky. Situaci ukazuje obr. 9.17c. Předpokládejme, že těžiště bruslařky se pohybuje vodorovně. Svislá složka výslednice sil působících na bruslařku, daná tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$, tlakovou silou ledové plochy $\boldsymbol{N}$ a svislým průmětem síly $\boldsymbol{F}_{ext}$, je tedy nulová. Vodorovná složka $F_{ext}\cos\varphi$ síly $\boldsymbol{F}_{ext}$ určuje vodorovné zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ těžiště. Za dobu, po kterou tato síla působí, se rychlost těžiště změní z počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na výslednou rychlost $\boldsymbol{v}_T$. Odpovídající posunutí těžiště bruslařky označme $\boldsymbol{d}_T$. Podle rov. (2.16) je velikost výsledné rychlosti těžiště dána vztahem

$$v_T^2 = v_{T,0}^2 + 2a_{T,x}d_T. \qquad (9.48)$$

Po vynásobení této rovnice hmotností M a malé úpravě dostaneme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_T. \qquad (9.49)$$

Levá strana rov. (9.49) představuje změnu kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ těžiště bruslařky z počáteční hodnoty $(E_{k,T})_i$ na výslednou hodnotu $(E_{k,T})_f$. Vzhledem k platnosti věty o hybnosti (druhého Newtonova zákona pro těžiště) můžeme nahradit součin $Ma_{T,x}$ vodorovnou složkou vnější síly $F_{ext}\cos\varphi$:

$$\Delta E_{k,T} = F_{ext}d_T\cos\varphi. \qquad (9.50)$$

Tento *formální* výsledek lze interpretovat obvyklým způsobem: Kinetická energie příslušná posuvnému pohybu soustavy se mění na úkor práce, kterou koná výslednice vnějších sil umístěná v jejím těžišti.

Zdůrazněme ještě jednou důležitý aspekt problému bruslařky: Vnější síla, která na ni působí při odrazu od mantinelu, ve skutečnosti *nekoná práci*, neboť její skutečné působiště je v klidu. Změna kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ musí tedy být doprovázena změnou vnitřní energie ΔE_{int} soustavy. (Předpokládáme, že vnitřní energie bruslařky se změnila jen o biochemickou energii jejích svalů.) V souladu s obecnou formulací zákona zachování energie v kap. 8 platí

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{int} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{int} = -\Delta E_{k,T}. \qquad (9.51)$$

Dosazením z rov. (9.50) do (9.51) dostaneme změnu vnitřní energie bruslařky:

$$\Delta E_{int} = -F_{ext}d_T\cos\varphi. \qquad (9.52)$$

Ze vztahů (9.51) a (9.52) je tedy nakonec zřejmé, že kinetická energie bruslařky se mění na úkor její energie vnitřní. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $F_{ext}d_T\cos\varphi$.

Představme si nyní ještě obecnější situaci, při níž se bude těžiště bruslařky pohybovat i ve svislém směru. Bude se při tom měnit i tíhová potenciální energie *izolované* soustavy bruslařka + Země. Označíme-li změnu tíhové potenciální energie jako $\Delta E_{p,T}$, můžeme psát zákon zachování energie ve tvaru

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} + \Delta E_{int} = 0. \qquad (9.53)$$

Změna vnitřní energie soustavy je dána prací sil napínajících svalstvo bruslařky. Tu můžeme opět formálně zapsat jako práci výslednice vnějších sil působících na bruslařku, umístěné však do jejího těžiště: zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa x měla směr vodorovného posunutí těžiště bruslařky, osa y nechť je svislá. Zrychlení těžiště označme $\boldsymbol{a}_T$ a vektor jeho posunutí $\boldsymbol{d}_T$. Stejným postupem, jakým jsme odvodili vztah (9.49), získáme změnu kinetické energie bruslařky ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_{T,x} + Ma_{T,y}d_{T,y}.$$

Podle věty o hybnosti je zrychlení těžiště bruslařky určeno výslednicí všech vnějších sil, které na ni působí, tj. tíhové síly, tlakové síly ledové plochy a tlakové síly mantinelu:

$$M\boldsymbol{a}_T = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{ext}}.$$

Této vektorové rovnici odpovídají dvě skalární rovnice pro její složky:

$$Ma_{T,x} = F_{\text{ext}} \cos\varphi, \quad Ma_{T,y} = -Mg + N + F_{\text{ext}} \sin\varphi.$$

Pro změnu kinetické energie bruslařky tedy dostáváme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = F_{\text{ext}} \cos\varphi d_{T,x} + \\ + (-Mg + N + F_{\text{ext}} \sin\varphi) d_{T,y}.$$

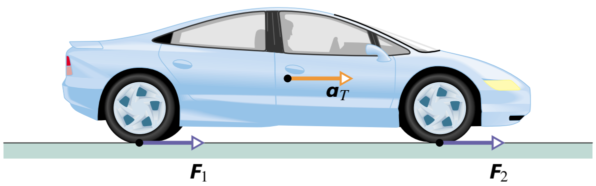
Výraz $-Mgd_{T,y}$ představuje práci tíhové síly, tj. záporně vzatou změnu tíhové potenciální energie soustavy bruslařka + Země. Porovnáme-li předchozí vztah s rov. (9.53), můžeme psát

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} - \\ - F_{\text{ext}} \cos\varphi d_{T,x} - (N + F_{\text{ext}} \sin\varphi) d_{T,y} = 0,$$

tj.

$$\Delta E = \Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} = (\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \quad (9.54)$$

ΔE značí změnu mechanické energie soustavy bruslařka + + Země, která se podle rov. (9.54) mění na úkor její vnitřní energie. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $(\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T$. (Uvědomme si, že síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí mantinel na ruku bruslařky, se stala vnitřní silou působící v nově zvolené izolované soustavě bruslařka+Země. Odpovídající reakcí je síla $-\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí bruslařka na mantinel. Vnitřními silami nové soustavy jsou i tíhové síly $M\boldsymbol{g}$ a $-M\boldsymbol{g}$, vyjadřující gravitační interakci bruslařky se Zemí, a tlakové síly $\boldsymbol{N}$ a $-\boldsymbol{N}$, popisující vzájemné působení bruslařky a ledové plochy.)



Obr. 9.18 Automobil, který je zpočátku v klidu, se rozjíždí směrem vpravo. Silnice působí na povrch pneumatik třecími silami, z nichž dvě $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ jsou v obrázku vyznačeny. Součet těchto sil určuje výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo.

Není-li vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, nahradíme ji ve vztazích (9.52) a (9.54) odpovídající průměrnou veličinou $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}}$.

Věnujme bruslařce ještě poslední úvahu a zkusme si uvědomit, jakým způsobem dochází ke vzniku silového působení mantinelu na její ruku. Bruslařka položí pokrčenou paži na mantinel a začne se od něj „odtlačovat“ napínáním svalů. Svou vůlí tedy řídí vzájemné působení částí soustavy, ovlivňuje *vnitřní* síly. Ruka tlačí na mantinel určitou silou. Podle třetího Newtonova zákona působí naopak mantinel na ruku bruslařky silou opačnou. Tato síla, kterou jsme označili symbolem $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je ovšem z hlediska bruslařky silou *vnější*.

Vztahy (9.52) a (9.54) platí i pro jiné objekty, u nichž dochází, podobně jako u bruslařky, k vyvolání vnějších sil, či jejich změn prostřednictvím změn sil vnitřních. Pokud tyto vnější síly nekonají práci (například proto, že jejich působiště je v klidu), mění se mechanická energie takových soustav pouze na úkor vnitřní energie.

Uvažujme například rozjíždějící se automobil. Motor pohání kola, jejichž pneumatiky působí na vozovku třecími silami směřujícími proti zrychlení automobilu. Podle třetího Newtonova zákona působí vozovka na povrch pneumatik rovněž třecími silami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, avšak ve směru zrychlení (obr. 9.18). Tyto třecí síly tvoří výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo (tíhová a normálová síla jsou kompenzovány) a udílí jeho těžišti zrychlení $\boldsymbol{a}_T$. Vnitřní energie automobilu (uvolněná spalováním paliva v motoru) klesá ve prospěch jeho energie kinetické. Je-li síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, lze při daném posunutí $\boldsymbol{d}_T$ těžiště vozidla snadno vyjádřit změnu $\Delta E_{\text{k},T}$ kinetické energie pomocí rov. (9.54), položíme-li $\Delta E_{\text{p},T} = 0$ a uvážíme-li, že výsledná vnější síla svírá s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 0°$.

Vztah (9.54) platí i v situaci, kdy rozjetý automobil brzdí. Výsledná vnější síla je nyní orientována proti směru pohybu a svírá tedy s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 180°$. Kinetická energie těžiště vozidla klesá ve prospěch vnitřní energie (zahřívá se brzdové obložení).

PŘÍKLAD 9.13

Převrátí-li se brouk kovařík náhodou na záda, pomůže si obvykle tak, že prudce vyklene záda a vyskočí vzhůru. Při tom se energie uložená ve svalech „přemění“ v kinetickou energii. Tento pohyb je doprovázen slyšitelným cvaknutím, s kterým souvisí anglický název brouka („clik beetle“). Videozáznam výskoku brouka ukázal, že se jeho těžiště během vyklenutí zad těsně před výskokem zvedlo o $d_T = 0{,}77$ mm a při výskoku dosáhlo výšky $h = 0{,}30$ m. Hmotnost brouka je $m = 4{,}0 \cdot 10^{-6}$ kg. Určete velikost průměrné síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou při výskoku působila podložka na záda brouka.

ŘEŠENÍ: Soustava brouk + Země je izolovaná. Její celková energie se tedy zachovává. Aplikujme tento zákon zachování na časový interval T měřený od počátku výskoku do okamžiku, kdy těžiště brouka dosáhlo maximální výšky h. Během doby T dojde k následujícím změnám jednotlivých druhů energie: (1) Změna kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ je nulová, protože na počátku i na konci uvažovaného časového intervalu je brouk v klidu. (2) Změna $\Delta E_{p,T}$ tíhové potenciální energie soustavy brouk + Země je rovna mgh. (3) Změna vnitřní energie ΔE_{int} svalstva brouka, která během „přípravy k výskoku" vyvolá vnější sílu $\boldsymbol{F}_{ext}$.

Vztah vyjadřující skutečnost, že se energie soustavy brouk + Země v průběhu časového intervalu T zachovává, má tvar

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} + \Delta E_{int} = 0.$$

Dosazením za $\Delta E_{k,T}$ a $\Delta E_{p,T}$ dostaneme

$$0 + mgh + \Delta E_{int} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{int} = -mgh. \tag{9.55}$$

Dosadíme z rov. (9.52) do (9.55):

$$\overline{F}_{ext} d_T \cos\varphi = mgh,$$

odkud

$$\overline{F}_{ext} = \frac{mgh}{d_T \cos\varphi}. \tag{9.56}$$

Úhel φ mezi silou $\boldsymbol{F}_{ext}$ směřující vzhůru a posunutím $\boldsymbol{d}_T$ je $0°$. Pro zadané hodnoty nakonec dostaneme

$$\overline{F}_{ext} = \frac{(4{,}0\cdot10^{-6}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}30\,\mathrm{m})}{(7{,}7\cdot10^{-4}\,\mathrm{m})\cos 0°} = $$
$$= 1{,}5\cdot10^{-2}\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato síla je malá pouze zdánlivě. Velikost zrychlení, které uděluje tělu brouka při výskoku, dosahuje totiž hodnoty zhruba $380g$.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Těžiště

Těžiště soustavy částic je bod o souřadnicích

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\; y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\; z_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \tag{9.5}$$

tj.

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{9.8}$$

kde M je celková hmotnost soustavy. Je-li hmota soustavy rozložena spojitě, je poloha těžiště dána vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\; y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\; z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

Je-li hustota tělesa (hmotnost jednotkového objemu) konstantní, lze rov. (9.9) přepsat ve tvaru

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\; y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\; z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V, \tag{9.11}$$

kde V je objem tělesa o hmotnosti M.

Věta o hybnosti pro soustavu částic

Pohyb těžiště libovolné soustavy částic se řídí **větou o hybnosti**:

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.16}$$

Symbolem $\sum \boldsymbol{F}_{ext}$ jsme označili výslednici *vnějších* sil působících na soustavu, M je celková hmotnost soustavy a $\boldsymbol{a}_T$ zrychlení jejího těžiště.

Hybnost a věta o hybnosti

Hybnost jedné částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{9.22}$$

Druhý Newtonův zákon pak můžeme pomocí hybnosti přepsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{9.23}$$

Pro soustavu částic mají předchozí vztahy tvar

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T \tag{9.26}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.28}$$

Relativistická hybnost

Relativistická definice hybnosti má tvar

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{9.24}$$

Tuto definici, jejíž platnost je obecná, je třeba použít pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla c. Pro $v \ll c$ přejde rov. (9.24) v (9.22).

Zákon zachování hybnosti

Je-li soustava izolovaná, tj. nepůsobí-li na ni žádné *vnější* síly, je její hybnost $\boldsymbol{P}$ trvale konstantní:

$$\boldsymbol{P} = \text{konst}, \tag{9.30}$$

tj.

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \tag{9.31}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy $\boldsymbol{P}$ v počátečním a koncovém okamžiku časového intervalu, v němž soustavu sledujeme. Vztahy (9.30) a (9.31) představují ekvivalentní formulace **zákona zachování hybnosti**.

Soustavy s proměnnou hmotností

Při popisu pohybu soustavy s proměnnou hmotností postupujeme obvykle tak, že zkoumanou soustavu považujeme za součást rozšířené soustavy, vymezené tak, aby byla uzavřená (tj. *měla konstantní hmotnost*) a izolovaná. Pro ni pak použijeme zákon zachování hybnosti. V případě rakety bude rozšířená soustava obsahovat jak raketu, tak i zplodiny vzniklé spalováním pohonných hmot, které raketu opouštějí. Je-li takto zvolená rozšířená soustava izolovaná, lze ukázat, že se okamžité zrychlení rakety řídí rovnicí Meščerského

$$Ma = Ru, \tag{9.46}$$

kde M je okamžitá hmotnost rakety (včetně zbytku pohonných hmot), R je rychlost spotřeby paliva (v kg/s) a u představuje rychlost uvolňovaných zplodin vzhledem k raketě. Člen Ru se nazývá **tah** raketového **motoru**. Předpokládejme, že rychlost rakety (složka ve směru pohybu) se změnila z v_i na v_f při odpovídající změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f. V případě raketového motoru s konstantní rychlostí spotřeby paliva R a konstantní rychlostí u platí vzorec Ciolkovského

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}}. \tag{9.47}$$

Vnější síly a změny vnitřní energie

Vnější síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ působící na těleso může být vyvolána působením vnitřních sil, které konají práci a způsobují odpovídající změnu vnitřní energie tělesa ΔE_int:

$$\Delta E_\mathrm{int} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} \cdot \boldsymbol{d}_T = -F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.52}$$

Symbolem $\boldsymbol{d}_T$ jsme označili posunutí těžiště tělesa, φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_T$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$. Mění-li se na úkor vnitřní energie pouze kinetická energie tělesa, platí

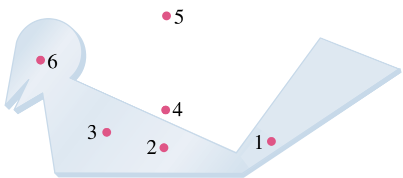
$$\Delta E_{\mathrm{k},T} = F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.50}$$

Dochází-li i ke změnám potenciální energie tělesa, je změna mechanické energie dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k},T} + \Delta E_{\mathrm{p},T} = (\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \tag{9.54}$$

OTÁZKY

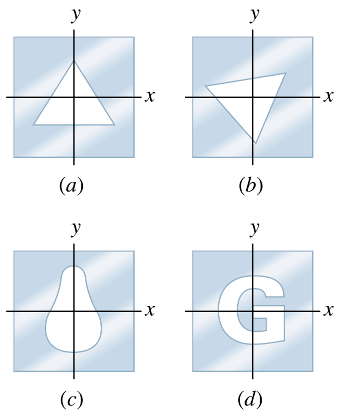
1. Chlapec vyrobil z kusu kovového plechu konstantní tloušťky c ptáka (obr. 9.19). Který z očíslovaných bodů je s největší pravděpodobností těžištěm modelu?



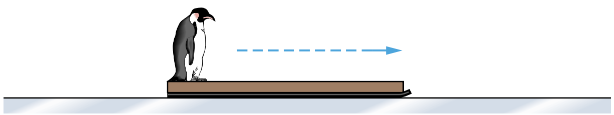
Obr. 9.19 Otázka 1

2. Na obr. 9.20 jsou zakresleny čtyři čtvercové kovové desky s vyříznutými otvory různých tvarů. Počátek soustavy souřadnic v rovině xy splývá ve všech případech se středem čtvercové desky, tj. s jejím těžištěm před vyříznutím otvoru. Odhadněte polohu těžiště každé desky s otvorem (je-li to možné, rozhodněte, v kterém leží kvadrantu, případně na které ose, nebo dokonce ve kterém bodě).

3. Na obr. 9.21 je zachycen tučňák stojící na levém konci homogenních sáněk délky L, které leží na dokonale hladkém ledovém povrchu. Hmotnosti obou těles jsou shodné. (a) Určete polohu těžiště sáněk. (b) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky. Tučňák přechází k pravému konci sáněk. Sáňky přitom kloužou po ledě. (c) Jak se pohybuje těžiště soustavy tučňák + sáňky? Doleva, doprava, nebo zůstává v klidu? (d) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky poté, co tučňák přešel k pravému konci sáněk. (e) Jakou dráhu tučňák urazil vzhledem k sáňkám? (f) Jakou dráhu urazilo těžiště sáněk vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky? (g) Jakou dráhu urazil vzhledem k němu tučňák? (Přípravná otázka k úloze 23.)



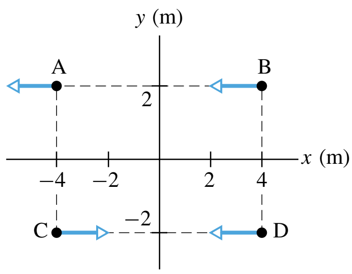
Obr. 9.20 Otázka 2



Obr. 9.21 Otázky 3 a 4

4. Předpokládejme, že se tučňák i sáňky z otázky 3 na obr. 9.21 zpočátku pohybují vpravo rychlostí v_0. (a) Rozhodněte, zda je rychlost v, kterou se pohybují sáňky vzhledem k ledu během přesunu tučňáka k jejich pravému konci, větší, menší, nebo stejná jako v_0. (b) Zodpovězte tutéž otázku, přechází-li tučňák zpět k levému konci sáněk.

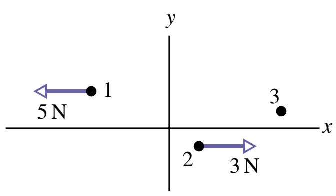
5. Na obr. 9.22 jsou zakresleny čtyři částice stejné hmotnosti, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné rovině stálými rychlostmi (pohled shora). Směry rychlostí jsou v obrázku vyznačeny, velikosti jsou shodné. Která dvojice částic tvoří soustavu, jejíž těžiště (a) je v klidu, (b) je v klidu v počátku soustavy souřadnic, (c) projde při svém pohybu počátkem soustavy souřadnic?



Obr. 9.22 Otázka 5

6. (a) Představme si poněkud absurdní situaci: dva melouny jsme současně upustili z mostu. Jaké je zrychlení těžiště této dvoučásticové soustavy? (b) Jaké bude zrychlení těžiště soustavy dvou padajících melounů, upustíme-li jeden z nich o něco později?

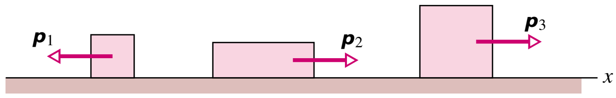
7. Obr. 9.23 představuje pohled shora na soustavu tří částic, na něž působí vnější síly. Směry a velikosti sil působících na dvě z těchto částic jsou v obrázku vyznačeny. Jaká je velikost a směr síly působící na třetí částici, jestliže (a) je těžiště soustavy v klidu, (b) pohybuje se konstantní rychlostí vpravo, (c) urychluje se směrem vpravo?



Obr. 9.23 Otázka 7

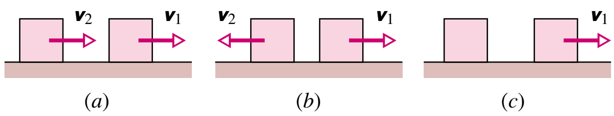
8. Těleso, které se pohybuje podél osy x po dokonale hladké vodorovné podložce, se náhle rozpadne na tři části. Každá z nich se dále pohybuje podél osy x ve směru vyznačeném v obr. 9.24. Následující tabulka obsahuje čtyři soubory hodnot velikostí hybností $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3$ jednotlivých částí tělesa v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte tyto soubory sestupně podle velikosti počáteční rychlosti tělesa.

	p_1	p_2	p_3
(a)	10	2	6
(b)	10	6	2
(c)	2	10	6
(d)	6	2	10



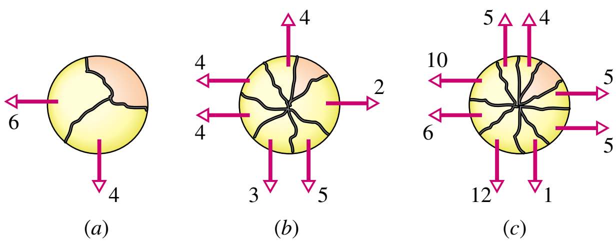
Obr. 9.24 Otázka 8

9. Podobně jako v př. 9.7 uvažujme těleso, které se pohybuje konstantní rychlostí ve směru kladné osy x a náhle se rozpadne na dvě části. Jedna z nich, o hmotnosti m_1, pokračuje v pohybu ve směru kladné osy x. Její rychlost je $\boldsymbol{v}_1$. Druhá část tělesa má hmotnost m_2 a pohybuje se rychlostí $\boldsymbol{v}_2$ (a) podél kladné osy x (obr. 9.25a), (b) podél záporné osy x (obr. 9.25b), (c) je v klidu (obr. 9.25c). Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti rychlosti $\boldsymbol{v}_1$.



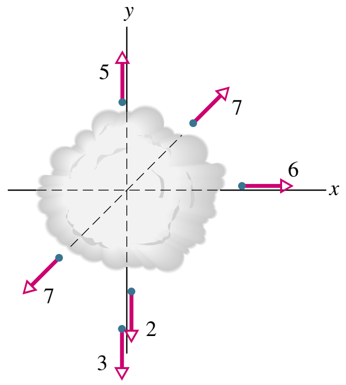
Obr. 9.25 Otázka 9

10. Obr. 9.26 ukazuje pohled shora na těleso, které se při výbuchu rozbušky rozpadlo (a) na tři části (obrázek (a)), (b) sedm částí, (c) devět částí. Díly tělesa se po výbuchu pohybovaly po dokonale hladké vodorovné podlaze. Pro každou situaci jsou v obr. 9.26 vyznačeny vektory hybnosti všech částí tělesa s výjimkou jedné, jejíž hybnost označíme $\boldsymbol{P}'$. Čísla uvedená u jednotlivých vektorů udávají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte situace na obrázcích sestupně podle velikosti (a) složky P'_x, (b) složky P'_y a (c) vektoru $\boldsymbol{P}'$.



Obr. 9.26 Otázka 10

11. Obr. 9.27 znázorňuje pohled shora na šest částic, které vznikly „dvojrozměrným“ výbuchem tělesa. Před výbuchem spočívalo těleso v klidu na dokonale hladké vodorovné podložce. Směry hybností částic jsou na obrázku vyznačeny vektory, čísla znamenají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. (a) Vzniklo při explozi více částic, než je znázorněno? (b) Jestliže ano, najděte jejich výslednou hybnost a (c) směr jejich pohybu.



Obr. 9.27 Otázka 11

12. V tabulce jsou uvedeny hmotnosti a vzdálenosti pro tři různé dvojice částic:

	m_1	m_2	POČÁTEČNÍ VZDÁLENOST d
dvojice 1	$2m$	$8m$	1,0 m
dvojice 2	$3m$	$6m$	2,0 m
dvojice 3	$4m$	$9m$	0,5 m

Částice ve dvojicích na sebe působí přitažlivými silami. Zpočátku jsou obě částice každé dvojice udržovány vnějšími silami v klidu ve vzdálenosti d a v určité chvíli jsou uvolněny. V okamžiku, kdy jejich vzdálenost klesne na hodnotu $d/2$, má částice o hmotnosti m_1 rychlost v_1 a částice o hmotnosti m_2 rychlost v_2. Bez písemných výpočtů seřaďte dvojice částic sestupně podle hodnoty poměru v_1/v_2. (*Tip*: Př. 9.10.)

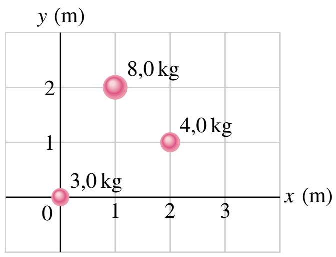
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 9.2 Těžiště

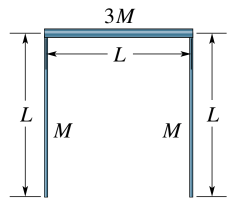
1C. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy Země + Měsíc od středu Země? (V dod. C jsou uvedeny hmotnosti Země a Měsíce i jejich vzdálenost). (b) Vyjádřete výsledek získaný v části (a) v jednotkách poloměru Země.

2C. Vzdálenost středů atomů uhlíku (C) a kyslíku (O) v molekule oxidu uhelnatého (CO) je $1{,}131 \cdot 10^{-10}$ m. Najděte polohu těžiště molekuly CO vzhledem ke středu atomu uhlíku. (Hmotnosti atomů C a O jsou uvedeny v dod. D.)

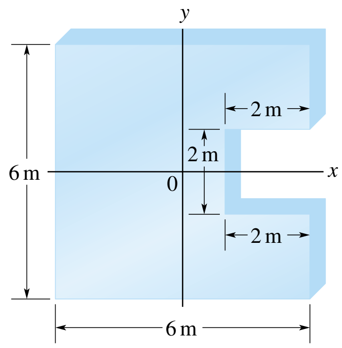
3C. (a) Určete souřadnice těžiště soustavy tří částic na obr. 9.28. (b) Co se bude dít s těžištěm, bude-li se hmotnost nejvýše položené částice postupně zvětšovat?



Obr. 9.28 Cvičení 3



Obr. 9.29 Cvičení 4



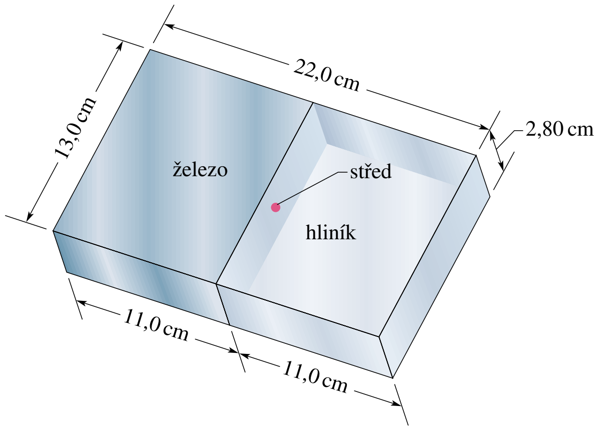
Obr. 9.30 Cvičení 5

4C. Tři tenké tyče o stejné délce L vytvořily těleso ve tvaru obráceného U (obr. 9.29). Dvě boční tyče mají hmotnost M, hmotnost třetí tyče je $3M$. Určete polohu těžiště tělesa.

5C. V homogenní čtvercové desce o straně 6 m byl vyříznut čtvercový otvor o straně 2 m podle obr. 9.30. Střed otvoru má souřadnice $x = 2$ m a $y = 0$. Určete polohu těžiště zbytku desky. Těžiště původní desky leželo v počátku soustavy souřadnic.

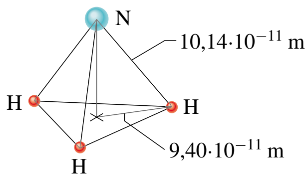
6Ú. Dokažte, že poměr vzdáleností částic dvoučásticové soustavy od jejího těžiště je roven převrácenému poměru hmotností částic.

7Ú. Na obr. 9.31 jsou uvedeny rozměry desky složené ze dvou částí. Polovina desky je vyrobena z hliníku s hustotou 2,70 g/cm^3 a polovina je ze železa o hustotě 7,85 g/cm^3. Najděte polohu těžiště desky.



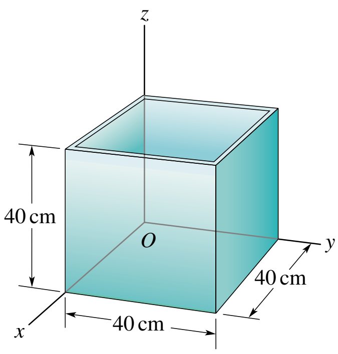
Obr. 9.31 Úloha 7

8Ú. Tři atomy vodíku (H) v molekule čpavku NH_3 (obr. 9.32) tvoří rovnostranný trojúhelník. Jeho těžiště leží ve vzdálenosti $9{,}40\cdot10^{-11}$ m od každého atomu vodíku. Atom dusíku (N) je vrcholem čtyřstěnu o podstavě tvořené atomy vodíku. Vzdálenost N-H je $10{,}14\cdot10^{-11}$ m, hmotnosti atomů N a H jsou v poměru 13,9 : 1,0. Určete polohu těžiště molekuly vůči atomu dusíku.



Obr. 9.32 Úloha 8

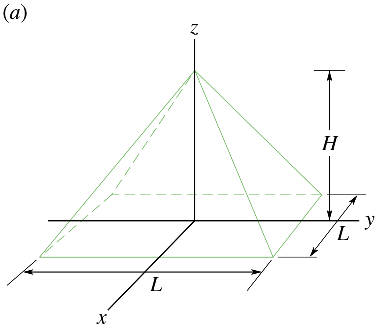
9Ú. Krychlová krabice bez horní stěny má délku hrany 40 cm. Je vyrobena z homogenního kovového plechu zanedbatelné tloušťky (obr. 9.33). Určete souřadnice jejího těžiště.



Obr. 9.33 Úloha 9

10Ú. Velká (Cheopsova) pyramida v egyptské Gíze (obr. 9.34a) měla kdysi výšku $H = 147$ m. Později z jejího vrcholu vypadl vrcholový kámen. Základnou pyramidy je čtverec o straně $L = 230$ m (obr. 9.34b), její objem je $L^2H/3$. Předpokládejme, že pyramida je homogenní těleso o hustotě $\varrho = 1{,}8\cdot10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Určete (a) původní výšku těžiště pyramidy nad základnou, (b) práci potřebnou k vyzdvižení vypadlého kvádru z úrovně základny na původní místo.

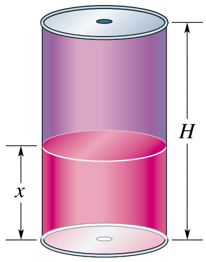
(*a*)



(*b*)

Obr. 9.34 Úloha 10

11Ú★. Válcová plechovka o hmotnosti M a výšce H je vyrobena z homogenního materiálu a naplněna limonádou o hmotnosti m (obr. 9.35). Do dna a horní podstavy plechovky vyvrtáme malé otvory, aby nápoj mohl vytékat. Okamžitou výšku těžiště plechovky nad jejím dnem označíme h. Určete hodnotu h (a) pro plnou plechovku a (b) v okamžiku, kdy již všechen nápoj vytekl. (c) Jak se mění hodnota h během vytékání nápoje? (d) Okamžitou výšku zbývajícího sloupce kapaliny v plechovce označme x. Vyjádřete hodnotu x pomocí M, H a m v okamžiku, kdy je těžiště plechovky se zbytkem nápoje v nejnižší možné poloze.



Obr. 9.35 Úloha 11

ODST. 9.3 Věta o hybnosti

12C. Dva bruslaři o hmotnostech 65 kg a 40 kg drží tyč o délce 10 m těsně u jejích konců. Tyč má zanedbatelnou hmotnost.

Bruslaři k sobě ručkují až do okamžiku setkání. Jak daleko se podél tyče posune bruslař o hmotnosti 40 kg?

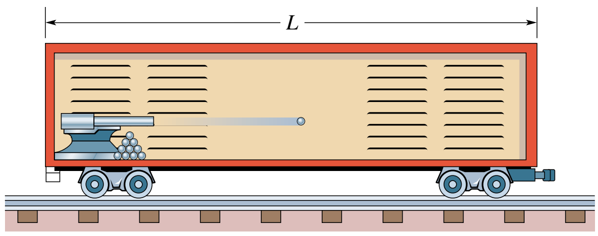
13C. Dva automobily o hmotnostech 2 400 kg a 1 600 kg jedou stejným směrem po přímé silnici rychlostmi 80 km/h a 60 km/h. Jakou rychlostí se pohybuje těžiště jejich soustavy?

14C. Člověk o hmotnosti m stojí na provazovém žebříku spuštěném z balonu o hmotnosti M (obr. 9.36). Balon je vzhledem k zemi v klidu. (a) Člověk začne stoupat rychlostí v vzhledem k žebříku. Určete rychlost balonu vzhledem k zemi (velikost a směr). (b) Popište pohybový stav soustavy od okamžiku, kdy člověk přestane šplhat.

Obr. 9.36 Cvičení 14

15C. Dvě částice P a Q o hmotnostech 0,10 kg a 0,30 kg jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti 1,0 m a přitahují se konstantní silou o velikosti $1{,}0\cdot10^{-2}$ N. Vnější síly na soustavu nepůsobí. (a) Popište pohyb těžiště soustavy. (b) V jaké vzdálenosti od původní polohy částice P se obě částice setkají?

16C. Dělo a munice jsou naloženy v uzavřeném železničním voze délky L (obr. 9.37). Dělo střílí směrem vpravo, vůz se při zpětném rázu pohybuje vlevo. Vypálené dělové koule se odrážejí od vzdálenější stěny vozu a padají na podlahu. (a) Do jaké největší vzdálenosti od své původní polohy se může vůz dostat, než dělo vystřílí všechny koule? (b) Za jakých podmínek vůz tuto vzdálenost skutečně urazí? (c) Jaká je rychlost vozu v okamžiku, kdy dělo vystřílí všechny koule?



Obr. 9.37 Cvičení 16

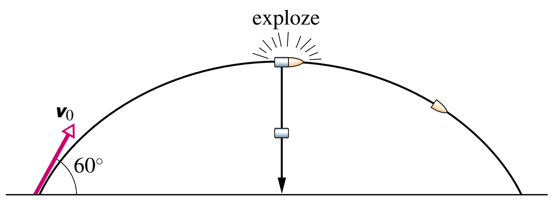
17Ú. Soustava je složena ze dvou částic o hmotnostech 3,0 kg a 4,0 kg. V jistém okamžiku má první částice rychlost $6{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ve směru záporné osy y a druhá se pohybuje rychlostí $7{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ve směru kladné osy x. Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

18Ú. Kámen byl uvolněn v okamžiku $t = 0$ a padá volným pádem. Jiný kámen o dvojnásobné hmotnosti je uvolněn z téhož místa o 100 ms později. Najděte (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy těchto dvou kamenů v okamžiku $t = 300$ ms. (Předpokládejte, že do tohoto okamžiku žádný z nich ještě nedopadl na zem.)

19Ú. Osobní automobil o hmotnosti 1 000 kg stojí před semaforem. Rozsvítí se zelená a automobil se rozjíždí s konstantním zrychlením $4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. V tom okamžiku jej předjede nákladní dodávka o hmotnosti 2 000 kg, která jede stálou rychlostí $8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy automobil + dodávka od semaforu v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

20Ú. Richard a Kamila sedí v kánoi na jezeře. Richard má hmotnost 80 kg a Kamila o něco menší. Hmotnost kánoe je 30 kg. Chlapec a dívka sedí ve vzdálenosti 3,0 m od sebe, symetricky vzhledem k těžišti prázdné kánoe. Voda je klidná a kánoe je vůči ní rovněž v klidu. Richard s Kamilou se rozhodli, že si vymění místa. Richard si všiml, že se kánoe při výměně posunula o 40 cm vzhledem ke kůlu ponořenému ve vodě. Na základě tohoto údaje se mu podařilo vypočítat hmotnost Kamily. Kolik mu vyšlo?

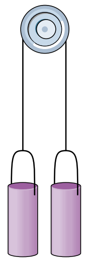
21Ú. Náboj je vystřelen s počáteční rychlostí $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 60°. Ve vrcholu své trajektorie se roztrhne na dvě části o stejné hmotnosti (obr. 9.38). Jedna část, jejíž rychlost je bezprostředně po výbuchu nulová, padá svisle dolů. Jak daleko od děla dopadne druhá část, stojí-li dělo na vodorovném terénu a zanedbáme-li odpor vzduchu?



Obr. 9.38 Úloha 21

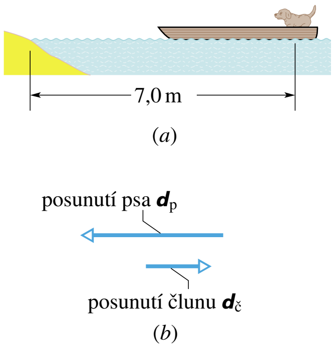
22Ú. Dvě stejné nádoby s cukrem jsou spojeny nehmotným vláknem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti o poloměru 50 mm. Kladka se může otáčet bez tření (obr. 9.39). Obě nádoby jsou ve stejné výši a původní hmotnost každé z nich je 500 g. (a) Určete polohu těžiště soustavy nádob. (b) Přidržíme nádoby, aby se nepohybovaly, a přemístíme 20 g cukru z jedné z nich do druhé. Určete polohu těžiště soustavy nyní. (c) Nádoby uvolníme. Jakým směrem se bude těžiště pohybovat? (d) Určete jeho zrychlení.

23Ú. Pes o hmotnosti 5,0 kg stojí na člunu ve vzdálenosti 7,0 m od břehu (obr. 9.40a). Rozběhne se ke břehu a zastaví se poté, co vzhledem k palubě člunu urazí dráhu 3,0 m. Člun má hmotnost 20,0 kg. Odporovou sílu, jíž působí voda proti pohybu člunu, můžeme zanedbat. Jak daleko je pes od břehu v okamžiku, kdy



Obr. 9.39 Úloha 22

se zastaví? (*Tip*: Na obr. 9.40b vidíme, že se pes pohybuje vlevo, zatímco člun ujíždí vpravo. Kterým směrem se bude pohybovat těžiště soustavy pes + člun?)



Obr. 9.40 Úloha 23

ODST. 9.5 Hybnost soustavy částic

24C. Jakou rychlostí by musel běžet člověk o hmotnosti 80 kg, aby měl stejnou hybnost jako automobil o hmotnosti 1 600 kg jedoucí rychlostí 1,2 km/h?

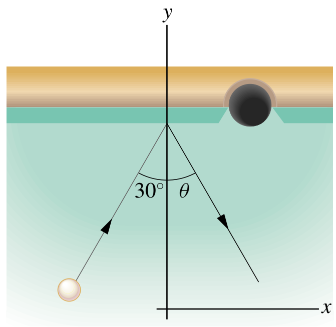
25C. Jakou rychlostí se musí pohybovat automobil o hmotnosti 816 kg, aby měl (a) stejnou hybnost, (b) stejnou kinetickou energii jako automobil o hmotnosti 2 650 kg, který jede rychlostí 16 km/h?

26C. Vypočtěte hybnost elektronu o rychlosti $0{,}99c$ ($c \doteq 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je rychlost světla).

27C. Měřením byla určena velikost hybnosti částice pohybující se rychlostí $1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Naměřená hodnota činila $2{,}9 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Vypočtěte hmotnost částice a zjistěte tak, zda šlo o elektron, nebo proton.

28C. Těleso o hmotnosti 0,70 kg se pohybuje vodorovně rychlostí $5{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po kolmém nárazu na svislou stěnu se odrazí rychlostí $2{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete velikost změny jeho hybnosti.

29Ú. Kulečníková koule o hmotnosti 0,165 kg narazila do okraje kulečníkového stolu rychlostí o velikosti $2{,}00\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a odrazila se podle obr. 9.41. Obrázek zachycuje i volbu soustavy souřadnic. Při srážce se změnilo znaménko y-ové složky vektoru rychlosti koule, x-ová složka se nezměnila. (a) Určete úhel θ vyznačený v obr. 9.41. (b) Vyjádřete změnu hybnosti koule při srážce pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (Kutálení koule neovlivní odpověď (a) ani (b).)



Obr. 9.41 Úloha 29

30Ú. Nákladní automobil o hmotnosti 2 100 kg jel nejprve na sever rychlostí 41 km/h. Pak zabočil k východu a zvýšil svou rychlost na 51 km/h. (a) Jak se změnila kinetická energie automobilu? (b) Určete i změnu jeho hybnosti (velikost a směr).

31Ú. Radiolokátor zaregistroval objekt v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r} = (3\,500 - 160t)\boldsymbol{i} + 2\,700\boldsymbol{j} + 300\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Soustava souřadnic radiolokátoru je zvolena tak, že osa x směřuje na východ, osa y na sever a osa z svisle vzhůru. Objektem byla meteorologická raketa o hmotnosti 250 kg. Určete její (a) hybnost, (b) směr pohybu a (c) výslednou sílu, která na ni působila.

32Ú. Míč o hmotnosti 50 g je vyhozen počáteční rychlostí $16\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°. (a) Určete jeho (a) kinetickou energii a (b) hybnost na počátku pohybu a těsně před dopadem na zem. (c) Dokažte, že velikost změny hybnosti míče je rovna součinu velikosti tíhové síly působící na míč a doby letu. Předpokládáme, že terén je vodorovný.

33Ú. Částice o hmotnosti m má hybnost $\boldsymbol{p}$ o velikosti mc. Vyjádřete její rychlost v jednotkách rychlosti světla c.

ODST. 9.6 Zákon zachování hybnosti

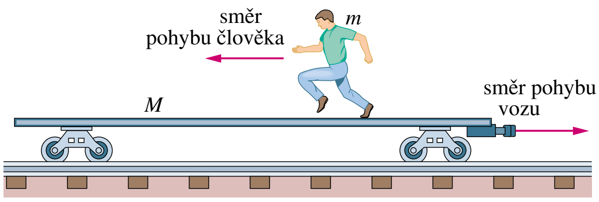
34C. Muž o hmotnosti 100 kg stojící na dokonale hladké vodorovné podlaze kopl do kamene o hmotnosti 0,08 kg, který ležel u jeho nohou. Kámen se po výkopu pohyboval vodorovně rychlostí $4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete rychlost pohybu člověka.

35C. Dvě tělesa o hmotnostech 1,0 kg a 3,0 kg jsou spojena pružinou a spočívají na dokonale hladké vodorovné podložce. Tělesa jsou uvedena do pohybu tak, že těžiště soustavy je v klidu a těleso o hmotnosti 1,0 kg se pohybuje směrem k němu počáteční rychlostí $1{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká je počáteční rychlost druhého tělesa?

36C. Vesmírná loď se vzdaluje od Země rychlostí 4 300 km/h. Z lodi je vymrštěn vyhořelý raketový motor směrem zpět. Jeho rychlost vzhledem k lodi má velikost 82 km/h. Hmotnost raketového motoru je čtyřikrát větší než hmotnost zbytku lodi. Jaká je rychlost lodi vzhledem k Zemi po oddělení motoru?

37C. Muž o hmotnosti 75 kg jede na vozíku o hmotnosti 39 kg. Rychlost vozíku je $2{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Muž náhle vyskočí vzhůru tak, že vodorovná složka jeho rychlosti vzhledem k *pevné podložce* je nulová. Určete změnu rychlosti vozíku.

38C. Plošinový železniční vůz o hmotnosti M se může pohybovat bez tření po přímé vodorovné trati. Na voze stojí člověk o hmotnosti m. Soustava se pohybuje vpravo rychlostí v_0 podle obr. 9.42. Jak se změní rychlost vozu, poběží-li člověk vlevo rychlostí v_{rel} vzhledem k vozu?



Obr. 9.42 Cvičení 38

39Ú. Poslední stupeň rakety se pohybuje rychlostí 7 600 m·s^{-1}. Skládá se ze dvou spojených částí: modulu s užitečným zatížením o hmotnosti 150,0 kg a raketového motoru, jehož hmotnost po vyčerpání pohonných hmot je 290,0 kg. V okamžiku, kdy je palivo spotřebováno, uvolní se spojovací mechanismus a části rakety se začnou od sebe vzdalovat díky působení stlačených pružin, které jsou mezi nimi umístěny. Vzájemná rychlost má velikost 910,0 m·s^{-1}. (a) Určete rychlost každé z obou částí rakety vzhledem k Zemi. Předpokládáme, že všechny vektory rychlosti leží v téže přímce. (b) Určete celkovou kinetickou energii rakety před a po oddělení částí a vysvětlete případný rozdíl.

40Ú. Radioaktivní jádro je zpočátku v klidu. Rozpadá se a emituje elektron a neutrino v navzájem kolmých směrech. (*Neutrino* je jedna z elementárních částic.) Hybnost elektronu je $1{,}2\cdot10^{-22}$ kg·m·s^{-1}, hybnost neutrina $6{,}4\cdot10^{-23}$ kg·m·s^{-1}. (a) Určete směr a velikost hybnosti zbytku jádra po rozpadu. (b) Hmotnost zbytku jádra je $5{,}8\cdot10^{-26}$ kg. Jaká je jeho kinetická energie?

41C. Elektron (hmotnost $m_1 = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg) a proton (hmotnost $m_2 = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg) se přitahují elektrickou silou. Předpokládejme, že byly uvolněny z klidu a že jejich počáteční vzdálenost byla $d = 3{,}0\cdot10^{-6}$ m. Určete poměr (a) velikostí hybností elektronu a protonu, (b) jejich rychlostí a (c) kinetických energií v okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny $1{,}0\cdot10^{-6}$ m. (d) Jak se budou měnit odpovědi na otázky (a), (b) a (c) během dalšího přibližování částic?

42Ú. Těleso o hmotnosti 4,0 kg klouže po dokonale hladké vodorovné podložce. Náhle se roztrhne na dvě části o stejných hmotnostech. Rychlosti jednotlivých částí po výbuchu jsou 3,0 m·s^{-1}směrem na sever (azimut 0°) a 5,0 m·s^{-1} s azimutem 30° (odchylka 30° východním směrem). Určete rychlost tělesa před výbuchem.

43Ú. Těleso, které bylo zpočátku v klidu, vybuchlo a rozpadlo se na tři části. Dvě z nich, o stejné hmotnosti, se rozletěly stejně velkými rychlostmi 30 m·s^{-1}do kolmých směrů. Třetí část měla třikrát větší hmotnost než každá z předchozích dvou. Určete rychlost (velikost a směr) třetí části po výbuchu.

44Ú. Plošinový železniční vůz o hmotnosti 2 140 kg, který se může pohybovat po kolejích tak, že energiové ztráty vzniklé třením jsou zanedbatelné, stojí v klidu u nástupiště. Zápasník o hmotnosti 242 kg běží rychlostí 5,3 m·s^{-1} po nástupišti souběžně s tratí a vyskočí na vůz. Určete rychlost vozu v těchto případech: (a) Zápasník zůstane na voze stát. (b) Běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 m·s^{-1} původním směrem. (c) Otočí se a běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 m·s^{-1} opačným směrem.

45Ú. Raketové sáně o hmotnosti 2 900 kg jedou po zamrzlém jezeře rychlostí 250 m·s^{-1}. Když projíždí kolem koryta, které je v ledu vysekáno pro možnost přístupu k vodě, spustí jezdec do vody nádobu a nabere do ní 920 kg vody. Pomocí zákona zachování hybnosti určete výslednou rychlost saní. Všechny brzdicí síly zanedbejte.

46Ú. Izolované těleso o hmotnosti 8 kg se pohybuje rychlostí 2 m·s^{-1}. Náhle exploduje a rozpadne se na dvě části o hmotnostech 4 kg. Kinetická energie každé z nich bezprostředně po výbuchu je 16 J. Obě části se pohybují po původní přímkové trajektorii tělesa. Určete rychlost (velikost a směr) každé z nich.

47Ú. Sáně s jezdcem o celkové hmotnosti M spočívají v klidu na dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Jezdec naložil na sáně ještě dva kameny o hmotnostech m_1 a m_2, pro něž platí $M = 6{,}00m_1 = 12{,}0m_2$. Člověk hodlá uvést sáně do pohybu tak, že kameny vyhodí dozadu (současně nebo jeden po druhém) vodorovnou rychlostí v_{rel} vzhledem k saním. Určete výslednou rychlost saní, vymrští-li člověk kameny (a) současně, (b) nejprve m_1 a pak m_2 a (c) v opačném pořadí?

48Ú. Dělo o hmotnosti 1 400 kg vystřelilo náboj o hmotnosti 70,0 kg rychlostí o velikosti 556 m·s^{-1} vzhledem k hlavni děla. Hlaveň svírá s vodorovnou rovinou úhel 39,0°. Dělo je umístěno na vozíku, který se pohybuje bez tření. (a) Jaká je rychlost náboje vzhledem k zemi? (b) Pod jakým úhlem vzhledem k zemi je náboj vystřelen? (*Tip*: Vodorovná složka hybnosti soustavy se během výstřelu nemění.)

ODST. 9.7 Soustavy s proměnnou hmotností: raketa

49C. Raketa je v klidu v meziplanetárním prostoru, kde na ni nepůsobí gravitační síla. Její hmotnost je $2{,}55\cdot10^5$ kg, z toho $1{,}81\cdot10^5$ kg paliva. Raketový motor spotřebovává palivo rychlostí 480 kg/s, rychlost zplodin vzhledem k raketě je 3,27 km/s. Zážeh motoru trvá 250 s. (a) Určete tah motoru. (b) Jaká je hmotnost rakety po vypnutí motoru? (c) Jaká je její výsledná rychlost?

50C. Posádka rakety hodlá opustit sluneční soustavu. V okamžiku, kdy se raketa pohybuje rychlostí $6{,}0\cdot10^3$ m·s^{-1}, zažehne se motor. Rychlost zplodin vzniklých spalováním pohonných hmot je $3{,}0\cdot10^3$ m·s^{-1} vzhledem k raketě. V okamžiku zážehu má raketa hmotnost $4{,}0\cdot10^4$ kg a její zrychlení je 2,0 m·s^{-2}. (a) Určete tah motoru a (b) rychlost spotřeby paliva.

51C. Vesmírná sonda o hmotnosti 6 090 kg letí přídí směrem k Jupiteru a má vzhledem ke Slunci rychlost 105 m·s^{-1}. Během krátkodobého zážehu motoru vznikne 80,0 kg zplodin, které opustí sondu relativní rychlostí 253 m·s^{-1}. Jaká je rychlost sondy po skončení zážehu?

52C. Raketa je v klidu ve vesmírném prostoru. Zjistěte, jaký musí být poměr počáteční a výsledné hmotnosti rakety, má-li být po vyhoření paliva rychlost rakety (a) shodná s relativní rychlostí zplodin, (b) dvakrát větší než tato rychlost.

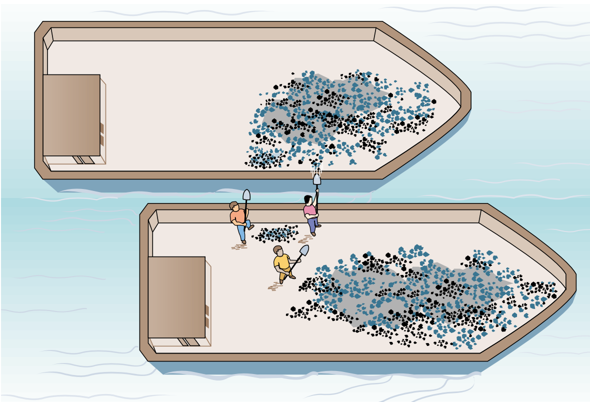
53C. Posádka lodi směřující k Měsíci je nucena provést korekci letu. Velikost rychlosti lodi je třeba zvýšit z počáteční hodnoty 400 $m \cdot s^{-1}$ o 2,2 $m \cdot s^{-1}$ při zachování směru letu. Relativní rychlost, s níž zplodiny vyhořelého paliva tryskají z raketového motoru, je 1 000 $m \cdot s^{-1}$. Jakou část původní hmotnosti lodi tvoří spálené palivo v okamžiku, kdy je korekce letu ukončena?

54C. Nákladní železniční vůz jede pod dopravníkem zrní stálou rychlostí 3,20 $m \cdot s^{-1}$. Za jednu minutu se z dopravníku vysype na vůz 540 kg zrní. Jakou silou musíme na vůz působit, aby se jeho rychlost neměnila? (Tření zanedbáváme.)

55Ú. Jednostupňová raketa o hmotnosti M je v klidu vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě $\mathscr{S}$. V okamžiku $t = 0$ dojde k zážehu motoru. Dokažte, že spálené plyny opouštějící trysku motoru budou vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ v klidu v okamžiku, kdy se hmotnost rakety sníží na hodnotu $0{,}368M$.

56Ú. Raketa o hmotnosti 6 100 kg startuje svisle z povrchu Země. Relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě je 1 200 $m \cdot s^{-1}$. Určete hmotnost zplodin opouštějících raketu za jednu sekundu ve dvou různých případech: (a) Tah motoru je roven váze rakety. (b) Velikost počátečního zrychlení rakety má hodnotu 21 $m \cdot s^{-2}$.

57Ú. Dva dlouhé nákladní čluny plují po klidné hladině stejným směrem, stálými rychlostmi 10 km/h a 20 km/h. (Tažná síla každého motoru právě kompenzuje odporovou sílu vody.) Během míjení člunů se z pomalejšího na rychlejší překládá uhlí. Za jednu minutu přeloží dělníci 1 000 kg uhlí (obr. 9.43). Poněvadž je třeba, aby se rychlosti člunů během překládky neměnily, musí posádky změnit výkon motorů. Určete dodatečnou tažnou sílu každého z nich za předpokladu, že dělníci uhlí volně přesypávají přesně kolmo k bočnímu okraji pomalejšího člunu (rychlost, kterou kusům uhlí udělují vzhledem k pomalejšímu člunu, je zanedbatelně malá). Odporovou sílu vody považujeme za nezávislou na zátěži člunů.



Obr. 9.43 Úloha 57

58Ú. Tryskové letadlo letí rychlostí 180 $m \cdot s^{-1}$. Každou sekundu nasaje jeho motor 68 m^3 vzduchu (hmotnost 70 kg). Vzduch se spotřebuje ke spálení 2,9 kg paliva za sekundu. Produkty hoření proudí z tryskového motoru rychlostí 490 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k letadlu. Určete (a) tah tryskového motoru a (b) jeho výkon ve wattech.

ODST. 9.8 Vnější síly a změny vnitřní energie

59C. Horolezec o hmotnosti 90 kg vystupuje z tábora ve výšce 4 425 m n. m. na vrchol Mount Everestu (8 850 m n. m.). (a) Určete výslednou změnu potenciální energie soustavy horolezec + Země při tomto výstupu. (b) Kolik čokoládových tyčinek je potřeba k dodání této energie, je-li kalorická hodnota každé z nich 300 kcal? Odpověď na tuto otázku ukáže, že práce potřebná k překonání gravitační síly tvoří zcela jistě jen mizivou část energie, kterou horolezec vydá při takovém náročném výstupu.

60C. Chlapec o hmotnosti 51 kg vyšplhal za 10 s po laně délky 6,0 m. (a) Určete odpovídající změnu potenciální energie soustavy chlapec + Země a (b) průměrný výkon chlapce.

61C. Žena o hmotnosti 55 kg vyběhla po schodišti vysokém 4,5 m za 3,5 s. Určete odpovídající průměrný výkon.

62C. Sprinter o váze 670 N uběhl prvních 7,0 m závodu za 1,6 s. Startoval z klidu a pohyboval se s konstantním zrychlením. Určete jeho (a) rychlost a (b) kinetickou energii na konci tohoto časového intervalu a (c) odpovídající průměrný výkon.

63C. Luxusní parník *Queen Elizabeth 2* má dieselelektrický pohon o maximálním výkonu 92 MW. Maximální cestovní rychlost je 32,5 uzlů (1 uzel = 1,853 km/h). Jak velká je tažná síla motoru, pluje-li loď maximální rychlostí?

64C. Automobil o hmotnosti 1 600 kg jede rovnoměrně rychlostí 25,1 $m \cdot s^{-1}$. Tažná síla motoru kompenzuje třecí sílu o velikosti 703 N. Určete výkon motoru v jednotkách HP.

65C. Průměrná rychlost plavce je 0,22 $m \cdot s^{-1}$ při průměrné velikosti odporové síly prostředí 110 N. Určete jeho výkon.

66C. Energie, kterou musí vydat běžec bez ohledu na dosaženou rychlost, je asi 335 J/m. Určete průměrný výkon (a) sprintera při závodu na 100 m (čas $t = 10$ s), (b) maratonce (trať maratonu = = 42,2 km, doba = 2 h 10 min).

67C. Automobil i s cestujícími váží 16 400 N a jede rychlostí 113 km/h. Řidič začne brzdit. Určete brzdnou dráhu automobilu, je-li celková brzdná síla 8 230 N.

68C. Volejbalista trénuje výskoky. Ze vzpřímeného postoje poklesne v kolenou a sníží tak polohu těžiště o 18 cm. Poté vyskočí svisle vzhůru. Průměrná síla, kterou působí podlaha na chodidla sportovce, je asi třikrát větší než jeho váha. Určete rychlost jeho těžiště v okamžiku, kdy prochází původní polohou.

69C. Žena o hmotnosti 55 kg vyskočí z podřepu svisle vzhůru. V podřepu je její těžiště 40 cm nad úrovní podlahy. V okamžiku, kdy její chodidla ztrácejí s podlahou kontakt, je výška těžiště nad podlahou 90 cm, zatímco jeho největší výška nad podlahou činí 120 cm. (a) Jak velká průměrná síla působí na chodidla sportovkyně při odrazu? (b) Jak velká je největší rychlost jejího těžiště?

70Ú. Hokejista o hmotnosti 110 kg bruslí rychlostí 3,0 $m \cdot s^{-1}$ směrem ke hrazení a zabrzdí se o ně rukama. Během brzdění se jeho těžiště posune o 30 cm ke hrazení. (a) Určete výslednou změnu kinetické energie jeho těžiště. (b) Jak velká je průměrná síla, kterou hokejista působí na hrazení?

71Ú. Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rozjíždí z klidu po vodorovné silnici. Za 30 s dosáhne rychlosti je 72 km/h. (a) Jaká je kinetická energie automobilu na konci 30. sekundy? (b) Jaký je jeho průměrný výkon při rozjezdu? (c) Jaký je okamžitý výkon automobilu na konci 30. sekundy za předpokladu, že zrychlení je konstantní?

72Ú. Automobil o hmotnosti 1 710 kg jede stálou rychlostí o velikosti 15,0 m·s^{-1}. Tažná síla motoru, jehož výkon je 16,0 kW, kompenzuje síly tření a odporu prostředí. (a) Určete výslednici třecích a odporových sil. (b) Jaký by byl výkon motoru, kdyby automobil jel po silnici se stoupáním 8 % (tj. 8,00 m převýšení na každých 100 m měřených ve vodorovném směru) rychlostí 15,0 m·s^{-1}? (c) Automobil sjíždí z kopce bez motoru stálou rychlostí 15,0 m·s^{-1}. Určete sklon vozovky v procentech.

73Ú. Lokomotiva s maximálním výkonem 1,5 MW může urychlit vlak z rychlosti 10 m·s^{-1} na rychlost 25 m·s^{-1} za dobu 6,0 min. (a) Vypočtěte hmotnost vlaku. V uvedeném časovém intervalu zapište (b) rychlost vlaku a (c) urychlující sílu jako funkce času (měřeného v sekundách). (d) Určete vzdálenost, kterou vlak za tuto dobu urazil.

74Ú. Celková odporová síla, která působí proti pohybu automobilu, je výslednicí třecí síly, jíž působí silnice na kola automobilu a která je takřka nezávislá na rychlosti, a odporové síly vzduchu, jejíž velikost je úměrná čtverci rychlosti. Pro automobil o váze 12 000 N je velikost celkové odporové síly dána vztahem $F = 300 + 1{,}8v^2$, kde F je v newtonech a v v metrech za sekundu. Vypočtěte výkon motoru, jestliže automobil zvyšuje svou rychlost z počáteční hodnoty 80 km/h se zrychlením 0,92 m·s^{-2}.

75Ú★. Závodní automobil o hmotnosti m se rozjíždí z klidu. Jeho motor má stálý výkon P. Za jakou dobu urazí automobil dráhu d?

PRO POČÍTAČ

76Ú. Následující tabulka udává polohu tří částic v souřadnicové rovině (xy) a jejich rychlost v určitém okamžiku. Hmotnosti částic jsou různé a jsou v tabulce rovněž uvedeny. Určete (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy tří částic v tomto okamžiku. (c) Vypočtěte jejich celkovou hybnost.

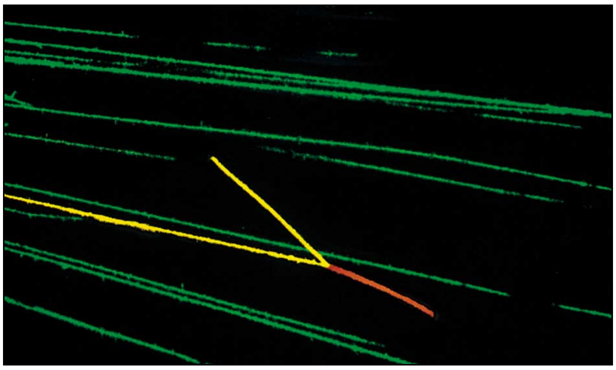
ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	SOUŘADNICE (m)	RYCHLOST (m·s^{-1})
1	4,00	(0, 0)	$1{,}50\boldsymbol{i} - 2{,}50\boldsymbol{j}$
2	3,00	(7,00; 3,00)	0
3	5,00	(3,00; 2,00)	$2{,}00\boldsymbol{i} - 1{,}00\boldsymbol{j}$

77Ú. Těleso o hmotnosti 2,00 kg je v okamžiku $t = 0$ upuštěno ze střechy vysoké budovy a volně padá podél její stěny. V okamžiku $t = 1{,}00$ s je z téhož místa na střeše upuštěno těleso o hmotnosti 3,00 kg. První těleso dopadne na zem v okamžiku $t = 5{,}00$ s. Sestrojte graf časové závislosti (a) polohy a (b) rychlosti těžiště soustavy těchto dvou těles v intervalu od $t = 0$ do $t = 6{,}00$ s. Počátek svislé osy y zvolte na střeše budovy a její kladný směr orientujte dolů.

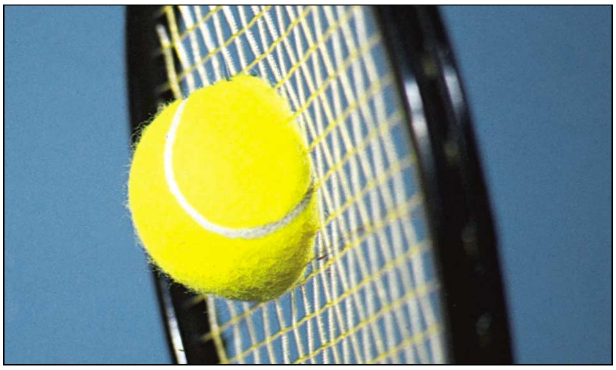
10
Srážky

Fyzik Ronald McNair byl jedním z astronautů, kteří zahynuli při havárii raketoplánu ***Challenger****. Byl také nositelem černého pásku v karate a jediným úderem dokázal zlomit několik betonových tabulek. Při podobných ukázkách umění karate se nejčastěji používají borové desky nebo betonové dlaždice. Při úderu se prohýbají a akumulují pružnou energii do chvíle, kdy dosáhne jisté mezní hodnoty. Pak se zlomí. Je překvapivé, že energie nutná ke zlomení dlaždice je v porovnání s mezní energií dřevěné desky zhruba třetinová. Přesto je snažší zlomit desku. Čím to je?*

(*a*)



(*b*)



(*c*)

Obr. 10.1 Pojem srážky je velmi široký. (a) Meteorický kráter v Arizoně má šířku asi 1 200 metrů a je 200 metrů hluboký. (b) Alfa-částice, která se pohybuje zleva doprava (v kolorovaném obrázku je její trajektorie vyznačena žlutě) narazí do jádra dusíku, které bylo zpočátku v klidu. Po srážce se dusíkové jádro pohybuje směrem vpravo (červená trajektorie). (c) Náraz míčku do rakety při tenisovém zápasu trvá zhruba 4 ms. (Po tuto dobu je míček s raketou v kontaktu). Celková doba trvání všech srážek v průběhu jednoho setu průměrného zápasu činí pouhou sekundu.

10.1 CO JE TO SRÁŽKA?

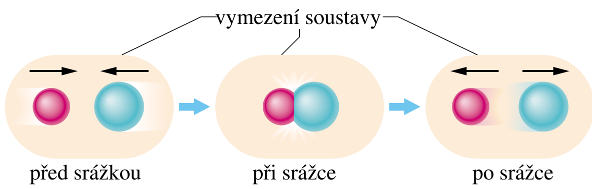
V hovorové řeči rozumíme *srážkou** událost, při níž do sebe narazí nebo o sebe udeří dvě či více různých těles. I když tuto „definici“ budeme muset později poněkud zpřesnit, je celkem výstižná a pro běžné situace, k nimž patří například srážky kulečníkových koulí, údery kladiva na hřebík nebo havárie automobilů, docela dobře použitelná.

Obr. 10.1a zachycuje následky jedné obrovské srážky, k níž došlo před 20 000 let. Ke srážkám dochází prakticky v celém myslitelném rozsahu velikostí objektů. Můžeme je sledovat od oblasti světa subatomárních částic (obr. 10.1b) až po kolize doslova „astronomických rozměrů“ u hvězd a galaxií. Srážky jsou většinou velmi krátké, takže je obtížné jejich průběh pozorovat, i když se třeba týkají objektů běžných rozměrů. Pozorování neusnadní ani skutečnost, že se tělesa při srážkách často výrazně deformují (obr. 10.1c).

V dalším textu budeme používat poněkud přesnější definici srážky:

Srážka je krátkodobý děj, při němž na sebe dvě nebo i více těles vzájemně působí poměrně značnými silami.

Uvažujeme-li o soustavě těles, mezi nimiž dojde ke srážce, je třeba umět dobře vymezit dobu *před* srážkou, dobu, po kterou srážka *probíhá*, a dobu *po* srážce (obr. 10.2). Pro ilustraci je v obrázku zakresleno ohraničení soustavy těles, která se účastní srážky. Síly vzájemného působení těles v průběhu srážky jsou samozřejmě vnitřními silami soustavy.



Obr. 10.2 Momentky zachycující soustavu těles při srážce.

Všimněme si, že nová definice srážky, na rozdíl od vstupní intuitivní charakteristiky, neobsahuje požadavek, aby tělesa byla v přímém kontaktu, tj. aby do sebe skutečně udeřila. Za srážku pak můžeme považovat třeba i situaci, kdy kosmická sonda míjí pohybující se velkou planetu a získává tak vyšší rychlost (tzv. gravitační prak). Sonda se přitom planety vůbec nedotkne. To však není pro průběh srážky podstatné. Není nutné, aby interakční síly těles při srážce souvisely výhradně s jejich přímým dotykem. Mohou to být docela dobře i síly gravitační jako v případě zmíněné kosmické sondy.

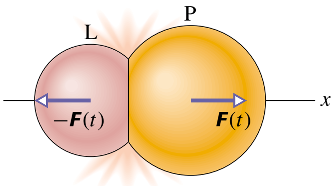
* Dříve se pro srážku užíval termín **ráz**.

Mnoho současných fyziků se intenzivně zabývá „hrou na srážky“. Jejím cílem je získat co nejvíce informací o silách působících *během* srážky na základě znalosti stavu částic *před* srážkou a *po* ní. Všechny naše dosavadní znalosti o světě subatomárních částic jsme získali ze srážkových experimentů. Základními pravidly „hry na srážky“ jsou zákony zachování hybnosti a energie.

10.2 IMPULZ SÍLY A HYBNOST

Jednoduchá srážka

Na obr. 10.3 jsou zakresleny dvě stejně velké opačně orientované síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$, jimiž na sebe působí dva různé bodové objekty při jednoduché přímé srážce.



Obr. 10.3 Srážka dvou bodových objektů L a P. Při srážce působí těleso L silou $\boldsymbol{F}(t)$ na těleso P a naopak, P působí na L silou $-\boldsymbol{F}(t)$. Síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$ představují akci a reakci. Jejich velikosti se v průběhu srážky mění, v každém okamžiku jsou si však rovny.

Vlivem vzájemného silového působení částic dojde ke změně hybnosti každé z nich. Tato změna závisí nejen na velikosti sil, ale také na době jejich působení Δt. Odpovídající vztah získáme pomocí druhého Newtonova zákona například pro těleso P v obr. 10.3, zapíšeme-li jej ve tvaru $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{10.1}$$

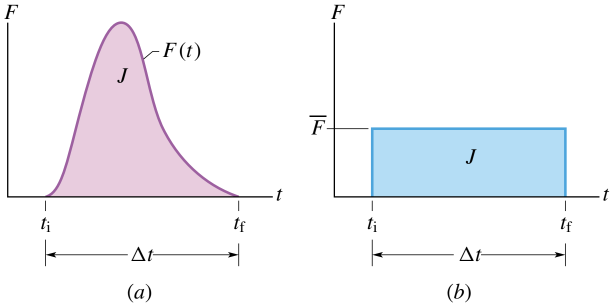
kde $\boldsymbol{F}(t)$ je časově proměnná síla. Její možný průběh je znázorněn na obr. 10.4a. Integrací rov. (10.1) v mezích t_i (okamžik bezprostředně před srážkou) a t_f (okamžik bezprostředně po srážce), určujících časový interval délky Δt, v němž srážka proběhla, dostáváme

$$\int_{\boldsymbol{p}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{p}_\mathrm{f}} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.2}$$

Integrací levé strany předchozí rovnice dostáváme změnu hybnosti $\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i}$ tělesa P, k níž při srážce došlo. Výraz na pravé straně závisí na časovém průběhu interakčních sil během srážky a nazýváme jej **impulzem síly**. Značíme

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(impulz síly).} \tag{10.3}$$

Připomeneme-li si interpretaci určitého integrálu z kap. 7 (bod 7.1), vidíme, že velikost impulzu síly je číselně rovna velikosti plochy pod grafem funkce $F(t)$ (obr. 10.4a).



Obr. 10.4 (a) Časová závislost velikosti proměnné síly $F(t)$, která působí na těleso P při srážce znázorněné na obr. 10.3. Obsah plochy pod grafem funkce $F(t)$ určuje velikost impulzu $\boldsymbol{J}$ této síly. (b) Výška obdélníka představuje velikost $\overline{F}$ průměrné síly v časovém intervalu Δt. Obsah obdélníka je shodný s obsahem plochy pod křivkou $F(t)$ na obr. (a), a tedy i s velikostí impulzu $\boldsymbol{J}$.

Ze vztahů (10.2) a (10.3) je zřejmé, že změna hybnosti tělesa při srážce je dána impulzem výslednice sil, které na toto těleso během srážky působí.

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J} \qquad \text{(vztah mezi změnou hybnosti a impulzem síly).} \tag{10.4}$$

Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles L a P. Vnější síly na soustavu nepůsobí. Podle zákona zachování hybnosti je tedy změna celkové hybnosti soustavy nulová. Změnu hybnosti tělesa P, vystupující ve vztahu (10.4), jsme označili symbolem $\Delta\boldsymbol{p}$. Změna hybnosti tělesa L je proto $-\Delta\boldsymbol{p}$. Vztah (10.4) můžeme také rozepsat do složek:

$$p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = \Delta p_x = J_x, \tag{10.5}$$

$$p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = \Delta p_y = J_y, \tag{10.6}$$

a

$$p_{\mathrm{f},z} - p_{\mathrm{i},z} = \Delta p_z = J_z. \tag{10.7}$$

Impulz síly i hybnost jsou vektorové veličiny a mají stejný fyzikální rozměr. Uvědomme si, že vztah (10.4) není nějakým novým fyzikálním zákonem či nezávislým tvrzením, nýbrž přímým důsledkem druhého Newtonova zákona, z něhož jsme jej odvodili. Je však velmi užitečný při řešení určitého typu fyzikálních úloh, podobně jako třeba zákon zachování mechanické energie.

Označíme-li $\overline{F}$ velikost průměrné síly určenou z grafu na obr. 10.4a, můžeme velikost impulzu síly zapsat ve tvaru

$$J = \overline{F}\Delta t, \tag{10.8}$$

kde Δt je doba trvání srážky. Hodnotu $\overline{F}$ najdeme jako výšku obdélníka o základně tvořené časovým intervalem od t_i do t_f (obr. 10.4b), jehož obsah je shodný s obsahem plochy pod křivkou na obr. 10.4a.

KONTROLA 1: Výsadkář, jemuž se při seskoku neotevřel padák, měl štěstí. Dopadl na hustě zasněženou pláň, a tak utrpěl jen drobná poranění. Kdyby dopadl na holou zem, byla by doba nárazu 10krát kratší a jeho zranění by mohla být i smrtelná. Jak ovlivní silná sněhová pokrývka (a) změnu hybnosti výsadkáře, (b) impulz brzdící síly a (c) její velikost?

Opakované srážky

Předpokládejme, že na těleso R pevně spojené s podlahou dopadá ve směru osy x ustálený tok částic o stejné hybnosti mv (obr. 10.5). Impulz J síly, jíž každá z dopadajících částic na těleso R působí, má stejnou velikost jako změna hybnosti částice Δp, avšak opačný směr. Je tedy $J = -\Delta p$. Předpokládejme, že za dobu Δt narazí na těleso n částic. Celkový silový impulz za tuto dobu určuje podle vztahu (10.4) celkovou změnu hybnosti tělesa, tj.

$$J = -n\Delta p. \tag{10.9}$$

Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (10.8) a malé úpravě získáme průměrnou sílu $\overline{F}$ působící při srážce na těleso R:

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v. \tag{10.10}$$

Získaný vztah vyjadřuje $\overline{F}$ jako funkci frekvence dopadu částic $n/\Delta t$ na těleso R a změny jejich rychlosti Δv.

Pokud se dopadající částice po nárazu zastaví, je třeba do vztahu (10.10) dosadit

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \tag{10.11}$$

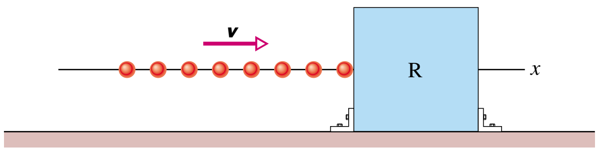
kde $v_i = v$ a $v_f = 0$ jsou rychlosti částic před srážkou a po srážce. Pokud se však částice při srážce odrazí zpět se stejně velkou rychlostí, je $v_f = -v$. Pak dostaneme

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \tag{10.12}$$

Celková hmotnost částic, které za dobu Δt narazí do tělesa R, je $\Delta m = nm$. S ohledem na tuto skutečnost můžeme vztah (10.10) přepsat do tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v. \tag{10.13}$$

Síla $\overline{F}$ je tak vyjádřena pomocí **hmotnostního toku** částic $\Delta m/\Delta t$ dopadajícího na těleso R. V závislosti na charakteru srážky můžeme do posledního vztahu dosadit za Δv buď $-v$ (podle vztahu (10.11)), nebo $-2v$ (podle vztahu (10.12)).



Obr. 10.5 Na pevné těleso R dopadají částice o stejné hybnosti. Jejich tok je ustálený. Průměrná síla $\overline{\boldsymbol{F}}$ působící na těleso směřuje vpravo a její velikost závisí na hmotnostním toku dopadajících částic.

PŘÍKLAD 10.1

Baseballový míč o hmotnosti 140 g letí těsně před odpálením vodorovně rychlostí $\boldsymbol{v}_i$ o velikosti 39 m·s^{-1}. Po úderu letí míč opačným směrem stejně velkou rychlostí $\boldsymbol{v}_f$.

(a) Určete impulz síly, která na míč při úderu působila.

ŘEŠENÍ: Impulz síly vypočteme ze známé změny hybnosti míče vztahem (10.4), upraveným pro jednorozměrný případ. Za kladný směr osy x zvolíme směr pohybu pálky. Ze vztahu (10.4) dostaneme

$$\begin{aligned} J &= p_f - p_i = mv_f - mv_i = \\ &= (0{,}14\,\mathrm{kg})(39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - (0{,}14\,\mathrm{kg})(-39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = \\ &= 10{,}9\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}} \doteq 11\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Ve shodě s naší volbou orientace souřadnicové osy x je počáteční rychlost míče (x-ová složka) záporná a výsledná rychlost kladná. Vypočtený impulz síly je kladný, vektor $\boldsymbol{J}$ má tedy, podle očekávání, stejný směr jako pohyb pálky při úderu.

(b) Srážka míče a pálky proběhla za dobu $\Delta t = 1{,}2$ ms. Určete průměrnou sílu, která při srážce působila na míč.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (10.8) dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \frac{J}{\Delta t} = \frac{(10{,}9\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})}{(0{,}001\,2\,\mathrm{s})} = \\ &= 9\,100\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Uvědomme si, jak je tato síla obrovská. Její velikost je přibližně rovna váze tělesa o hmotnosti jedné tuny. *Největší* síla, která na míč v jistém okamžiku v průběhu srážky působila, musí být dokonce ještě větší. Průměrná síla má směr kladné osy x. Je tedy souhlasně rovnoběžná s vektorem impulzu síly.

(c) Určete průměrné zrychlení míče.

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení určíme ze vztahu

$$\overline{a} = \frac{\overline{F}}{m} = \frac{(9\,100\,\mathrm{N})}{(0{,}14\,\mathrm{kg})} = 6{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad \text{(Odpověď)}$$

tj. $a = 6\,600g$.

V dosavadních úvahách jsme předpokládali, že na tělesa nepůsobí při srážce žádné vnější síly. Tento předpoklad však při baseballové hře není splněn. Na míč totiž stále působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ (během letu i při srážce s pálkou). Velikost tíhové síly však je pouhých 1,4 N, tedy zcela zanedbatelná ve srovnání s průměrnou silou o velikosti 9 100 N, jíž na míč při úderu působí pálka. Zcela oprávněně tedy můžeme soustavu míč + pálka považovat *během srážky* za izolovanou. Chyba, které se touto idealizací dopustíme, je jen velmi malá.

PŘÍKLAD 10.2

Baseballový míč letí stejně jako v př. 10.1 vodorovně, rychlostí o velikosti $v_\mathrm{i} = 39\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Nenarazí však na pálku kolmo, nýbrž se od ní odrazí pod elevačním úhlem 30° rychlostí o velikosti $v_\mathrm{f} = 45\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (obr. 10.6). Určete průměrnou sílu $\overline{\boldsymbol{F}}$, kterou pálka na míč působila, proběhla-li srážka za 1,2 ms?

ŘEŠENÍ: Z rovnic (10.5) a (10.6) určíme složky J_x a J_y impulzu síly:

$$\begin{aligned} J_x &= p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = m(v_{\mathrm{f},x} - v_{\mathrm{i},x}) = \\ &= (0{,}14\,\mathrm{kg})[(45\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})(\cos 30°) - (-39\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})] = \\ &= 10{,}92\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} J_y &= p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = m(v_{\mathrm{f},y} - v_{\mathrm{i},y}) = \\ &= (0{,}14\,\mathrm{kg})[(45\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})(\sin 30°) - 0] = \\ &= 3{,}150\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}. \end{aligned}$$

Velikost impulzu síly $\boldsymbol{J}$ je rovna

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \\ &= \sqrt{(10{,}92\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})^2 + (3{,}150\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})^2} = \\ &= 11{,}37\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}. \end{aligned}$$

Z rovnice (10.8) určíme velikost průměrné síly $\overline{F}$ působící na míč při srážce:

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \frac{J}{\Delta t} = \frac{(11{,}37\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})}{(0{,}001\,2\,\mathrm{s})} = \\ &= 9\,475\,\mathrm{N} \doteq 9\,500\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

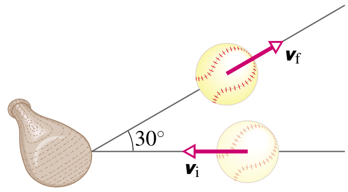
Vektor impulzu síly $\boldsymbol{J}$ směřuje šikmo vzhůru a svírá s vodorovnou rovinou úhel θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{J_y}{J_x} = \frac{(3{,}150\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})}{(10{,}92\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})} = 0{,}288,$$

tj.

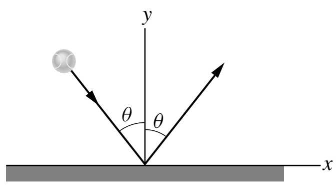
$$\theta = 16°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná síla $\overline{\boldsymbol{F}}$ má stejný směr jako impulz síly $\boldsymbol{J}$. Na rozdíl od př. 10.1 mají vektory $\overline{\boldsymbol{F}}$ a $\boldsymbol{J}$ jiný směr než rychlost míče po srážce.



Obr. 10.6 Příklad 10.2. Míč se odráží od pálky. Počáteční rychlost je vodorovná, výsledná rychlost svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°.

KONTROLA 2: Následující obrázek ukazuje pohled shora na míč, který se odráží od zdi s nezměněnou velikostí rychlosti. Změnu hybnosti míče označme $\Delta\boldsymbol{p}$. (a) Rozhodněte, zda složka (a) Δp_x, resp. (b) Δp_y je kladná, záporná, nebo nulová. (c) Jaký směr má vektor $\Delta\boldsymbol{p}$?



10.3 PRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Nejjednodušším případem je přímá srážka (v některých případech zvaná také čelní nebo středová). Při ní leží počáteční rychlosti částic v téže přímce. Mají tedy směr jejich spojnice, u homogenních koulí pak směr spojnice jejich středů.

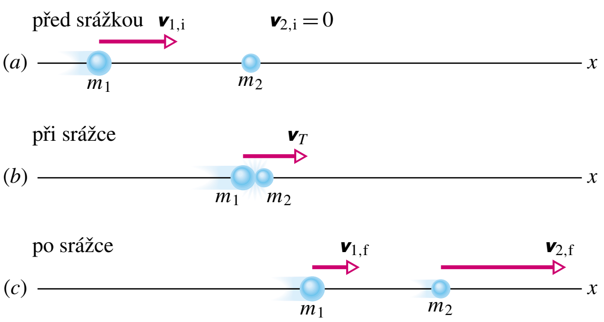
Pevný terč

Uvažujme přímou srážku dvou těles o hmotnostech m_1 a m_2 (obr. 10.7) a pro jednoduchost předpokládejme, že jedno z nich je před srážkou v klidu (například m_2, tj. $v_{2,\mathrm{f}} = 0$). Toto těleso budeme nazývat „terčem". Druhé těleso, s počáteční rychlostí $v_{1,\mathrm{i}}$, bude představovat „střelu".* Dále předpokládejme, že soustava tvořená uvažovanými dvěma tělesy je uzavřená (žádné další částice do soustavy nepřibudou, ani ji neopustí) a izolovaná (na soustavu nepůsobí

* Pokud by se terč vzhledem k laboratorní vztažné soustavě pohyboval stálou rychlostí, zvolíme pro popis srážky jinou inerciální vztažnou soustavu, v níž bude v klidu. Taková volba je vždy možná.

vnější síly). K oběma těmto přirozeným požadavkům přidejme ještě jeden, poněkud speciální: předpokládejme, že srážka nezměnila celkovou kinetickou energii soustavy. Taková srážka se nazývá **pružná** neboli **elastická**.

Při pružné srážce se obecně mění kinetická energie jednotlivých těles, která se srážky účastní. Celková kinetická energie soustavy před srážkou i po srážce je však stejná.



Obr. 10.7 Pružná srážka dvou těles. Jedno z nich (terč o hmotnosti m_2) je před srážkou v klidu. V obrázcích jsou zakresleny tyto rychlosti: (a) rychlosti obou těles před srážkou, (b) rychlost těžiště soustavy v jistém okamžiku probíhající srážky, (c) rychlosti obou těles po srážce. Velikosti vektorů odpovídají případu $m_1 = 3m_2$.

Je důležité si uvědomit, že hybnost uzavřené izolované soustavy se při srážce zachovává vždy, bez ohledu na to, je-li srážka pružná či nikoliv. Interakční síly působící při srážce jsou totiž vnitřními silami soustavy.

Při srážce těles v uzavřené izolované soustavě se hybnost každého z nich může obecně měnit. Celková hybnost soustavy je však v každém okamžiku probíhající srážky stejná, a to bez ohledu na charakter srážky.

Ze zákonů zachování hybnosti a kinetické energie dostáváme pro srážku dvou těles z obr. 10.7

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \tag{10.14}$$

a

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2. \tag{10.15}$$

V obou rovnicích jsme indexem (i) označili počáteční rychlosti a indexem (f) výsledné rychlosti těles. Známe-li hmotnosti těles a počáteční rychlost $v_{1,i}$ tělesa 1, zbývá vyřešit soustavu předchozích dvou rovnic a určit z ní neznámé rychlosti obou těles po srážce, tj. $v_{1,f}$ a $v_{2,f}$.

Přepišme rov. (10.14) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 v_{2,f} \tag{10.16}$$

a rov. (10.15) do tvaru*

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}^2. \tag{10.17}$$

Po vydělení rov. (10.17) rov. (10.16) a dalších úpravách dostaneme

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{10.18}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \tag{10.19}$$

Z rov. (10.19) je zřejmé, že hodnota $v_{2,f}$ je vždy kladná (terč o hmotnosti m_2 se po srážce pohybuje ve směru nárazu střely). Hodnota $v_{1,f}$ může být jak kladná, tak záporná (je-li $m_1 > m_2$, pohybuje se střela po srážce původním směrem, při $m_1 < m_2$ se odrazí zpět).

KONTROLA 3: Určete výslednou hybnost terče na obr. 10.7, má-li střela počáteční hybnost $6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a její výsledná hybnost je (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je výsledná kinetická energie terče, má-li střela před srážkou kinetickou energii 5 J a po srážce 2 J?

Věnujme se nyní několika speciálním případům:

1. *Shodné hmotnosti.* Je-li $m_1 = m_2$, redukují se rovnice (10.18) a (10.19) na tvar

$$v_{1,f} = 0 \quad \text{a} \quad v_{2,f} = v_{1,i}.$$

Při přímé srážce těles stejné hmotnosti se střela zastaví a terč získá stejnou rychlost, jakou měla střela před srážkou. Střela a terč si své rychlosti jednoduše „vymění". Tento výsledek je platný i v případě pohyblivého terče (těleso 2 se před srážkou pohybuje).

2. *Těžký terč.* V případě těžkého terče je $m_2 \gg m_1$. Příkladem takové srážky může být třeba náraz golfového míčku do dělové koule. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou do tvaru

$$v_{1,f} \doteq -v_{1,i} \quad \text{a} \quad v_{2,f} \doteq \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1,i}. \tag{10.20}$$

Je vidět, že střela (golfový míček) se prostě odrazí zpět opačným směrem. Velikost její rychlosti se prakticky nezmění. Terč (dělová koule) se bude pohybovat v kladném směru velmi malou rychlostí, neboť výraz $(2m_1/m_2)$ v rov. (10.20) je mnohem menší než jedna. Tyto závěry zcela jistě nejsou neočekávané.

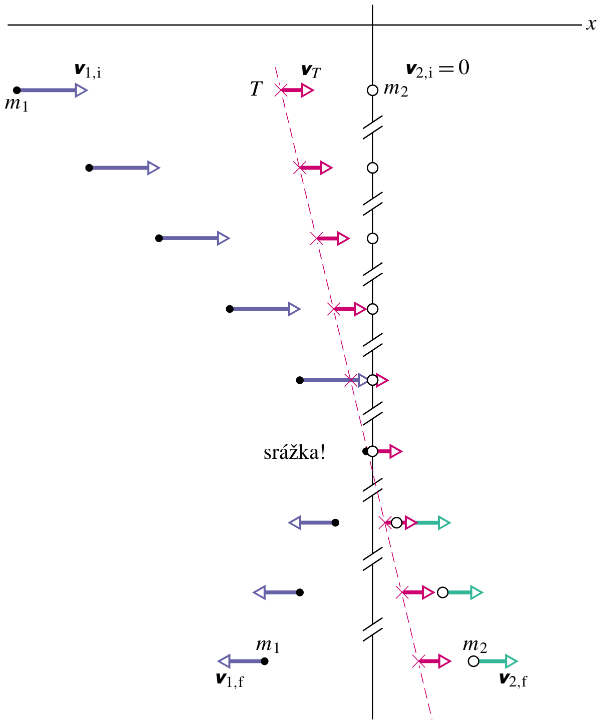
* Při těchto úpravách využíváme identity $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Řešení soustavy rovnic se tím značně zjednoduší.

3. *Těžká střela.* Nyní střílíme dělovou koulí proti golfovému míčku, tj. $m_1 \gg m_2$. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou na tvar

$$v_{1,f} \doteq v_{1,i} \quad \text{a} \quad v_{2,f} \doteq 2v_{1,i}. \tag{10.21}$$

Střela (dělová koule) se tedy pohybuje dále původním směrem a jen nepatrně se zpomalí. Terč (golfový míček) se odrazí zpět (v kladném směru) dvojnásobnou rychlostí než měla původně dělová koule.

Skutečnost, že je rychlost terče po srážce právě dvojnásobná, lze poměrně jednoduše vysvětlit: vraťme se ke vztahům (10.20), které popisují případ těžkého terče. Rychlost lehkého tělesa (střely) se změnila z hodnoty $+v$ na $-v$. Její *změna* byla tedy $2v$. Také v případě těžké střely je *změna* rychlosti lehkého tělesa (terče) rovna $2v$.



Obr. 10.8 Série obrázků znázorňujících průběh pružné srážky střely s pevným terčem. Pro hmotnosti střely (těleso 1) a terče (těleso 2) platí $m_2 = 3m_1$. V obrázcích je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou vůbec ovlivněna.

4. *Pohyb těžiště.* Pohyb těžiště soustavy dvou těles není jejich srážkou nijak ovlivněn. Tato skutečnost je důsledkem zákona zachování hybnosti a vztahu (9.26). Tento vztah

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_T, \tag{10.22}$$

vyjadřuje souvislost celkové hybnosti soustavy a rychlosti pohybu těžiště $\boldsymbol{v}_T$. Jelikož se celková hybnost $\boldsymbol{P}$ nemění, musí se zachovávat i rychlost těžiště. Těžiště se tedy pohybuje rovnoměrně přímočaře. Pro případ srážky střely s pevným terčem (obr. 10.7) má těžiště soustavy rychlost (vztah (10.22))

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \tag{10.23}$$

Na obr. 10.8 je posloupnost obrázků znázorňujících typický průběh pružné srážky. Je vidět, že těžiště se skutečně pohybuje konstantní rychlostí, která není srážkou nijak ovlivněna.

Pohyblivý terč

Vraťme se nyní k obecným úvahám o pružných srážkách a připusťme, že se obě tělesa před srážkou pohybují.

Obr. 10.9 Pružná srážka dvou těles

Pro soustavu těles na obr. 10.9 můžeme zapsat zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie takto:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \tag{10.24}$$

a

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2. \tag{10.25}$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $v_{1,f}$ a $v_{2,f}$, kterou nyní budeme řešit. Nejprve přepíšeme rov. (10.24) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = -m_2(v_{2,i} - v_{2,f}) \tag{10.26}$$

a rov. (10.25) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = -m_2(v_{2,i} - v_{2,f})(v_{2,i} + v_{2,f}). \tag{10.27}$$

Rov. (10.27) vydělíme rov. (10.26) a po malých úpravách dostaneme

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,i} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,i}. \tag{10.29}$$

Připomeňme, že jsme indexy 1 a 2 přiřadili tělesům zcela libovolně. Záměnou indexů na obr. 10.9 a v rov. (10.28) a (10.29) získáme zcela identickou soustavu. Položíme-li navíc $v_{2,i} = 0$, přejdou rov. (10.28) a (10.29) na tvar (10.18) a (10.19), který odpovídá situaci s pevným terčem 2.

Z rov. (10.22) určíme ještě rychlost těžiště v_T soustavy těles na obr. 10.9:

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2}. \qquad (10.30)$$

Naše soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost P se proto při srážce zachovává a její těžiště se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_T.

KONTROLA 4: Počáteční hybnosti těles 1 a 2 na obr. 10.9 jsou $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-8\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je hybnost tělesa 2 po srážce, je-li výsledná hybnost tělesa 1 (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

PŘÍKLAD 10.3

Dvě kovové koule jsou zavěšeny na svislých závěsech tak, aby se právě dotýkaly (obr. 10.10). Koule 1 má hmotnost $m_1 = 30\,\mathrm{g}$, hmotnost koule 2 je $m_2 = 75\,\mathrm{g}$. Kouli 1 vychýlíme vlevo do výšky $h_1 = 8{,}0\,\mathrm{cm}$ a uvolníme.

(a) Určete rychlost $v_{1,f}$ koule 1 těsně po srážce s koulí 2.

ŘEŠENÍ: Označme $v_{1,i}$ rychlost koule 1 těsně před srážkou. Bezprostředně po uvolnění je její kinetická energie nulová a tíhová potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1$. Těsně před srážkou je kinetická energie rovna $\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2$ a potenciální energie je nulová. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = m_1 g h_1.$$

Rychlost koule 1 těsně před srážkou je tedy

$$v_{1,i} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}080\,\mathrm{m})} = 1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Koule 1 se sice pohybuje po oblouku, avšak v okamžiku srážky je její rychlost vodorovná. Úlohu tedy můžeme řešit podle pravidel pro jednorozměrnou srážku.

Rychlost koule 1 těsně po srážce je $v_{1,f}$. Určíme ji z rov. (10.18):

$$\begin{aligned} v_{1,f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} = \\ &= \frac{(0{,}030\,\mathrm{kg} - 0{,}075\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = \\ &= -0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq -0{,}54\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Záporné znaménko výsledku signalizuje, že se koule 1 pohybuje po srážce vlevo.

(b) Do jaké výšky h_1' vystoupí koule 1 po srážce?

ŘEŠENÍ: Na počátku zpětného pohybu má koule 1 kinetickou energii $\frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2$ a tíhová potenciální energie je nulová. Pohyb koule se obrací v nejvyšším bodě trajektorie, tj. ve výšce h_1'. Zde je její kinetická energie nulová a potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1'$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_1 g h_1' = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} h_1' &= \frac{v_{1,f}^2}{2g} = \frac{(-0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 0{,}0147\,\mathrm{m} \doteq 1{,}5\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

(c) Jaká je rychlost koule 2 těsně po srážce?

ŘEŠENÍ: Z rov. (10.19) dostaneme

$$\begin{aligned} v_{2,f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} = \\ &= \frac{2(0{,}030\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = \\ &= 0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 0{,}72\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

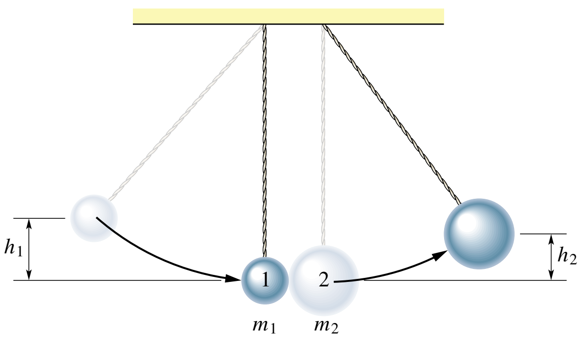
(d) Do jaké výšky h_2 vystoupí koule 2 po srážce?

ŘEŠENÍ: Koule 2 má těsně po srážce kinetickou energii $\frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$. V bodě obratu ve výšce h_2 má tíhová potenciální energie hodnotu $m_2 g h_2$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_2 g h_2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{v_{2,f}^2}{2g} = \frac{(0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 0{,}0261\,\mathrm{m} \doteq 2{,}6\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$



Obr. 10.10 Příklad 10.3. Dvě kovové koule zavěšené na vláknech se v klidu právě dotýkají. Kouli 1 o hmotnosti m_1 odchýlíme vlevo do výšky h_1 a uvolníme. Po srážce vystoupí koule 2 do výšky h_2.

PŘÍKLAD 10.4

Rychlé neutrony vznikající v jaderném reaktoru je třeba nejprve zpomalit, aby se mohly efektivně účastnit řetězové reakce. Děje se tak prostřednictvím jejich srážek s jádry atomů v tzv. *moderátoru*.

(a) Určete, kolikrát se zmenší kinetická energie neutronu (hmotnost m_1) při jeho přímé srážce s jádrem atomu o hmotnosti m_2. Předpokládáme, že srážka je pružná a jádro je zpočátku v klidu.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie neutronu před srážkou a po ní je dána vztahy

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2} m v_{1,i}^2 \quad \text{a} \quad E_{k,f} = \tfrac{1}{2} m v_{1,f}^2.$$

Hledaný poměr označme α. Platí

$$\alpha = \frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2}{v_{1,i}^2} = 1 - \frac{v_{1,f}^2}{v_{1,i}^2}. \tag{10.31}$$

Ze vztahu (10.18) dostáváme

$$\frac{v_{1,f}}{v_{1,i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \tag{10.32}$$

Dosazením rov. (10.32) do (10.31) získáme po malých úpravách výsledek:

$$\alpha = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad \text{(Odpověď)} \tag{10.33}$$

(b) Vypočtěte hodnotu poměru α pro jádra olova, uhlíku a vodíku. Poměr hmotností jádra a neutronu ($= \frac{m_2}{m_1}$) pro olovo je 206, pro uhlík 12 a pro vodík přibližně 1.

ŘEŠENÍ: Dosazením $m_2 = k m_1$ do rov. (10.33) dostaneme pro olovo ($m_2 = 206 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(206)}{(1 + 206)^2} = 0{,}019, \quad \text{tj. } 1{,}9\,\%, \quad \text{(Odpověď)}$$

pro uhlík ($m_2 = 12 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(12)}{(1 + 12)^2} = 0{,}28, \quad \text{tj. } 28\,\% \quad \text{(Odpověď)}$$

a pro vodík ($m_2 = m_1$)

$$\alpha = \frac{4(1)}{(1 + 1)^2} = 1, \quad \text{tj. } 100\,\%. \quad \text{(Odpověď)}$$

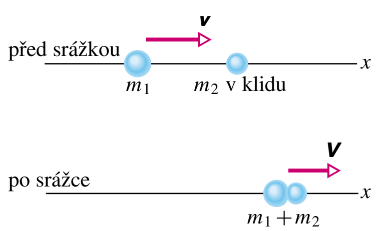
Tyto výsledky naznačují, proč je například voda podstatně lepším moderátorem neutronů než olovo.

10.4 NEPRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Srážku nazýváme **nepružnou**, jestliže se při ní nezachovává celková kinetická energie soustavy zúčastněných těles. Gumová kulička, kterou jsme upustili na tvrdou podlahu, doskočí po odrazu *téměř* do původní výšky. Její kinetická energie během srážky s podlahou nepatrně klesla. Tento malý úbytek způsobil, že po odrazu již kulička nedostoupila přesně do té výšky, ze které spadla. Kdyby byla srážka pružná, ke ztrátě kinetické energie kuličky by při ní nedošlo a kulička by vyskočila *přesně* do původní výšky. Ve skutečnosti je srážka gumové kuličky s podlahou vždy nepružná.

Golfový míček ztrácí při dopadu na zem větší část své kinetické energie a odrazí se jen do 60 % původní výšky. Odraz je tedy výrazně nepružný. Upustíme-li na zem hroudu sklenářského tmelu, přilepí se k zemi a neodrazí se vůbec. Srážku tohoto typu budeme nazývat **dokonale nepružnou**.

Na úkor úbytku kinetické energie soustavy při srážce samozřejmě vzrostou hodnoty energií některých jiných typů, např. se těleso zahřeje. Hybnost uzavřené izolované soustavy se však zachovává vždy, ať již je srážka pružná či nepružná. Hybnost i kinetická energie soustavy ovšem souvisejí s rychlostmi těles. Zákon zachování hybnosti vede proto k určitému omezení možných hodnot ztráty kinetické energie. K největší ztrátě dochází při dokonale nepružné srážce. Při ní se dokonce může stát, že soustava ztratí veškerou kinetickou energii.



Obr. 10.11 Dokonale nepružná srážka dvou těles. Před srážkou je těleso o hmotnosti m_2 v klidu. Po srážce se obě tělesa pohybují společně. Společný pohyb je znakem *dokonale* nepružné srážky. Velikosti vyznačených vektorů rychlosti odpovídají případu $m_1 = 3 m_2$.

Omezíme se zatím pouze na úvahy o dokonale nepružných srážkách. Na obr. 10.11 je znázorněna nepružná srážka dvou těles. Před srážkou bylo jedno z nich v klidu. Podle zákona zachování hybnosti je

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V, \tag{10.34}$$

tj.

$$V = v \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \tag{10.35}$$

Společnou rychlost obou objektů, které při srážce splynuly, jsme označili V. Z rov. (10.35) plyne, že tato rychlost je vždy menší než rychlost pohybujícího se tělesa před srážkou.

Obr. 10.12 dokumentuje skutečnost, že pohyb těžiště soustavy není dokonale nepružnou srážkou ovlivněn (porovnejte tento obrázek s obr. 10.8). I když při nepružné srážce dochází ke ztrátě kinetické energie *soustavy*, zůstává kinetická energie *těžiště* nedotčena. Je tedy vůbec možné, aby při nějaké dokonale nepružné srážce došlo ke ztrátě veškeré kinetické energie soustavy? Vzhledem k tomu, že kinetickou energii soustavy po takové srážce lze vyjádřit jako kinetickou energii jejího těžiště, stačí spojit vztažnou soustavu, v níž sledujeme pohyb částic, právě s těžištěm. Zákon zachování hybnosti zaručuje, že tato těžišťová soustava je inerciální. V případě srážky střely s těžkým terčem ($m_2 \gg m_1$) těžiště soustavy prakticky splývá s polohou terče. Příkladem takové situace je třeba pád hroudy tmelu na zem. Terčem je v tomto případě sama Země. Veškerá kinetická energie hroudy tak „zmizí" ve prospěch jiných druhů energie.

Jsou-li před srážkou obě tělesa v pohybu, nahradíme vztah (10.34) rovnicí

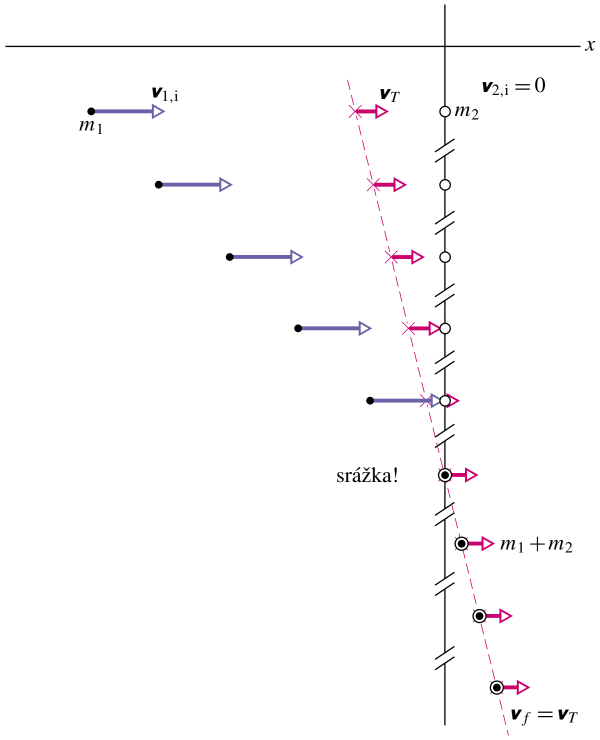
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V, \qquad (10.36)$$

kde $m_1 v_1$ a $m_2 v_2$ jsou počáteční hybnosti těles 1 a 2. Také v tomto případě je vztažná soustava spojená s těžištěm dvojice těles inerciální a výsledná kinetická energie soustavy po srážce je vzhledem k ní nulová. Příkladem může být situace na obr. 10.13, zachycujícím výsledek téměř čelní nepružné srážky dvou stejných automobilů, které jely stejnou rychlostí. Před srážkou bylo těžiště soustavy vzhledem k Zemi v klidu. Vzhledem k pozorovateli na chodníku se tedy oba automobily bezprostředně po srážce zcela zastavily.

KONTROLA 5: Určete výslednou hybnost soustavy dvou těles po dokonale nepružné přímé srážce. Počáteční hybnosti těles jsou (a) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a 0, (b) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, (c) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

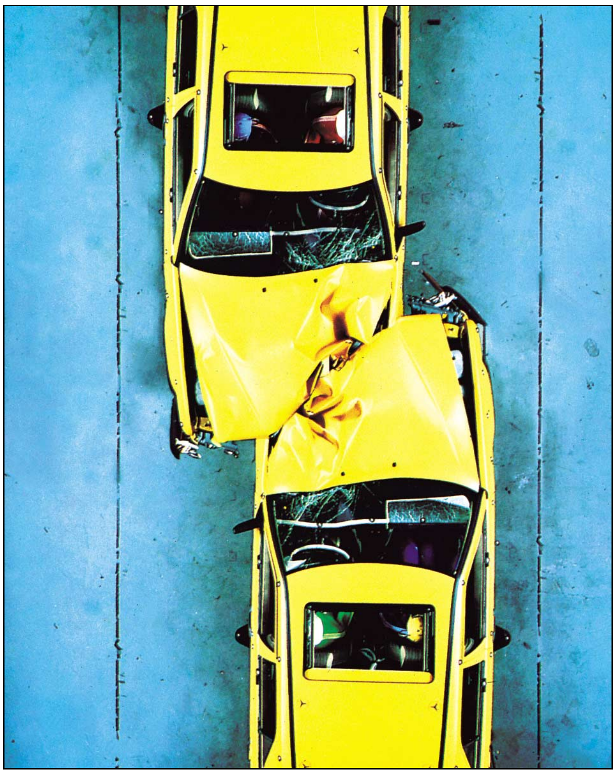
PŘÍKLAD 10.5

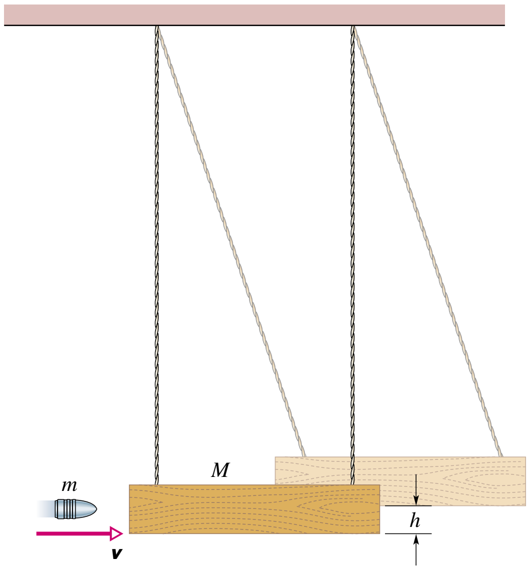
Dokud nebyla k dispozici zařízení pro elektronické měření času, užívalo se k měření rychlosti projektilů střelných zbraní tzv. *balistické kyvadlo*. Jedna z možností, jak takové kyvadlo zkonstruovat, je znázorněna na obr. 10.14. Dřevěný hranol o hmotnosti $M = 5{,}4\,\mathrm{kg}$ je zavěšen na dvou dlouhých závěsech. Kulka o hmotnosti $m = 9{,}5\,\mathrm{g}$, vystřelená z testované zbraně, hranol zasáhne a uvázne v něm. Soustava *hranol + kulka* se vychýlí z rovnovážné polohy. Největší výška výstupu těžiště soustavy je $h = 6{,}3\,\mathrm{cm}$.



Obr. 10.12 Momentky zachycující průběh dokonale nepružné srážky dvou těles. Těleso 2 je zpočátku v klidu. Tělesa se při srážce spojí a pohybují se společně. V obrázku je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou nijak ovlivněna a je shodná se společnou rychlostí spojených těles. Velikosti vektorů rychlosti odpovídají případu $m_2 = 3m_1$.

Obr. 10.13 Dva automobily po dokonale nepružné, téměř čelní srážce.





Obr. 10.14 Příklad 10.5. Balistické kyvadlo k měření rychlosti střel.

(a) Jakou rychlost měla kulka těsně před srážkou s hranolem?

ŘEŠENÍ: Označme symbolem V rychlost soustavy *hranol+kulka* těsně po srážce. Podle zákona zachování hybnosti je

$$mv = (m + M)V.$$

Protože kulka uvázne v hranolu, jedná se o dokonale nepružnou srážku. Kinetická energie se při ní změní. *Po srážce* se však již mechanická energie soustavy kyvadlo+Země *zachovává*, pokud zanedbáme odpor prostředí. Kinetická energie kyvadla v rovnovážné poloze je tedy shodná s tíhovou potenciální energií soustavy v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu:

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic rychlost V, dostaneme

$$\begin{aligned} v &= \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} = \\ &= \left(\frac{5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}{0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}\right)\sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m})} = \\ &= 630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Balistické kyvadlo můžeme chápat jako zařízení, které „převede“ velkou rychlost lehké střely na malou, a tedy mnohem lépe měřitelnou, rychlost těžkého hranolu.

(b) Určete počáteční kinetickou energii střely. Jak velkou její část představuje mechanická energie balistického kyvadla po srážce?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie kulky před srážkou je

$$\begin{aligned} E_{k,b} &= \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 = \\ &= 1\,900\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

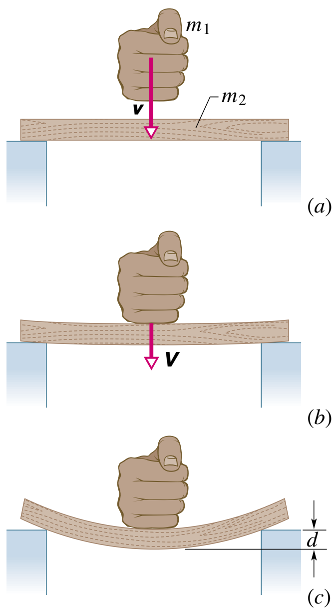
Mechanická energie soustavy kyvadlo+Země je stálá a shodná s její potenciální energií v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu

$$\begin{aligned} E &= (M + m)gh = \\ &= (5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m}) = \\ &= 3{,}3\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Při srážce se tedy kyvadlu předá pouhý zlomek (3,3/1 900, tj. 0,2 %) počáteční kinetické energie kulky. Zbytek přispěje k zahřátí soustavy, příp. se spotřebuje k deformaci a destrukci vláken dřeva.

PŘÍKLAD 10.6

Mistr karate zlomil jediným úderem ruky (hmotnost ruky je asi $m_1 = 0{,}70\,\mathrm{kg}$) dřevěnou desku hmotnosti 0,14 kg (obr. 10.15a). Totéž provedl s betonovou dlaždicí o hmotnosti 3,2 kg. Tuhost k pro pružný ohyb desky má hodnotu $4{,}1\cdot 10^4\,\mathrm{N/m}$ a pro dlaždici $2{,}6\cdot 10^6\,\mathrm{N/m}$. Deska praskne v okamžiku, kdy je prohnuta o $d = 16\,\mathrm{mm}$, u dlaždice stačí prohnutí o pouhý 1,1 mm (obr. 10.15c).*



Obr. 10.15 Příklad 10.6. (a) Mistr karate udeřil do ploché desky. Rychlost ruky těsně před úderem je $\boldsymbol{v}$. (b) Srážka ruky s deskou je dokonale nepružná. Po celou dobu trvání fáze ohybu mají ruka i deska společnou rychlost $\boldsymbol{V}$. (c) Deska praskne v okamžiku, kdy je její střed vychýlen o vzdálenost d.

(a) Určete pružnou energii při deformace desky a dlaždice bezprostředně před zlomením.

* Hodnoty jsou převzaty z S. R. Wilk, R. E. McNair a M. S. Feld: „The Physics of Karate“, American Joural of Physics, September 1983.

ŘEŠENÍ: Pružný průhyb nosníku je popsán Hookovým zákonem. Podle vztahu (8.11) má tedy jeho deformační energie hodnotu $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kd^2$. Pro desku pak platí

$$E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}(4{,}1\cdot 10^4\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})(0{,}016\,\mathrm{m})^2 = \\ = 5{,}248\,\mathrm{J} \doteq 5{,}2\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro dlaždici je

$$E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}(2{,}6\cdot 10^6\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})(0{,}001\,1\,\mathrm{m})^2 = \\ = 1{,}573\,\mathrm{J} \doteq 1{,}6\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká musí být nejmenší rychlost ruky před úderem, aby se deska, resp. dlaždice zlomila? Srážku považujeme za dokonale nepružnou (obr. 10.15b). Dále předpokládáme, že se mechanická energie soustavy ruka + deska během pružného ohybu desky zachovává a že společná rychlost ruky i desky je bezprostředně před prasknutím desky nulová (obr. 10.15b).

ŘEŠENÍ: Ze zákona zachování mechanické energie při ohybu desky je zřejmé, že kinetická energie soustavy ruka + + deska na samém počátku ohybu je shodná s její elastickou energií E_p těsně před zlomením. Tato hodnota činí 5,2 J pro dřevěnou desku a 1,6 J pro betonovou dlaždici. Rychlost dopadající ruky musí být dostatečná k tomu, aby soustava ruka + deska měla po dokonale nepružné srážce potřebnou kinetickou energii E_k. Nejprve vypočteme společnou rychlost V soustavy ruka + deska na počátku ohybu. Vyjdeme z rovnosti kinetické energie a elastické energie a dostaneme

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = E_\mathrm{p},$$

tj.

$$V = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{p}}{m_1 + m_2}}.$$

Dosazením hodnot $m_1 = 0{,}70\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 0{,}14\,\mathrm{kg}$ pro desku a 3,2 kg pro dlaždici dostaneme pro desku

$$V = \sqrt{\frac{2(5{,}248\,\mathrm{J})}{(0{,}70\,\mathrm{kg} + 0{,}14\,\mathrm{kg})}} = 3{,}534\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Pro dlaždici je

$$V = \sqrt{\frac{2(1{,}573\,\mathrm{J})}{(0{,}70\,\mathrm{kg} + 3{,}2\,\mathrm{kg})}} = 0{,}898\,1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Označme písmenem v rychlost ruky těsně před dopadem na desku či dlaždici. Srážka je popsána vztahem (10.35), ze kterého malou úpravou dostaneme

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1}V.$$

Pro desku dostáváme

$$v = \left(\frac{0{,}70\,\mathrm{kg} + 0{,}14\,\mathrm{kg}}{0{,}70\,\mathrm{kg}}\right)(3{,}534\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 4{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

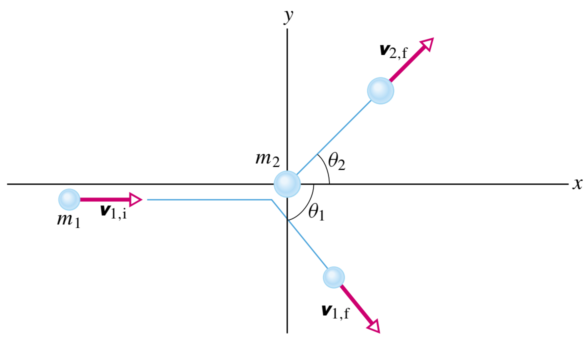
a pro dlaždici

$$v = \left(\frac{0{,}70\,\mathrm{kg} + 3{,}2\,\mathrm{kg}}{0{,}70\,\mathrm{kg}}\right)(0{,}898\,1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aby se zlomila dlaždice, musí být úder ruky asi o 20 % rychlejší než u dřevěné desky. Vlivem větší hmotnosti dlaždice se na zvýšení vnitřní energie soustavy spotřebuje větší část původní kinetické energie ruky než v případě dřevěné desky.

10.5 ŠIKMÉ SRÁŽKY

Doposud jsme se zabývali velmi speciálním případem srážek, tzv. přímými srážkami. Počáteční rychlosti obou srážejících se částic při nich ležely v jedné přímce. Od tohoto požadavku nyní ustoupíme a budeme se věnovat obecnějšímu případu, srážkám **šikmým**. Při nich mohou být počáteční rychlosti obou částic zcela obecné. I nejobecnější situaci však můžeme převést na případ srážky střely s pevným terčem. Stačí, abychom vztažnou soustavu pro popis srážky spojili s kteroukoli z obou částic, která se tak stane terčem. (Pokud částice tvoří izolovanou soustavu a mají stálé hmotnosti, bude tato vztažná soustava inerciální.) Typická ukázka takové situace je znázorněna na obr. 10.16: po srážce se tělesa pohybují v různých směrech, které s původním směrem střely svírají úhly θ_1 a θ_2.



Obr. 10.16 Pružná *šikmá* srážka dvou částic, z nichž jedna je před srážkou v klidu.

Ze zákona zachování hybnosti dostaneme pro situaci na obr. 10.16 dvě skalární rovnice, pro x-ovou a y-ovou složku celkové hybnosti soustavy:

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2,f} \cos\theta_2 \qquad (10.37)$$

(x-ová složka)

a

$$0 = -m_1 v_{1,f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2,f} \sin\theta_2 \qquad (10.38)$$

(y-ová složka).

Při pružné srážce se navíc zachovává i kinetická energie, tj.

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \qquad (10.39)$$

(kinetická energie).

Tyto tři rovnice obsahují sedm veličin: dvě hmotnosti m_1 a m_2, tři rychlosti $v_{1,i}$, $v_{1,f}$ a $v_{2,f}$ a konečně dva úhly θ_1 a θ_2. Budeme-li znát kterékoliv čtyři z nich, určíme zbývající tři řešením soustavy rovnic (10.37) až (10.39). Velmi častá je situace, kdy jsou zadány obě hmotnosti, počáteční rychlost střely a jeden z úhlů. Výpočtem pak najdeme velikosti dvou výsledných rychlostí a zbývající úhel.

KONTROLA 6: Počáteční hybnost střely při srážce na obr. 10.16 má velikost $6\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$, x-ová složka výsledné hybnosti střely je $4\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$ a y-ová má hodnotu $-3\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. Určete (a) x-ovou a (b) y-ovou složku výsledné hybnosti terče.

PŘÍKLAD 10.7

Dvě částice stejných hmotností, z nichž jedna je v klidu, se pružně srazí. Ukažte, že po šikmé srážce se částice pohybují v navzájem kolmých směrech.

ŘEŠENÍ: Problém samozřejmě můžeme řešit přímo pomocí rov. (10.37), (10.38) a (10.39). Všimneme si však ještě jiného, elegantnějšího, postupu:

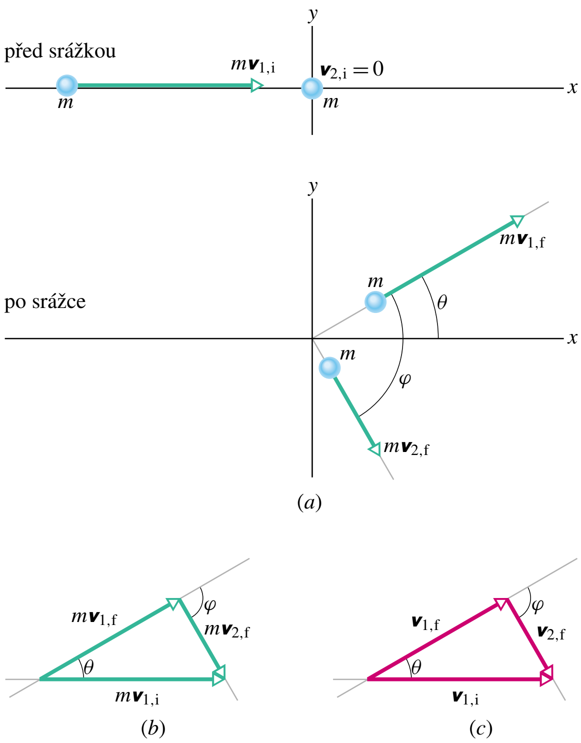
Obr. 10.17a ukazuje situaci před srážkou i po ní, s vyznačením vektorů hybností obou částic. Protože platí zákon zachování hybnosti, musí tyto tři vektory tvořit trojúhelník, zakreslený na obr. 10.17b. (Vektor $m\boldsymbol{v}_{1,i}$ je součtem vektorů $m\boldsymbol{v}_{1,f}$ a $m\boldsymbol{v}_{2,f}$.) Hmotnosti obou částic jsou stejné, takže trojúhelník sestrojený stejným způsobem z vektorů rychlosti (obr. 10.17c) musí být podobný trojúhelníku na obr. 10.17b. Platí tedy

$$\boldsymbol{v}_{1,i} = \boldsymbol{v}_{1,f} + \boldsymbol{v}_{2,f}. \qquad (10.40)$$

Navíc platí rov. (10.39), která vyplývá ze zákona zachování kinetické energie soustavy. Členy $\frac{1}{2}m$ můžeme v této rovnici vykrátit a dostaneme

$$v_{1,i}^2 = v_{1,f}^2 + v_{2,f}^2. \qquad (10.41)$$

Poslední rovnice ovšem představuje také vztah pro délky stran trojúhelníka na obr. 10.17c. Tento trojúhelník je nutně pravoúhlý (rov. (10.41) je vlastně zápisem Pythagorovy věty). Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{v}_{1,f}$ a $\boldsymbol{v}_{2,f}$ na obr. 10.17 je tedy 90°. Ověřili jsme tak hypotézu vyslovenou v zadání úlohy.



Obr. 10.17 Příklad 10.7. Názorný důkaz tvrzení, že při pružné *šikmé* srážce dvou částic stejných hmotností, z nichž jedna je před srážkou v klidu, jsou jejich výsledné rychlosti kolmé.

PŘÍKLAD 10.8

Dva krasobruslaři směřující ke společnému místu kluziště se při setkání obejmou a realizují tak dokonale nepružnou srážku. Situace před srážkou a po ní je znázorněna na obr. 10.18. Aleš (hmotnost $m_A = 83\,\mathrm{kg}$) se před srážkou pohyboval východním směrem rychlostí $v_A = 6{,}2\,\mathrm{km/h}$. Barbora (hmotnost $m_B = 55\,\mathrm{kg}$) směřovala na sever rychlostí $v_B = 7{,}8\,\mathrm{km/h}$. Počátek soustavy souřadnic jsme zvolili v místě, kde došlo ke srážce, volba souřadnicových os je zřejmá z obrázku.

(a) Jakou rychlostí $\boldsymbol{V}$ se dvojice pohybuje po srážce?

ŘEŠENÍ: Při srážce platí zákon zachování hybnosti. Jeho rozepsáním do složek dostaneme

$$m_A v_A = MV\cos\theta \qquad (x\text{-ová složka}) \qquad (10.42)$$

a

$$m_B v_B = MV\sin\theta \qquad (y\text{-ová složka}). \qquad (10.43)$$

Platí $M = m_A + m_B$. Vydělíme-li rov. (10.43) rov. (10.42), pak

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(83\,\mathrm{kg})(6{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})} = 0{,}834.$$

Odtud

$$\theta = 39{,}8^\circ \doteq 40^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

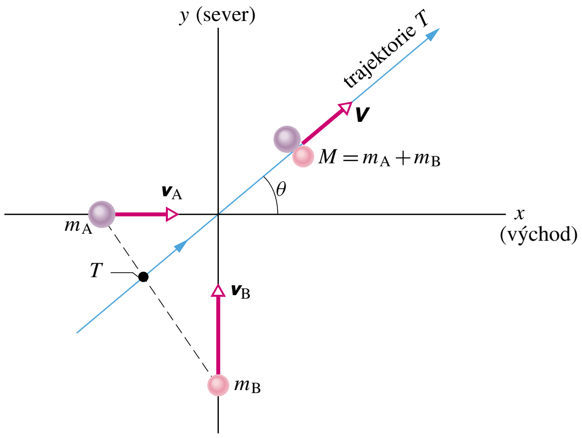
Z rov. (10.43) dostaneme

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin\theta} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(83\,\mathrm{kg} + 55\,\mathrm{kg})\sin 39{,}8^\circ} = $$
$$= 4{,}86\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 4{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy před srážkou a po srážce?

ŘEŠENÍ: Tuto otázku můžeme zodpovědět, aniž bychom cokoli počítali. Po srážce je rychlost těžiště stejná jako rychlost V, vypočtená v části (a), tj. $4,9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ na severovýchod, pod úhlem 40° vzhledem k místní rovnoběžce. Rychlost pohybu těžiště není srážkou ovlivněna.

(c) Kolikrát se při srážce zmenší kinetická energie soustavy obou krasobruslařů?



Obr. 10.18 Příklad 10.8. Dva bruslaři, Aleš (A) a Barbora (B) (v obrázku, představujícím pohled shora, jsou pro jednoduchost znázorněni kuličkami) se setkají a pevně se spojí. Realizují tak dokonale nepružnou srážku, po které se pohybují společnou rychlostí $\boldsymbol{V}$, která svírá se směrem počáteční rychlosti Aleše úhel θ. V obrázku je také vyznačen pohyb těžiště soustavy bruslařů a poloha těžiště ve výchozí situaci.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie před srážkou je

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(83\,\mathrm{kg})(6{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 + (\tfrac{1}{2})(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 =$$
$$= 3\,270\,\mathrm{kg{\cdot}km^2{\cdot}h^{-2}}.$$

Kinetická energie po srážce je

$$\tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}(83\,\mathrm{kg} + 55\,\mathrm{kg})(4{,}86\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 =$$
$$= 1\,630\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2.$$

Hledaný poměr α je tedy

$$\alpha = \frac{E_{k,f} - E_{k,i}}{E_{k,i}} =$$
$$= \left(\frac{1\,630\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 - 3\,270\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2}{3\,270\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2}\right) =$$
$$= -0{,}50. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při srážce bruslaři ztratí 50 % kinetické energie.

KONTROLA 7: Jak by se změnil úhel θ v příkladu 10.8 (obr. 10.18), kdyby Barbora byla (a) rychlejší, (b) hmotnější?

RADY A NÁMĚTY

Bod 10.1: *Jsou převody jednotek vždy nutné?*

Položme si otázku, zda je za všech okolností nutné převádět hodnoty veličin do soustavy jednotek SI.

Většinou je obvyklé vyjadřovat hodnoty fyzikálních veličin v jednotkách SI: například rychlost v metrech za sekundu, hmotnost v kilogramech apod. Někdy však není tento přepočet nutný. Při výpočtu úhlu θ v příkladu 10.8a jsme si mohli všimnout, že se jednotky vykrátily. Podobně se v příkladu 10.8c vykrátily jednotky ve výrazu pro poměr α. Nebylo tedy třeba převádět kinetickou energii na jouly. Poněvadž jsme si včas uvědomili, že se jednotky při výpočtu tak jako tak vykrátí, zůstali jsme u jednotek $\mathrm{kg{\cdot}km^2{\cdot}h^{-2}}$.

10.6 JADERNÉ REAKCE A RADIOAKTIVNÍ ROZPAD

Zvláštním druhem srážek jsou **jaderné reakce**. Může se při nich měnit jak identita, tak i počet interagujících částic. Všimneme si také *radioaktivního rozpadu*, při kterém se jedna částice rozpadne na dvě jiné. Při obou těchto jevech je sice stav soustavy „před událostí" velice odlišný od stavu „po události", hybnost soustavy a její *celková* energie se zachovávají. Při studiu problematiky jaderných reakcí či radioaktivního rozpadu tedy můžeme používat stejných metod jako u srážek.

PŘÍKLAD 10.9

Radioaktivní jádro uranu ^{235}U se samovolně rozpadne na thorium ^{231}Th a α-částici (jádro atomu helia, označované jako α nebo $^4_2$He):

$$^{235}\text{U} \to \alpha + {}^{231}\text{Th}.$$

Částice alfa ($m_\alpha = 4{,}00\,\text{u}$) získá při rozpadu kinetickou energii $E_{k,\alpha} = 4{,}60\,\text{MeV}$. Jaká je kinetická energie jádra ^{231}Th ($m_{\text{Th}} = 231\,\text{u}$)?

ŘEŠENÍ: Jádro ^{235}U bylo před rozpadem v klidu vzhledem k laboratorní vztažné soustavě. Po rozpadu odletí částice α s kinetickou energií $E_{k,\alpha}$ a jádro ^{231}Th se začne pohybovat opačným směrem s kinetickou energií $E_{k,\text{Th}}$. Ze zákona zachování hybnosti dostaneme

$$0 = m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} + m_\alpha v_\alpha,$$

tj.

$$m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} = -m_\alpha v_\alpha. \qquad (10.44)$$

Obě strany rov. (10.44) umocníme na druhou:

$$m_{\text{Th}}^2 v_{\text{Th}}^2 = m_\alpha^2 v_\alpha^2. \qquad (10.45)$$

Užitím vztahu pro kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ můžeme rov. (10.45) přepsat ve tvaru

$$m_{\text{Th}} E_{k,\text{Th}} = m_\alpha E_{k,\alpha}.$$

Je tedy

$$E_{k,\text{Th}} = E_{k,\alpha}\frac{m_\alpha}{m_{\text{Th}}} = (4{,}60\,\text{MeV})\left(\frac{4{,}00\,\text{u}}{231\,\text{u}}\right) =$$
$$= 7{,}97\cdot10^{-2}\,\text{MeV} = 79{,}7\,\text{keV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kinetická energie soustavy po rozpadu je součtem hodnot 4,60 MeV (α-částice) a 0,0797 MeV (jádro thoria), tj. 4,68 MeV. Těžké jádro atomu ^{231}Th však nese pouhých 1,7 % celkové hodnoty.

PŘÍKLAD 10.10

Nejdůležitější jadernou reakcí, při níž se uvolňuje energie během slučování (fúze) jader, je tak zvaná d-d reakce. Její schéma můžeme zapsat takto:

$$\text{d} + \text{d} = \text{t} + \text{p}. \qquad (10.46)$$

Jednotlivé symboly v této rovnici označují různé izotopy vodíku. Jejich charakteristiky jsou uvedeny v následující tabulce:

SYMBOLY		JMÉNO	HMOTNOST
p	^{1}H	proton	$m_p = 1{,}00783\,\text{u}$
d	^{2}H	deuteron	$m_d = 2{,}01410\,\text{u}$
t	^{3}H	triton	$m_t = 3{,}01605\,\text{u}$

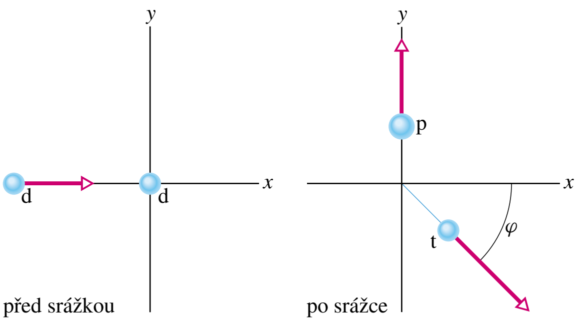
(a) Jak velká energie se uvolní v důsledku hmotnostního schodku Δm?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (8.40) je energie Q uvolněná či spotřebovaná při reakci dána vztahem $Q = -\Delta mc^2$. V našem případě je $\Delta m = m_p + m_t - 2m_d$. Je tedy

$$Q = -\Delta mc^2 = (2m_d - m_p - m_t)c^2 =$$
$$= (2\cdot 2{,}01410\,\text{u} - 1{,}00783\,\text{u} - 3{,}01605\,\text{u})\cdot$$
$$\cdot (931{,}5\,\text{MeV/u}) =$$
$$= (0{,}00432\,\text{u})(931{,}5\,\text{MeV/u}) =$$
$$= 4{,}02\,\text{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při výpočtu jsme pro c^2 použili hodnotu 931,5 MeV/u (vztah (8.43)).

Kladná hodnota Q (jako např. v této úloze) značí, že reakce je **exotermická** a energie uvolněná díky hmotnostnímu schodku se předá vzniklým částicím v podobě energie kinetické. Tato hodnota představuje nepatrný zlomek hmotnosti výchozích částic. Činí $0{,}00432/(2\cdot 2{,}01410) \sim 0{,}001$, tj. asi 0,1 %. Při **endotermických** reakcích je hodnota Q naopak záporná. Dochází při nich k úbytku kinetické energie interagujících částic, který přispěje ke zvýšení hmotnosti produktů reakce. Při $Q = 0$ představuje reakce *pružnou* srážku. Hmotnost ani kinetická energie soustavy se při ní nemění.



Obr. 10.19 Příklad 10.10. Letící deuteron (d) narazí do jiného deuteronu, který je v klidu. Dojde k jaderné reakci, při které vznikne proton (p) a triton (t).

(b) Uvažujme srážku dvou deuteronů, z nichž jeden má kinetickou energii $E_{k,d} = 1{,}50\,\text{MeV}$ a druhý je v klidu. Dojde k reakci popsané rov. (10.46). Proton vzniklý při reakci se pohybuje ve směru kolmém k počáteční rychlosti prvního deuteronu a má kinetickou energii 3,39 MeV (obr. 10.19). Určete kinetickou energii tritonu.

ŘEŠENÍ: Energie Q uvolněná při reakci díky hmotnostnímu schodku přispěje ke zvýšení kinetické energie soustavy. Platí tedy

$$Q = \Delta E_k = E_{k,p} + E_{k,t} - E_{k,d}.$$

Hodnotu Q jsme již určili v části (a) této úlohy. Z předchozího vztahu vyjádříme kinetickou energii tritonu $E_{k,t}$:

$$E_{k,t} = Q + E_{k,d} - E_{k,p} =$$
$$= (4{,}02\,\text{MeV} + 1{,}50\,\text{MeV} - 3{,}39\,\text{MeV}) =$$
$$= 2{,}13\,\text{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaký úhel svírá směr pohybu tritonu se směrem pohybu prvního deuteronu (obr. 10.19)?

ŘEŠENÍ: Při reakci popsané rov. (10.46) platí samozřejmě i zákon zachování hybnosti. Ten jsme však dosud nepoužili. Přivede nás ke dvěma skalárním rovnicím

$$m_\text{d}v_\text{d} = m_\text{t}v_\text{t}\cos\varphi \quad (x\text{-ová složka}), \tag{10.47}$$

$$0 = m_\text{p}v_\text{p} + m_\text{t}v_\text{t}\sin\varphi \quad (y\text{-ová složka}). \tag{10.48}$$

Z rov. (10.48) plyne

$$\sin\varphi = -\frac{m_\text{p}v_\text{p}}{m_\text{t}v_\text{t}}. \tag{10.49}$$

S použitím vztahu pro kinetickou energii ($E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$) můžeme hybnost mv vyjádřit ve tvaru $\sqrt{2mE_\text{k}}$ a přepsat rov. (10.49) takto:

$$\sin\varphi = -\sqrt{\frac{m_\text{p}E_\text{k,p}}{m_\text{t}E_\text{k,t}}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{(1{,}01\,\text{u})(3{,}39\,\text{MeV})}{(3{,}02\,\text{u})(2{,}13\,\text{MeV})}} = -0{,}730,$$

$$\varphi = -46{,}9^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Srážky

Srážkou rozumíme děj, při němž na sebe dvě tělesa (příp. i více těles) působí po krátkou dobu značnými silami. Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles, která se účastní srážky. Bývají mnohem větší než síly vnější, které mohou během srážky na soustavu rovněž působit. Zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie soustavy tvořené oběma tělesy umožňují předpovědět výsledek srážky na základě porovnání těchto veličin bezprostředně před srážkou a bezprostředně po ní. Mohou také napomoci k pochopení podstaty interakčních sil, jimiž na sebe tělesa během srážky působí.

Impulz síly a hybnost

Z druhého Newtonova zákona lze odvodit **vztah mezi změnou hybnosti** částice a **impulzem** výslednice sil, které na ni působí

$$\boldsymbol{p}_\text{f} - \boldsymbol{p}_\text{i} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}, \tag{10.4}$$

kde $\boldsymbol{p}_\text{f} - \boldsymbol{p}_\text{i} = \Delta\boldsymbol{p}$ je změna hybnosti částice a $\boldsymbol{J}$ je **impulz** výslednice sil $\boldsymbol{F}(t)$

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_\text{i}}^{t_\text{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\text{d}t. \tag{10.3}$$

Označíme-li pro případ srážky probíhající v ose x symbolem $\overline{F}$ průměrnou hodnotu síly $\boldsymbol{F}_x(t)$ v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t_i do okamžiku t_f, dostaneme vztah

$$J = \overline{F}\,\Delta t. \tag{10.8}$$

Průměrná síla působící na pevné těleso při dopadu částic o hmotnosti m a rychlosti v, jejichž tok je ustálený, je dána vztahem

$$\overline{F} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v, \tag{10.10}$$

kde zlomek $n/\Delta t$ představuje počet částic, které na těleso dopadnou za každou sekundu, a Δv je změna rychlosti každé z těchto částic při srážce. Průměrnou sílu můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v, \tag{10.13}$$

kde $\Delta m/\Delta t$ je hmotnostní tok dopadajících částic. Pokud se částice při srážce zastaví, je třeba dosadit do vztahů (10.10) a (10.13) hodnotu $\Delta v = -v$. Jestliže se pružně odrazí, je $\Delta v = -2v$.

Pružná přímá srážka

Při *pružné srážce* se zachovává celková kinetická energie soustavy těles účastnících se srážky. Při pružné přímé srážce dvou těles, při níž je některé z nich před srážkou v klidu (střela 1 narazí do tzv. pevného terče 2), vedou zákony zachování hybnosti a kinetické energie soustavy k následujícím vztahům pro výsledné rychlosti těles:

$$v_{1,\text{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1,\text{i}} \tag{10.18}$$

a

$$v_{2,\text{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1,\text{i}}. \tag{10.19}$$

Index (i) označuje hodnoty veličin před srážkou, index (f) odpovídá situaci po srážce. Jsou-li před srážkou v pohybu obě tělesa, jsou jejich rychlosti bezprostředně po srážce dány vztahy

$$v_{1,\text{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1,\text{i}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2,\text{i}} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,\text{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1,\text{i}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2,\text{i}}. \tag{10.29}$$

Přímá nepružná srážka

Při *nepružné srážce* se již celková kinetická energie soustavy těles nezachovává. Zákon zachování hybnosti soustavy však platí. Pokud tělesa při srážce splynou, jedná se o **dokonale nepružnou srážku**. Tento případ odpovídá největšímu přípustnému poklesu kinetické energie soustavy (ze všech možností průběhu nepružné srážky se stejnými výchozími podmínkami). (Kinetická energie soustavy nemusí však klesnout až k nulové hodnotě.) Při přímé dokonale nepružné srážce střely o rychlosti v s pevným terčem vyplývá vztah pro společnou rychlost V obou těles po srážce přímo ze zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)V. \qquad (10.34)$$

Pokud se před srážkou pohybují obě tělesa, má zákon zachování hybnosti tvar

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V. \qquad (10.36)$$

Pohyb těžiště

Pohyb těžiště soustavy těles není jejich srážkou nijak ovlivněn, ať již jde o srážku pružnou, či nepružnou. V případě uzavřené izolované soustavy je rychlost jejího těžiště konstantní a platí pro ni

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}}{m_1 + m_2}. \qquad (10.30)$$

Šikmé srážky

Při **šikmé** srážce se hybnost soustavy opět zachovává. Tentokrát však zákon zachování hybnosti vede ke dvěma skalárním rovnicím: pro x-ovou a y-ovou složku vektoru hybnosti. Jejich řešením můžeme získat rychlosti těles po srážce pouze za předpokladu, že je srážka dokonale nepružná. V tomto případě máme totiž k dispozici důležitý údaj o pohybovém stavu těles po srážce: tělesa se pohybují stejnou rychlostí. Snadno pak určíme i energiovou ztrátu, k níž při srážce došlo. V ostatních případech samozřejmě zákon zachování hybnosti a zákon zachování celkové energie soustavy (nikoli tedy jen kinetické) také platí. Neznáme-li však mechanismus srážky, nemůžeme o energiové bilanci předem říci nic bližšího. K vyřešení úlohy proto potřebujeme další údaje, například směr rychlosti některého z těles po srážce.

Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

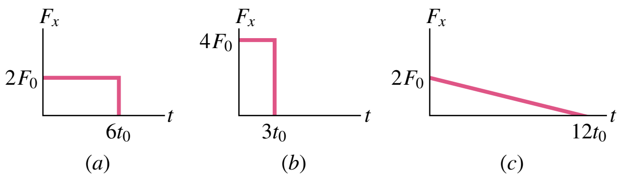
Při *jaderné reakci* nebo *radioaktivním rozpadu* jader se zachovává hybnost a *celková* energie soustavy. Proto i tyto děje řadíme do kategorie srážek. Jejich zvláštnost však spočívá v tom, že se při nich může měnit hmotnost soustavy i identita samotných částic. Změně celkové hmotnosti soustavy o hodnotu Δm odpovídá energiový ekvivalent Δmc^2. Odpovídající změna celkové energie soustavy je tedy dána vztahem

$$Q = -\Delta m\, c^2.$$

Je-li hodnota Q kladná, jedná se o tzv. **exotermickou** reakci. Energie Q, odpovídající hmotnostnímu schodku Δm, se projeví přírůstkem výsledné kinetické energie částic. Při záporné hodnotě Q jde o reakci **endotermickou**. Kinetická energie částic při ní klesá ve prospěch energie odpovídající zvýšení celkové hmotnosti soustavy.

OTÁZKY

1. Na obr. 10.20 jsou znázorněny tři grafy časové závislosti síly, která působila na jisté těleso při srážce. Seřaďte je sestupně podle velikosti impulzu síly.

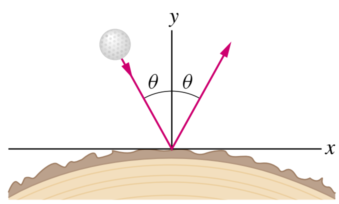


Obr. 10.20 Otázka 1

2. Obr. 10.21 ukazuje náraz golfového míčku do kmene stromu, viděný z nadhledu. Předpokládejme, že se velikost rychlosti míče při srážce nemění. Při nárazu působí kmen na míček silou $\boldsymbol{F}$, odpovídající změna hybnosti míčku je $\Delta\boldsymbol{p}$. Jak se změní následující veličiny, bude-li úhel θ větší? (Předpokládejte, že doba trvání srážky zůstane stejná.) (a) Δp_x, (b) Δp_y, (c) velikost vektoru $\Delta\boldsymbol{p}$, (d) F_x, (e) F_y a (f) velikost síly $\boldsymbol{F}$?

3. V následující tabulce jsou uvedeny hmotnosti (v kilogramech) a rychlosti (v metrech za sekundu) dvou částic z obr. 10.9. ve třech různých situacích. Ve kterých z nich je těžiště soustavy v klidu?

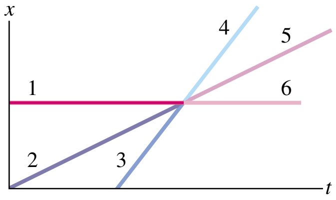
SITUACE	m_1	v_1	m_2	v_2
a	2	3	4	−3
b	6	2	3	−4
c	4	3	4	−3



Obr. 10.21 Otázka 2

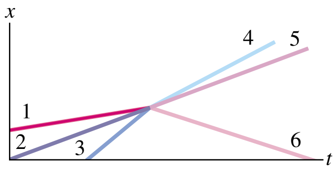
4. (a) Jak se změní výška výstupu koule 1 z př. 10.3 po odrazu, zvýší-li se hmotnost koule 2? Do jaké výšky vystoupí po odrazu (b) koule 1, resp. (c) koule 2, je-li $m_1 = m_2$?

5. Dvě tělesa pohybující se podél osy x se pružně srazí. Grafy na obr. 10.22 představují časové závislosti jejich poloh a polohy těžiště soustavy. Z grafu vyčtěte následující informace: (a) Je některé z těles před srážkou v klidu? Který z grafů přísluší poloze těžiště soustavy (b) před srážkou a (c) po srážce? (d) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, které bylo před srážkou rychlejší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa.



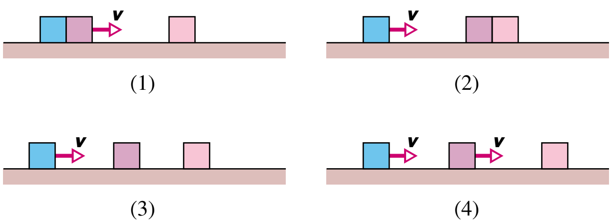
Obr. 10.22 Otázka 5

6. Na obr. 10.23 jsou grafy časové závislosti poloh dvou těles i polohy těžiště soustavy v případě přímé srážky. Zjistěte, který z nich odpovídá pohybu (a) rychlejšího tělesa před srážkou, (b) těžiště soustavy před srážkou a (c) po srážce, (d) každého z těles po srážce. (e) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, jehož rychlost před srážkou byla vyšší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa



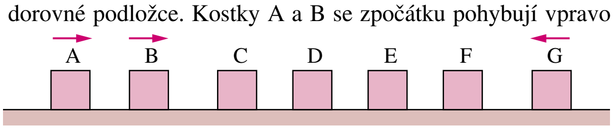
Obr. 10.23 Otázka 6

7. Na obr. 10.24 jsou čtyři různé situace při srážce tří stejných kostek, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné podložce. Při srážkách (1) a (2) jsou dvě z kostek slepeny. Rychlost $\boldsymbol{v}$, která je v obrázku vyznačena, je ve všech případech stejná. Seřaďte jednotlivé situace sestupně podle (a) velikosti celkové hybnosti soustavy po srážce, (b) velikosti výsledné rychlosti kostky, která je nejdále vpravo.



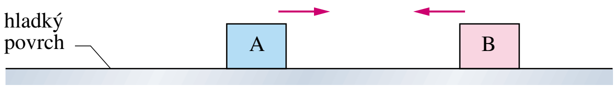
Obr. 10.24 Otázka 7

8. Obr. 10.25 zachycuje sedm kostek na dokonale hladké vodorovné podložce. Kostky A a B se zpočátku pohybují vpravo a kostka G vlevo. Velikost rychlosti každé z nich je $v = 3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Zbývající kostky jsou v klidu. Dojde k sérii pružných srážek. Určete vektory rychlosti všech kostek po poslední srážce.



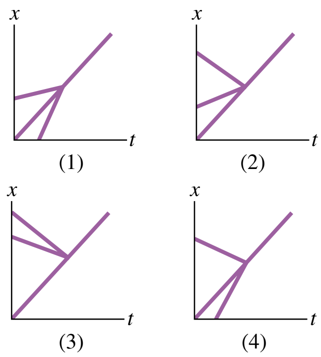
Obr. 10.25 Otázka 8

9. Kostky A a B na obr. 10.26 se pohybují po dokonale hladké podložce ve vyznačených směrech. Velikosti jejich hybností jsou $9\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$ (kostka A) a $4\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$ (kostka B). (a) Určete směr pohybu těžiště soustavy. (b) Předpokládejme, že se obě kostky při srážce pevně spojí. Jakým směrem se bude pohybovat takto vzniklé těleso po srážce? (c) Experiment ukázal, že se těleso A pohybuje po srážce vlevo. Rozhodněte, zda je jeho hybnost větší, menší, nebo stejná jako hybnost tělesa B.

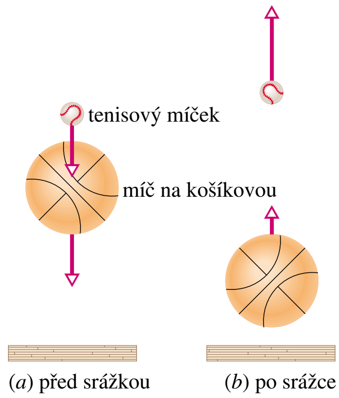


Obr. 10.26 Otázka 9

10. Na obr. 10.27 jsou čtyři grafy znázorňující časové závislosti polohy dvou těles pohybujících se podél osy x a časovou závislost polohy těžiště jejich soustavy. Tělesa se dokonale nepružně srazí. Pro případ grafu (1) zjistěte, zda se (a) obě tělesa a (b) těžiště soustavy pohybují v kladném, či záporném směru osy x. (c) Které z grafů představují fyzikálně nepřípustnou situaci?



Obr. 10.27 Otázka 10



Obr. 10.28 Otázka 12 a úloha 37

11. Těleso Q s hybností $\boldsymbol{p}_Q = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$ se dokonale nepružně srazí s tělesem R, jehož hybnost je $\boldsymbol{p}_R = (8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ kg·m·s^{-1}. Určete směr pohybu obou těles po srážce.

12. Vyzkoušejme si následující pokus: vezmeme postupně tenisový míček a basketbalový míč a každý z nich upustíme na tvrdou podlahu přibližně z výšky ramen. Míče se odrazí a vyskočí obecně do různých výšek. Poté uspořádáme pokus tak, že tenisový míček vypustíme za basketbalovým míčem s malým časovým odstupem, avšak přesně nad ním (obr. 10.28a). Výsledek pokusu bude zcela jiný než v předchozím případě, možná na první pohled poněkud překvapivý. (a) Rozhodněte, zda výška výstupu basketbalového míče bude ve srovnání s výsledkem prvního pokusu větší, nebo menší (obr. 10.28b). (b) Rozhodněte, zda výška, do které po odrazu vystoupí tenisový míč, převýší součet výšek výstupu obou míčů po samostatných odrazech (úloha 37).

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 10.2 Impulz síly a hybnost

1C. Hybnost automobilu o hmotnosti 1 500 kg vzrostla během 12 s o $9{,}0\cdot10^3$ kg·m·s^{-1}. (a) Za předpokladu, že urychlující síla je konstantní, určete její velikost. (b) Určete přírůstek rychlosti automobilu.

2C. Kulečníkové tágo udeří do stojící koule průměrnou silou o velikosti 50 N. Úder trvá 10 ms. Jakou rychlost koule získá, je-li její hmotnost 0,20 kg?

3C. Výrobce automobilů testuje odolnost nových vozů při nárazu pomocí tzv. bariérových zkoušek. Při jedné z nich narazil automobil o hmotnosti 2 300 kg do mostního pilíře rychlostí 15 m·s^{-1}a zastavil se za 0,56 s. Předpokládejme, že při nárazu působila konstantní síla. Jaká byla její velikost?

4C. Míč o hmotnosti m narazil kolmo do zdi rychlostí $\boldsymbol{v}$ a odrazil se zpět stejně velkou rychlostí. (a) Určete průměrnou sílu, kterou stěna působila na míč, trval-li náraz po dobu Δt. (b) Pro číselný výpočet použijte hodnoty $m = 140$ g, $v = 7{,}8$ m·s^{-1}a $\Delta t = 3{,}8$ ms.

5C. Nadhazovač hodil baseballový míč rychlostí 40 m·s^{-1}. Pálkař jej odehrál zpět přesně v opačném směru rychlostí 60 m·s^{-1}. Určete průměrnou sílu, jíž působila pálka na míč, trval-li úder 5,0 ms.

6C. Jako sedmnáctiletý ohromoval artista Henri LaMothe diváky skoky z výšky 12 m do vody hluboké pouhých 30 cm (obr. 10.29). Za předpokladu, že se jeho pád zastavil právě u dna vodní nádrže, vypočtěte průměrnou brzdnou sílu, která na artistu o hmotnosti 73 kg ve vodě působila.

7C. V únoru 1955 byla zaznamenána pozoruhodná událost: jistému parašutistovi se po seskoku z výšky 366 m nepodařilo otevřít padák. Naštěstí spadl do sněhu, a tak byla jeho zranění jen nepatrná. Předpokládejme, že velikost jeho rychlosti měla bezprostředně před dopadem hodnotu 56 m·s^{-1}, jeho hmotnost činila 85 kg a velikost největší brzdné síly, kterou může člověk přežít, je $1{,}2\cdot10^5$ N. Určete nejmenší tloušťku sněhové pokrývky, v níž tehdy let parašutisty tak šťastně skončil.

8C. Při srážce trvající 27 ms působila na ocelovou kouli o hmotnosti 0,40 kg a rychlosti 14 m·s^{-1}stálá síla o velikosti 1 200 N. Určete výslednou rychlost koule, působila-li síla přímo proti směru jejího pohybu.

Obr. 10.29 Cvičení 6

9C. Medicinbal o hmotnosti 1,2 kg dopadne kolmo na podlahu rychlostí 25 m·s^{-1}a odrazí se v opačném směru rychlostí 10 m·s^{-1}. (a) Vypočtěte impulz síly, která na míč při odrazu působila. (b) Za předpokladu, že míč byl s podlahou v kontaktu 0,020 s, určete průměrnou sílu působící na míč během srážky.

10C. Hráč golfu odpálí míček rychlostí o velikosti 50 m·s^{-1} pod elevačním úhlem 30°. Předpokládejme, že míč má hmotnost 46 g a je v kontaktu s golfovou holí po dobu 1,7 ms. Určete (a) impulz síly, kterou při úderu působí hůl na míček, (b) impulz síly, která působí na golfovou hůl, (c) průměrnou sílu působící na míček a (d) práci, kterou vykonala síla působící na míček.

11Ú. Automobil o hmotnosti 1 400 kg jede na sever (kladný směr osy y) rychlostí 5,3 m·s^{-1}. Po průjezdu pravoúhlou pravotočivou zatáčkou (do kladného směru osy x), který trval 4,6 s, ztratí řidič na okamžik pozornost. Vůz narazí do stromu a zastaví se za 350 ms. Pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic zapište vektor impulzu síly, která působila na vůz (a) při zatáčení, (b) při srážce. Jaká je velikost průměrné síly působící na vůz (c) při zatáčení a (d) při srážce? (e) Jaký úhel svírá průměrná síla vypočtená v části (c) s kladným směrem osy x?

12Ú. Velikost síly, která působí na těleso o hmotnosti 10 kg, rovnoměrně vzroste za 4,0 s z nulové hodnoty na hodnotu 50 N. Jakou rychlostí se těleso pohybuje na konci tohoto časového intervalu, bylo-li zpočátku v klidu?

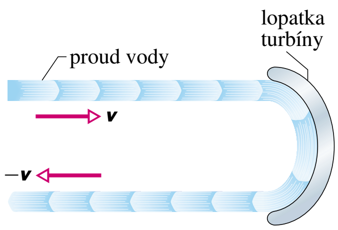
13Ú. Při střelbě z brokovnice do terče připevněného k nepohyblivé stěně dopadá na stěnu 10 broků za sekundu. Brok má hmotnost 2,0 g a do stěny narazí rychlostí 500 m·s^{-1}. (a) Jaká je jeho hybnost a (b) kinetická energie? Určete velikost průměrné síly, jíž působí na zeď (c) jednotlivý brok, (d) proud broků. Předpokládáme, že srážka každého broku se zdí trvá 0,6 ms. Proč se hodnoty získané v částech (c) a (d) tak výrazně liší?

14Ú. Při střelbě ze samopalu používaného při natáčení filmů vyletují kulky o hmotnosti 50,0 g rychlostí 1 000 m·s^{-1}. Herec dokáže na samopal působit silou o velikosti nejvýše 180 N. Kolik ran za minutu může vypálit, aby samopal ještě udržel?

15Ú. Filmového Supermana nelze zastřelit. Všechny střely se totiž od jeho hrudi odrazí (obr. 10.30). Předpokládejme, že zločinec vystřelí na Supermana 100 ran za minutu. Každá kulka má hmotnost 3 g a letí rychlostí 500 m·s^{-1}. Od Supermana se odráží zpět stejně velkou rychlostí. Jakou průměrnou silou působí tok kulek na Supermanovu hruď?

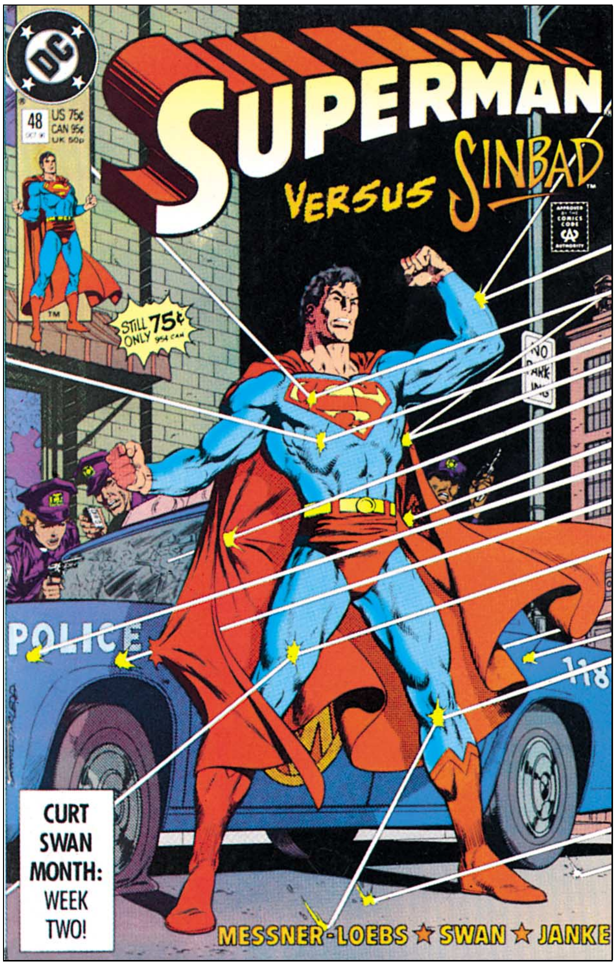
16Ú. Při mohutné bouři dopadají na zem kroupy o průměru 1,0 cm rychlostí 25 m·s^{-1}. Lze odhadnout, že v krychlovém metru vzduchu je asi 120 krup. (a) Jakou hmotnost má jedna kroupa (hustota 0,92 g/cm^3)? (b) Jakou průměrnou silou působí krupobití na vodorovný terén o obsahu 10 m × 20 m? Předpokládáme, že se kroupy po dopadu neodrážejí.

17Ú. Voda proudí kolem nepohyblivé turbínové lopatky ve tvaru misky podle obr. 10.31. Počáteční rychlost vodního proudu je $\boldsymbol{v}$ a výsledná $-\boldsymbol{v}$ (obr. 10.31). Hmotnostní průtok vody je μ kg/min. Jakou silou působí voda na lopatku?



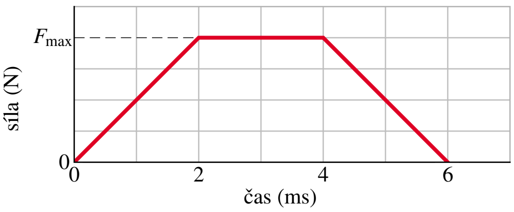
Obr. 10.31 Úloha 17

18Ú. Voda proudí z hadice přímo proti zdi. Určete průměrnou sílu, kterou působí vodní proud na zeď, vytéká-li z hadice každou sekundu 300 cm^3 vody rychlostí 5,0 m·s^{-1}. Předpokládáme, že voda se od zdi neodráží. Jeden krychlový centimetr vody má hmotnost 1,0 g.



Obr. 10.30 Úloha 15

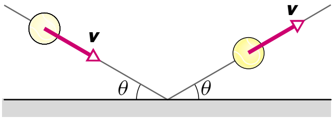
19Ú. Na obr. 10.32 je přibližný průběh časové závislosti síly, která působila na tenisový míček o hmotnosti 58 g při jeho nárazu do zdi. Míček dopadl na zeď kolmo rychlostí 34 m·s^{-1}a odrazil se přesně opačným směrem se stejně velkou rychlostí. Určete největší hodnotu velikosti síly $F_{\max}$, která při této srážce na míček působila.



Obr. 10.32 Úloha 19

20Ú. Míček o hmotnosti 150 g narazí na stěnu rychlostí 5,2 m·s^{-1}a odrazí se v opačném směru. Jeho kinetická energie se při odrazu zmenší na polovinu. (a) Vypočtěte rychlost míčku bezprostředně po odrazu. (b) Určete velikost impulzu síly, kterou působil míček na stěnu. (c) Určete velikost průměrné síly, kterou působil míček na stěnu, trvala-li srážka 7,6 ms.

21Ú. Na obr. 10.33 je míček, který narazil do podlahy rychlostí o velikosti 6,0 m·s^{-1}pod úhlem $\theta = 30°$. Po odrazu měl míček stejně velkou rychlost, která svírala s podlahou úhel 30°. Srážka trvala 10 ms. (a) Vypočtěte impulz síly, která při srážce působila na míček. (b) Jakou průměrnou silou působil míček na podlahu?



Obr. 10.33 Úloha 21

22Ú. Automaticky řízená kosmická sonda o hmotnosti 2 500 kg letí stálou rychlostí o velikosti 300 m·s^{-1}. V jistém okamžiku se zažehnou raketové motory, které mají tah 3 000 N. Zážeh trvá 65,0 s. (a) Určete změnu hybnosti sondy, směřuje-li tahová síla motorů vpřed, vzad nebo kolmo k okamžitému směru pohybu. (b) Pro každý z těchto případů určete odpovídající změnu kinetické energie sondy. Předpokládáme, že hmotnost paliva spotřebovaného při tomto krátkém zážehu je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti sondy.

23Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$. Vlivem síly, která na těleso po jistou dobu působí ve směru jeho pohybu, se jeho rychlost mění. Výslednou rychlost označme $\boldsymbol{u}$ a odpovídající impulz působící síly $\boldsymbol{J}$. Ukažte, že práce vykonaná touto silou za uvedenou dobu je dána vztahem $W = \frac{1}{2}J(u + v)$.

24Ú. Po řízeném výbuchu nálože ve speciálních spojovacích šroubech se kosmická loď rozdělí na dvě části o hmotnostech 1 200 kg a 1 800 kg. Obě části na sebe tedy po jistou dobu silově působí. Odpovídající velikost impulzu každé z interakčních sil je 300 N·s. Jakou vzájemnou rychlostí se od sebe oddělené části vzdalují?

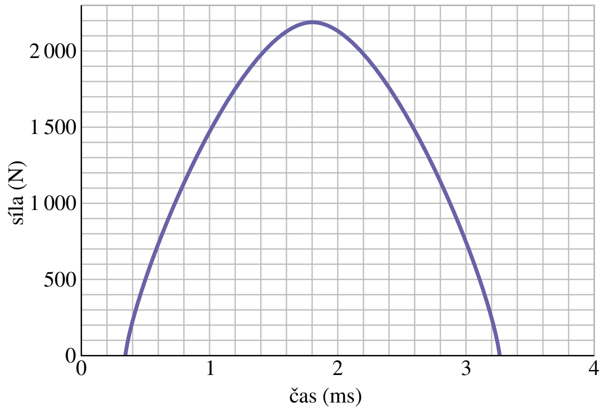
25Ú. Na obr. 10.34 je graf časové závislosti síly, která působila při odpálení kriketového míčku o hmotnosti 0,5 kg. Před úderem byl míček v klidu. Jakou měl míček rychlost bezprostředně poté, co velikost síly klesla k nulové hodnotě?

26Ú. Fotbalista odkopne míč o hmotnosti 0,45 kg, který leží na zemi. Noha fotbalisty je s míčem v kontaktu po dobu 3,0·10^{-3} s a časová závislost síly působící na míč má tvar

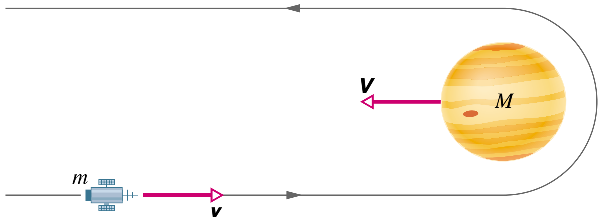
$$F(t) = [(6{,}0 \cdot 10^6)t - (2{,}0 \cdot 10^9)t^2]\,\mathrm{N}$$

pro $0 \leqq t \leqq 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ s. Čas t je měřen v sekundách. Určete velikosti následujících vektorů: (a) impulz síly, která působila na míč, (b) průměrnou a (c) maximální sílu, kterou při výkopu působila na míč noha fotbalisty, (d) rychlost míče těsně po výkopu.

27Ú. Kosmická loď *Voyager 2* (hmotnost m a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke Slunci) se přibližuje k planetě Jupiter (hmotnost M a rychlost $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke Slunci), jak ukazuje obr. 10.35. Loď obletí planetu a vrací se zpět v protisměru (gravitační prak). Určete výslednou rychlost lodi vzhledem ke Slunci. Předpokládáme, že $v = 12$ km·s^{-1} a $V = 13$ km·s^{-1} (oběžná rychlost Jupitera). Hmotnost Jupitera je mnohem větší než hmotnost kosmické lodi, $M \gg m$.



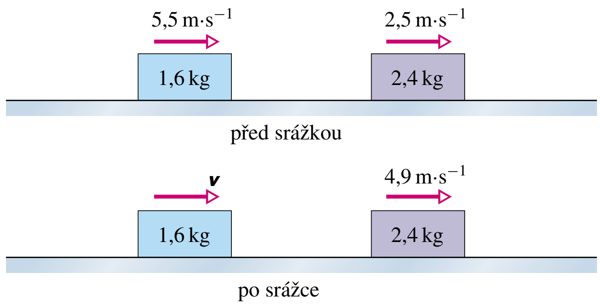
Obr. 10.34 Úloha 25



Obr. 10.35 Úloha 27

ODST. 10.3 Pružné přímé srážky

28C. Kostky na obr. 10.36 kloužou po dokonale hladké podložce. (a) Určete rychlost levé kostky po srážce. (b) Je srážka pružná? (c) Předpokládejme nyní, že rychlost pravé kostky před srážkou má opačný směr než na prvním obrázku. Je možné, aby v takovém případě měla rychlost $\boldsymbol{v}$ levé kostky směr vyznačený na druhém obrázku, znázorňujícím situaci po srážce?



Obr. 10.36 Cvičení 28

29C. Do mouchy vznášející se stále nad tímtéž místem zemského povrchu narazí rozzuřený slon rychlostí 2,1 m·s^{-1}. Jakou rychlostí se moucha odrazí, je-li srážka pružná? V tomto případě je střela (slon) mnohem těžší než terč (moucha).

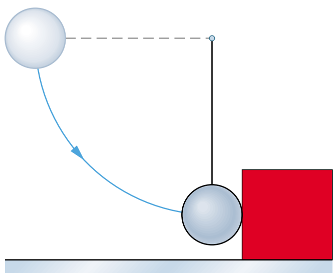
30C. Elektron se srazí s atomem vodíku, který byl zpočátku v klidu. Srážka je přímá a pružná. Kolik procent původní kinetické energie elektronu získá atom? Atom vodíku má 1840krát větší hmotnost než elektron.

31C. Vozíček o hmotnosti 340 g se pohybuje na vzduchové lavici (pohyb bez tření) rychlostí $1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pružně narazí do druhého vozíčku, který je zpočátku v klidu. Po srážce se první vozíček pohybuje původním směrem rychlostí $0{,}66\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete hmotnost druhého vozíčku a (b) jeho rychlost po srážce. (c) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy dvou vozíčků?

32C. Částice α (hmotnost 4 u) se srazí s jádrem atomu zlata (hmotnost 197 u), které bylo před srážkou v klidu. Srážka je přímá a pružná. Určete ztrátu kinetické energie α-částice v procentech.

33C. Střela o hmotnosti 2 kg narazí do klidného terče a po pružné srážce se pohybuje v původním směru čtvrtinovou rychlostí. (a) Určete hmotnost terče. (b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy, má-li počáteční rychlost střely velikost $4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

34Ú. Ocelová koule o hmotnosti 0,500 kg je upevněna na závěsu délky 70,0 cm. Kouli vychýlíme tak, aby byl napjatý závěs vodorovný, a uvolníme (obr. 10.37). V nejnižším bodě své dráhy narazí koule na ocelový hranol o hmotnosti 2,5 kg, spočívající na dokonale hladké vodorovné podložce. Srážka je pružná. Určete (a) rychlost koule i (b) rychlost hranolu těsně po srážce.



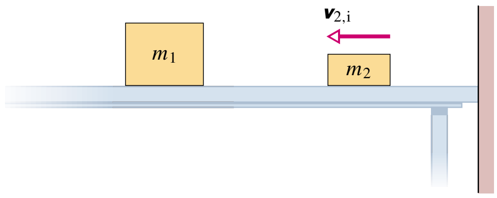
Obr. 10.37 Úloha 34

35Ú. Proud částic dopadá na misku digitální váhy z výšky 3,5 m. Srážky částic s miskou jsou pružné a každá částice se odrazí zpět se stejně velkou rychlostí. Zjistěte, jaký údaj váha ukazuje, má-li každá částice hmotnost 110 g a dopadne-li na misku za každou sekundu 42 částic. Předpokládáme, že po odrazu již částice zpět na misku nedopadají.

36Ú. Dvě titanové koule se pohybují proti sobě stejně velkými rychlostmi a srazí se. Srážka je přímá a pružná. Po srážce se jedna z koulí, jejíž hmotnost je 300 g, zastaví. (a) Jaká je hmotnost druhé koule? (b) Určete rychlost těžiště soustavy, měla-li velikost rychlosti koulí před srážkou hodnotu $2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

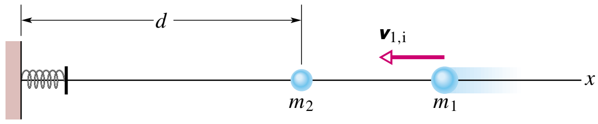
37Ú. Míček o hmotnosti m umístíme těsně nad větší míč o hmotnosti M (obr. 10.28a). Oba míče současně volně pustíme z výšky h. (Předpokládáme, že jejich poloměry jsou mnohem menší než výška h.) Velký míč se nejprve odrazí od podlahy a potom narazí do míčku. Obě srážky jsou pružné. (a) Při jakém poměru m/M se velký míč M po druhé srážce zastaví? (Řešení přibližně vyhovuje dvojici míčů z otázky 12.) (b) Do jaké výšky pak vystoupí menší míč?

38Ú. Kvádr o hmotnosti m_1 leží v klidu na dlouhém, dokonale hladkém stole, jehož jeden konec je zapřen o stěnu. Druhý kvádr o hmotnosti m_2 umístíme mezi kvádr m_1 a stěnu a udělíme mu rychlost $\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{i}}$ směrem k m_1 (obr. 10.38). Nejprve nastane srážka obou kvádrů a pak narazí kvádr m_2 do stěny. Obě srážky jsou pružné. Při jaké hodnotě poměru m_2/m_1 budou výsledné rychlosti obou kvádrů stejné? Stěnu považujeme za těžký terč (hmotnost kvádru je ve srovnání s její hmotností zanedbatelná).



Obr. 10.38 Úloha 38

39Ú. Na vzduchové lavici stojí vozíček (terč) o hmotnosti $m_2 = 350\,\mathrm{g}$ ve vzdálenosti $d = 53\,\mathrm{cm}$ od konce lavice. Druhý vozíček (střela) o hmotnosti $m_1 = 590\,\mathrm{g}$ narazí do terče rychlostí $v_{1,\mathrm{i}} = -75\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$(obr. 10.39). Terč se dá do pohybu a odrazí se od krátké pružiny uchycené na konci lavice. Dožene střelu a narazí do ní. Všechny srážky jsou pružné. Určete, v jaké vzdálenosti od konce lavice dojde k druhé srážce terče se střelou.



Obr. 10.39 Úloha 39

ODST. 10.4 Nepružné přímé srážky

40C. Současná představa o vzniku kráteru v Arizoně (obr. 10.1a) je taková, že byl způsoben dopadem meteoritu asi před 20 000 lety. Hmotnost meteoritu se odhaduje na $5\cdot10^{10}\,\mathrm{kg}$ a jeho rychlost před dopadem na $7\,200\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete rychlost, kterou by Země za těchto podmínek získala při přímé srážce.

41C. Krabice o hmotnosti 6 kg klouže po ledě rychlostí 9,0 m/s. Balík o hmotnosti 12 kg padá volným pádem a spadne přímo do krabice. Určete výslednou rychlost krabice s balíkem.

42C. Kulka o hmotnosti 5,20 g letí vodorovně rychlostí 672 m/s. Narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 700 g, který spočívá na dokonale hladké podlaze. Po průletu kvádrem se velikost rychlosti kulky zmenší na hodnotu $428\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) rychlost kvádru po srážce a (b) rychlost těžiště soustavy.

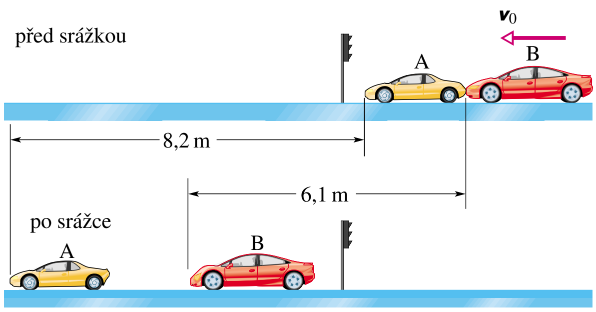
43C. Tělesa A a B o stejných hmotnostech 2,0 kg se pohybují rychlostmi $\boldsymbol{v}_\mathrm{A} = 15\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v}_\mathrm{B} = -10\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a srazí se. Rychlost tělesa A po srážce je $\boldsymbol{v}'_\mathrm{A} = -5{,}0\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j}$. Všechny rychlosti jsou zadány v metrech za sekundu. (a) Jakou rychlost má po srážce těleso B? (b) Určete změnu kinetické energie soustavy, k níž při srážce došlo.

44C. Kulka o hmotnosti 10 g narazí do balistického kyvadla o hmotnosti 2 kg a uvázne v něm. Kyvadlo vystoupí do výšky 12 cm. Vypočtěte počáteční rychlost kulky.

45C. Kulka o hmotnosti 4,5 g je vystřelena vodorovně a narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 2,4 kg, který leží na vodorovné podložce. Koeficient dynamického tření mezi kvádrem a podložkou je 0,20. Kulka v kvádru uvázne a ten se zastaví ve vzdálenosti 1,8 m od své původní polohy. (a) Jakou rychlostí se kvádr pohybuje v okamžiku, kdy se kulka vzhledem k němu zastaví? (b) Jaká je počáteční rychlost kulky?

46C. Dvě kostky o hmotnostech 5,0 kg a 10 kg se pohybují stejným směrem rychlostmi 3,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$a 2,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Dojde ke srážce, po níž hmotnější kostka pokračuje v pohybu v původním směru, avšak rychlostí 2,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou rychlostí se těsně po srážce pohybuje méně hmotná kostka? (b) Zjistěte, k jaké energiové ztrátě při srážce došlo. (c) Rozhodněte, jak by se změnila odpověď na otázku (b), kdyby se hmotnější kostka pohybovala po srážce rychlostí 4,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, a (d) výsledek zdůvodněte.

47Ú. Dva automobily A a B přijíždějí ke křižovatce a snaží se na zledovatělé silnici zabrzdit. Oba se dostanou do smyku se zablokovanými koly. Hmotnosti vozů jsou 1 100 kg (A) a 1 400 kg (B). Koeficient dynamického tření mezi zablokovanými koly a silnicí je v obou případech 0,13. Vozu A se těsně před křižovatkou podaří zastavit. Vůz B, který jede za ním, však již zabrzdit nestačí a dojde k nárazu. Automobil A znovu zastaví ve vzdálenosti 8,2 m od místa srážky, vůz B urazí ještě 6,1 m. (obr. 10.40). (a) Určete rychlosti automobilů bezprostředně po srážce. (b) Pomocí zákona zachování hybnosti zjistěte rychlost, kterou vůz B narazil do A. Je možné mít v tomto případě pochybnost o platnosti zákona zachování hybnosti? Zdůvodněte.

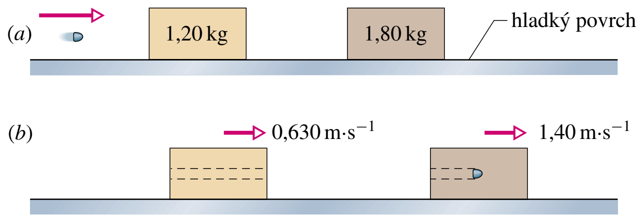


Obr. 10.40 Úloha 47

48Ú. Závaží o hmotnosti 3 000 kg dopadne z výšky 6,0 m na pilot o hmotnosti 500 kg a zarazí jej 3,0 cm do skály. Srážka je dokonale nepružná. Určete průměrnou velikost odporové síly, kterou na pilot působí skála po dobu, než se jeho pohyb zcela zastaví.

49Ú. Na dokonale hladké vodorovné podložce leží dvě kostky o hmotnostech m a $2m$. Jsou umístěny těsně vedle konců stlačené vodorovné pružiny a přidržovány zarážkami, aby se pružina nemohla uvolnit. Potenciální energie stlačené pružiny je 60 J. V určitém okamžiku zarážky odstraníme. Určete kinetickou energii každé z kostek v okamžiku, kdy ztratí kontakt s pružinou (pružina je v té chvíli v nenapjatém stavu).

50Ú. Na dokonale hladké vodorovné podlaze leží dvě kostky o hmotnostech 1,20 kg a 1,80 kg. Kulka o hmotnosti 3,50 g je vystřelena ve vodorovném směru a zasáhne první kostku. Proletí jí a teprve ve druhé kostce uvázne (obr. 10.41). První kostka se po průletu střely pohybuje rychlostí o velikosti 0,630 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, velikost výsledné rychlosti druhé kostky je 1,40 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$(obr. 10.41b). Určete (a) rychlost, kterou kulka vylétla z první kostky a (b) počáteční rychlost kulky. Zanedbejte změnu hmotnosti první kostky způsobenou průletem střely.

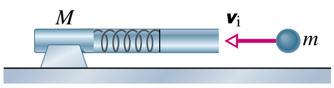


Obr. 10.41 Úloha 50

51Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje v kosmickém prostoru stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Najednou vybuchne a rozpadne se na dvě části, z nichž jedna má třikrát větší hmotnost než druhá. Po rozpadu zůstane lehčí úlomek v klidu. Zjistěte, k jak velkému přírůstku kinetické energie soustavy došlo na úkor energie uvolněné při výbuchu. (Soustava je tvořena nejprve tělesem a po jeho rozpadu oběma úlomky.)

52Ú. Na váhu položíme krabici a vynulujeme ukazatel. Poté začneme do krabice sypat kuličky, z nichž každá má hmotnost m. Kuličky padají z výšky h s frekvencí R kuliček za sekundu. Zjistěte, jaký údaj (v kilogramech) ukáže váha po uplynutí doby t, lze-li každý dopad kuličky do krabice považovat za dokonale nepružnou srážku. Pro číselné řešení použijte hodnoty $R = 100\,\mathrm{s^{-1}}$, $h = 7{,}60$ m, $m = 4{,}50$ g a $t = 10{,}0$ s.

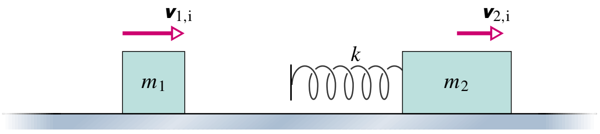
53Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 35 tun se srazí se stojícím služebním vozem. Při srážce se vagony pevně spojí. Ztráta kinetické energie soustavy, k níž při této srážce dojde (ve prospěch zahřátí, energie zvukového vlnění atd.), činí 27 %. Určete hmotnost služebního vozu.



Obr. 10.42 Úloha 54

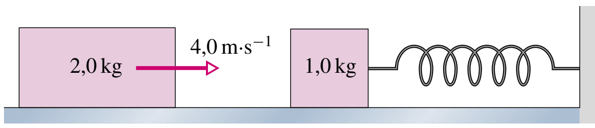
54Ú. Kulička o hmotnosti m vletí do hlavně pružinové pistole s hmotností M, která spočívá na dokonale hladké vodorovné podložce (obr. 10.42). Kulička náhle uvázne v hlavni ve chvíli, kdy je stlačení pružiny největší. Třecí síly působící proti pohybu kuličky v hlavni jsou zanedbatelné. (a) Určete rychlost pistole v okamžiku, kdy se kulička vzhledem k hlavni zastaví. (b) Jakou část původní kinetické energie kuličky představuje potenciální energie stlačené pružiny?

55Ú. Dva hranoly o hmotnostech $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ se pohybují v téže přímce po dokonale hladké vodorovné desce rychlostmi o velikostech $v_{1,\mathrm{i}} = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_{2,\mathrm{i}} = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. K hranolu m_2 je upevněna velmi lehká pružina o tuhosti $k = 1\,120\,\mathrm{N/m}$ (obr. 10.43), do níž hranol m_1 narazí. Určete největší stlačení pružiny při této srážce. (*Tip*: V okamžiku největšího stlačení pružiny se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí.)



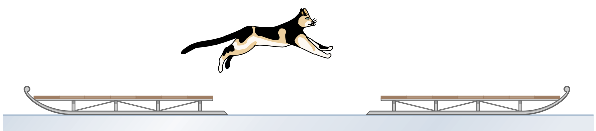
Obr. 10.43 Úloha 55

56Ú. Kostka o hmotnosti 1,0 kg leží na dokonale hladké podložce a je nenapjatou pružinou ($k = 200\,\mathrm{N/m}$) spojena se stěnou (obr. 10.44). Hranol o hmotnosti 2,0 kg do ní narazí rychlostí $4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ rovnoběžně s pružinou a pevně se s ní spojí. Určete stlačení pružiny v okamžiku, kdy je společná rychlost těles nulová.



Obr. 10.44 Úloha 56

57Ú. Dvoje stejné sáně o hmotnostech 22,7 kg stojí těsně za sebou podle obr. 10.45. Kočka o hmotnosti 3,63 kg, která na jedněch sáních seděla, přeskočí najednou na druhé sáně a hned zase zpět. Při obou skocích má rychlost kočky vzhledem k zemi velikost $3{,}05\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete výsledné rychlosti sání.



Obr. 10.45 Úloha 57

58Ú. Automobil o hmotnosti 1 200 kg má nárazník konstruován tak, aby čelní náraz do zdi rychlostí 5,00 km/h byl ještě bezpečný. Vůz jede rychlostí 70 km/h a zezadu narazí do druhého automobilu, který jede rychlostí 60 km/h stejným směrem a má hmotnost 900 kg. Rychlost druhého vozu po srážce je 70 km/h. (a) Jaká je rychlost prvního automobilu bezprostředně po nárazu? (b) Určete poměr ztráty kinetické energie soustavy dvou automobilů při popsané srážce a kinetické energie, při níž je náraz prvního automobilu do zdi ještě bezpečný.

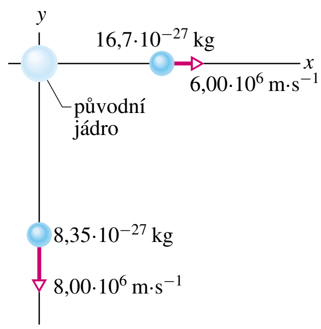
59Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 32 tun jede rychlostí 1,5 m/s. Narazí do jiného vagonu, který má hmotnost 24 tun a jede stejným směrem rychlostí $0{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Oba vozy se při srážce spojí. Určete (a) společnou rychlost vozů po srážce a (b) změnu celkové kinetické energie soustavy. (c) Jaké by byly výsledné rychlosti vozů, kdyby srážka byla pružná?

ODST. 10.5 Šikmé srážky

60C. Částice α se srazí s jádrem atomu kyslíku, které bylo před srážkou v klidu. Její výsledná rychlost svírá s původním směrem jejího pohybu úhel 64,0°. Kyslíkové jádro se po srážce pohybuje rychlostí o velikosti $1{,}20{\cdot}10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, která svírá s původním směrem pohybu α-částice úhel $-51{,}0°$. Určete (a) výslednou a (b) počáteční rychlost α-částice. (Hmotnost α-částice je 4,0 u a hmotnost kyslíkového jádra 16 u.)

61C. Proton (střela) letí rychlostí $500\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a pružně se srazí s jiným protonem (terč), který byl zpočátku v klidu. Střela se od původního směru svého pohybu odchýlí o 60°. Určete (a) směr pohybu terče a (b) velikost rychlosti terče i střely po srážce.

62C. Atomové jádro, které je v klidu, se náhle rozpadne na tři části. Dvě z nich jsou zachyceny detekčním zařízením, které je schopno určit jejich rychlosti a hmotnosti (obr. 10.46). (a) Určete hybnost třetí částice, jejíž hmotnost je $11{,}7{\cdot}10^{-27}\,\mathrm{kg}$, a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (b) Jaká je celková kinetická energie částic po rozpadu?



Obr. 10.46 Cvičení 62

63C. Bílá kulečníková koule narazí do červené, která je zpočátku v klidu. Rychlost bílé koule má po srážce velikost $3{,}50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a svírá s původním směrem pohybu úhel 22,0°. Červená koule odletí rychlostí o velikosti $2{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) směr rychlosti červené koule po srážce a (b) počáteční rychlost bílé koule. (c) Je srážka pružná?

64C. Dva automobily A a B se blíží ke stejnému místu v navzájem kolmých směrech. Při srážce se do sebe zaklíní. Vůz A (hmotnost 1 200 kg) se před srážkou pohyboval rychlostí 64 km/h a vůz B (hmotnost 1 600 kg) rychlostí 96 km/h. Určete velikost a směr společné rychlosti obou vraků po srážce.

65C. Kulečníková koule narazí rychlostí $\boldsymbol{V}$ do těsně uspořádané skupiny patnácti stojících koulí. Dojde k sérii srážek koulí mezi sebou i s obrubou stolu. Shodou okolností má velikost rychlosti všech šestnácti koulí v jistém okamžiku stejnou hodnotu v. Všechny srážky považujeme za pružné a zanedbáváme vliv rotačního pohybu koulí. Vyjádřete v pomocí V.

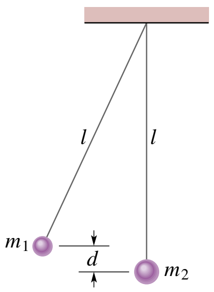
66Ú. Těleso o hmotnosti 20,0 kg se pohybuje v kladném směru osy x rychlostí $200\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Najednou vybuchne a roztrhne se na tři části. První z nich má hmotnost 10,0 kg a odletí rychlostí $100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ v kladném směru osy y. Druhý úlomek (hmotnost 4,00 kg) se vrací zpět podél záporné osy x rychlostí o velikosti $500\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete rychlost (směr a velikost) třetího úlomku, který má hmotnost 6,00 kg. (b) Určete celkovou kinetickou energii všech úlomků po srážce. (Vliv tíhové síly zanedbejte.)

67Ú. Míč B narazí rychlostí $\boldsymbol{v}$ do míče A, který byl v klidu. Hmotnosti míčů jsou různé. Po srážce se míč B pohybuje poloviční rychlostí kolmo k původnímu směru svého pohybu. (a) Určete směr pohybu míče A po srážce. (b) Je možné zjistit ze zadaných údajů i velikost rychlosti míče A? Odpověď zdůvodněte.

68Ú. Neutron se při pružné srážce s klidným deuteronem odchýlí o 90° od původního směru svého pohybu. Ukažte, že neutron ztratil při srážce dvě třetiny své kinetické energie, kterou naopak deuteron získal. (Hmotnost neutronu je 1,0 u a hmotnost deuteronu 2,0 u.)

69Ú. Dvě stejně rychlá tělesa o stejných hmotnostech se při srážce pevně spojí (dokonale nepružná srážka). Velikost rychlosti vzniklého objektu je ve srovnání s počáteční rychlostí každého z obou těles poloviční. Určete úhel mezi vektory počátečních rychlostí těles.

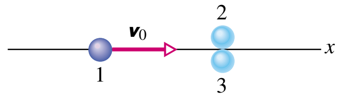
70Ú. Obr. 10.47 znázorňuje výchozí situaci před srážkou dvou kyvadel o délce l. Po uvolnění narazí kyvadlo m_1 do kyvadla m_2. Srážka je dokonale nepružná. Odpor prostředí a hmotnosti závěsů považujeme za zanedbatelné. Do jaké výšky vystoupí těžiště soustavy spojených kyvadel?



Obr. 10.47 Úloha 70

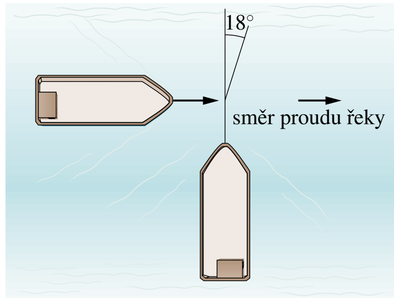
71Ú. Kulečníková koule narazí rychlostí $2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ do jiné koule, která byla v klidu. Po srážce se jedna z koulí pohybuje rychlostí o velikosti $1{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ ve směru, který svírá s původním směrem pohybu střely úhel 60°. (a) Určete rychlost druhé koule (velikost a směr). (b) Připouštějí zadané hodnoty možnost nepružné srážky?

72Ú. Koule 1 (střela) narazí počáteční rychlostí $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ do dvojice stejných koulí, které jsou v klidu a dotýkají se. Spojnice jejich těžišť je kolmá na směr letící koule (obr. 10.48). Střela míří přesně do místa dotyku dvojice terčů. Určete rychlosti všech tří koulí po srážce. Třecí síly zanedbejte. (*Tip*: Při zanedbatelném tření mají impulzy sil, jimiž na sebe koule působí při srážce, směr spojnice jejich středů.)



Obr. 10.48 Úloha 72

73Ú. Nákladní loď o hmotnosti $1{,}50{\cdot}10^5$ kg pluje v husté mlze po proudu řeky rychlostí o velikosti $6{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Náhle narazí do boku druhé lodi, která přeplouvá řeku napříč (obr. 10.49). Druhá loď má hmotnost $2{,}78{\cdot}10^5$ kg a pluje rychlostí $4{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Těsně po srážce se kurs druhé lodi odchýlí o 18° od původního směru a velikost její rychlosti vzroste na $5{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Rychlost toku řeky je zanedbatelná. (a) Určete rychlost první lodi (velikost a směr) po srážce a (b) úbytek celkové kinetické energie soustavy.



Obr. 10.49 Úloha 73

ODST. 10.6 Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

74C. Hmotnosti všech částic v jaderné reakci

$$\mathrm{p} + {}^{19}\mathrm{F} \rightarrow \alpha + {}^{16}\mathrm{O}$$

jsou známy velmi přesně:

$$m_\mathrm{p} = 1{,}007\,825\,\mathrm{u}, \qquad m_\alpha = 4{,}002\,603\,\mathrm{u},$$
$$m_\mathrm{F} = 18{,}998\,405\,\mathrm{u}, \qquad m_\mathrm{O} = 15{,}994\,915\,\mathrm{u}.$$

Vypočtěte energii Q, která se při reakci uvolnila.

75C. Elementární částice Σ^- (sigma minus) se samovolně rozpadne podle schématu

$$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + \mathrm{n}.$$

Hmotnosti částic jsou

$$m_\Sigma = 2\,340{,}5 m_\mathrm{e}, \quad m_\pi = 273{,}2 m_\mathrm{e}, \quad m_\mathrm{n} = 1\,838{,}65 m_\mathrm{e},$$

kde $m_\mathrm{e} = 9{,}11{\cdot}10^{-31}$ kg je hmotnost elektronu. (a) Určete celkovou kinetickou energii částic po rozpadu. (b) Porovnejte hybnosti obou produktů rozpadu (π^- a n). (c) Která z částic získá větší část celkové kinetické energie?

76Ú★. Částice α s kinetickou energií 7,70 MeV narazí do jádra atomu $^{14}_{7}\text{N}$, které je v klidu. Vznikne jádro $^{17}_{8}\text{O}$ a proton. Proton vyletí kolmo k počáteční rychlosti α-částice a má kinetickou energii 4,44 MeV. Hmotnosti jednotlivých částic jsou: α-částice — 4,002 60 u; $^{14}_{7}\text{N}$ — 14,003 07 u; proton — 1,007 825 u a $^{17}_{8}\text{O}$ — 16,999 14 u. (a) Určete kinetickou energii kyslíkového jádra a (b) energii Q uvolněnou při reakci.

77Ú★. α rozpad rádia (Ra) na radon (Rn) probíhá podle rovnice

$$^{226}\text{Ra} \to \alpha + {}^{222}\text{Rn}.$$

Hmotnosti jednotlivých částic jsou: $^{226}_{88}\text{Ra}$ — 226,025 4 u; α-částice — 4,002 6 u; $^{222}_{86}\text{Rn}$ — 222,017 5 u. (a) Určete energii Q uvolněnou při reakci. (b) Jakou hodnotu Q bychom získali, kdybychom při výpočtech zaokrouhlili hmotnosti částic na tři platná místa? Určete kinetickou energii (c) α-částice a (d) jádra radonu. (Pro výpočet částí (c) a (d) je možné použít zaokrouhlených hodnot. Zdůvodněte.)

PRO POČÍTAČ

78Ú. Model rakety má hmotnost 6,00 kg a letí vodorovně směrem k jihu rychlostí $20{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Při výbuchu se náhle rozpadne na dvě části. Rychlost prvního úlomku (hmotnost 2,00 kg) je rovna

$$\boldsymbol{v}_1 = (-12{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{i} + (30{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{j} - (15{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{k},$$

kde jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ směřují po řadě k východu, k severu a svisle vzhůru. (a) Určete hybnost druhého úlomku a zapište ji pomocí jednotkových vektorů. (b) Jakou kinetickou energii má druhý úlomek? (c) Určete přírůstek kinetické energie soustavy při výbuchu.