

13. Rovnováha a pružnost

Témata přednášky - definujeme rovnováhu a určíme podmínky, za kterých je těleso v rovnováze.

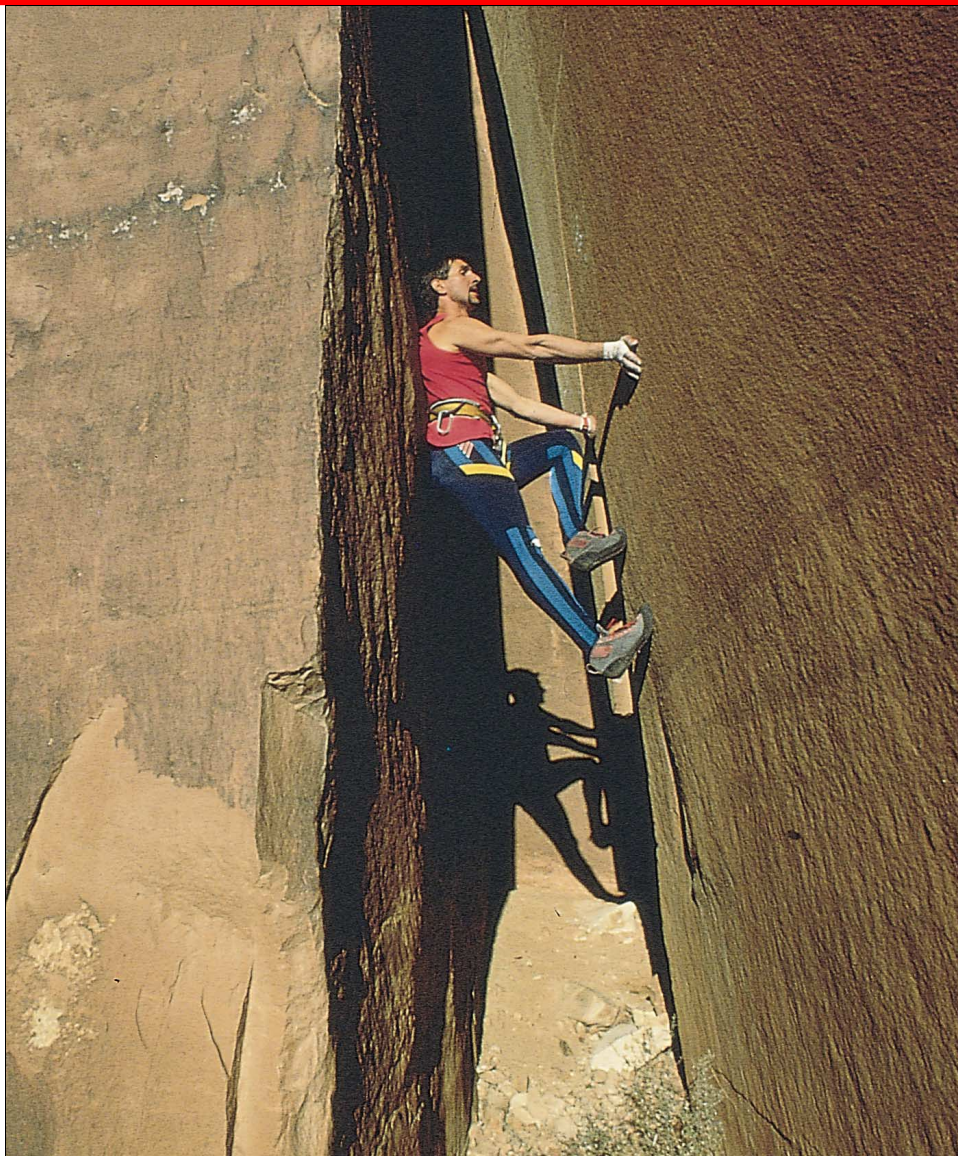
Tyto podmínky pak aplikujeme na různé praktické inženýrské úlohy statické rovnováhy.

Dále prozkoumáme, jak může být „tuhé“ těleso deformováno vnější silou. V této části zavedeme následující pojmy:

napětí a deformace, Youngův modul (v souvislosti s tahem a tlakem), modul smyku (v souvislosti se smykovým namáháním), objemový modul (v souvislosti s hydraulickým tlakem)

13

Rovnováha a pružnost



Horolezectví může být vaší — doslova — poslední praktickou zkouškou z fyziky. Pád může znamenat smrt a i mírné zaváhání může způsobit vážné zranění. Např. lezete-li dlouhým „komínem“, máte ramena zapřena o jednu stěnu široké svíslé pukliny a chodidla o její druhou stěnu. Občas však musíte odpočítat, jinak spadnete vyčerpáním. Otázka zní: Jak se můžete uvolnit, abyste si odpočinuli? Budete-li odpočítat bez uvážení fyzikálních zákonů, stěny vás neudrží. Tedy — jaká je odpověď na tuto otázku života a smrti?

13.1 ROVNOVÁHA

Uvažujme několik těles: (1) kniha ležící na stole, (2) hokejový puk klouzající se zanedbatelným třením po ledě stálou rychlostí, (3) lopatky stropního větráku otáčející se stálou rychlostí a (4) kolo automobilu, jedoucího po rovné cestě stálou rychlostí. Pro každý z těchto případů platí (pozorováno ze Země, kterou v celé kapitole bereme za inerciální systém):

1. Celková hybnost \mathbf{P} tělesa je konstantní.
2. Celkový moment hybnosti \mathbf{L} tělesa je konstantní.

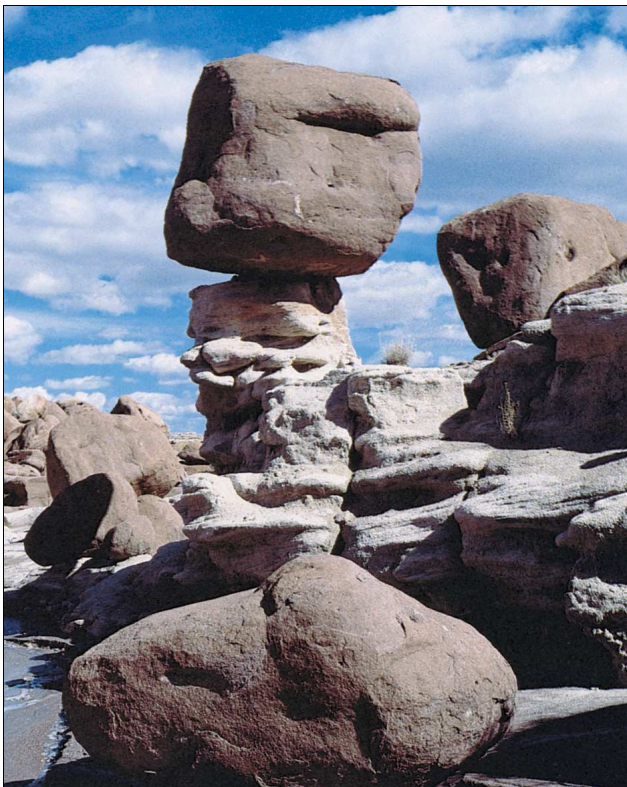
Říkáme, že taková tělesa jsou v rovnováze. Podmínky rovnováhy tedy jsou

$$\mathbf{P} = \text{konst.} \quad \text{a} \quad \mathbf{L} = \text{konst.} \quad (13.1)$$

V této kapitole se zaměříme na případy, kdy v naší inerciální soustavě jsou konstanty v rov. (13.1) nulové. To znamená, že sledovaná tělesa se vůči Zemi žádným způsobem nepohybují — neposouvají ani neotáčejí. Jsou tedy v klidu vůči zvolené inerciální soustavě, ve které je popisujeme; rovnoměrný posuv lze vždy vhodnou volbou inerciální soustavy odstranit, otáčení nikoliv. Taková tělesa jsou ve **statické rovnováze**. Ze čtyř těles uvedených na začátku tohoto odstavce je ve statické rovnováze pouze jedno — kniha ležící na stole.

Nebezpečně vyhlížející kámen — viklan — z obr. 13.1 je též příkladem tělesa, které je ve statické rovnováze —

Obr. 13.1 Viklan u národního parku Zkamenělý les v Arizoně. I když jeho podložka vypadá podezřele, je kámen ve statické rovnováze.

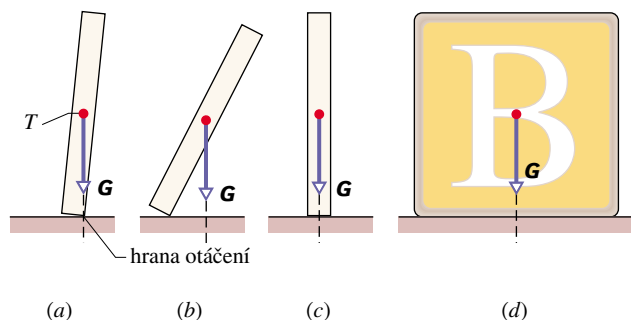


alespoň prozatím. Sdílí tuto vlastnost s nesčetnými dalšími objekty, jakými jsou katedrály, domy, čerpací stanice nebo budky v poli, které zůstávají na místě v průběhu času.

Jestliže se těleso vrátí do své rovnovážné polohy poté, co z ní bylo vychýleno, říkáme (viz čl. 8.5), že je ve **stálé** neboli stabilní rovnováze. Příkladem je kulička na dně důlku. Naopak, jestliže malá síla nevratně vychýlí těleso ze statické rovnovážné polohy, označujeme rovnováhu za **vratkou** neboli labilní. Mírou stability polohy je práce, kterou je nutno vynaložit, aby těleso nevratně změnilo svou polohu za jinou, zpravidla stabilnější. (A pro úplnost připomeňme z čl. 8.5 i rovnováhu **volnou** neboli indiferentní.)

Předpokládejme např., že vychýlíme dominovou kostku tak, jak je naznačeno v obr. 13.2a. Těžiště kostky leží přímo nad hranou, kolem které se kostka může otáčet a o kterou se opírá. Moment \mathbf{M} její tíhové síly \mathbf{G} vůči této hraně je zřejmě nulový, protože přímka, podél které síla \mathbf{G} působí, prochází podpůrnou hranou. Nenutí tedy dominovou kostku konat rotační pohyb a kostka je ve statické rovnováze. Ovšem sebemenší náhodná síla rovnováhu poruší, protože posune **těžnici** (přímku, podél které síla \mathbf{G} působí) mimo podpůrnou hranu (obr. 13.2b) a její moment pak bude otáčet dominovou kostku víc a víc. Statická rovnováha kostky znázorněná na obr. 13.2a je labilní (vratká).

Dominová kostka na obr. 13.2c již není tak nestabilní. Aby se kostka převrátila, musí na ni zapůsobit síla, která ji převalí přes rovnovážnou polohu znázorněnou na obr. 13.2a, kdy těžiště kostky leží přesně nad hranou otáčení. Slabá síla kostku nepřevrátí, ale silnější cvrnknutí prstem již ano. (Sestavíme-li z takto postavených dominových kostek řetězec, cvrnknutí na první kostku může způsobit postupný pád celého řetězce — „dominový efekt“.)



Obr. 13.2 (a) Dominová kostka vyvážená na hraně, těžiště leží přesně nad hranou. Těžnice (přímka, ve které tíhová síla \mathbf{G} na kostku působí) prochází hranou otáčení. (b) Když je dominová kostka vychýlena i nepatrně za rovnovážnou polohu, vytvoří síla \mathbf{G} moment, který zrychleně otáčí kostku dál. (c) Dominová kostka stojící na úzké stěně je o něco stabilnější než kostka v poloze (a). (d) Krychlová kostka je ještě stabilnější.



Obr. 13.3 Dělník balancující nad New Yorkem je ve statické rovnováze, jeho rovnováha ve směru nosníku je však stabilnější než ve směru kolmém na nosník.

Dětská kostka z obr. 13.2d je ještě stabilnější, protože její těžiště je nutno ještě více zdvihnout, aby přešlo přes hranu otáčení. Cvrknutí prstem kostku nepřevrátí. Dělník z obr. 13.3 má vlastnosti jak dominové kostky, tak kostky čtvercového průřezu: podél nosníku je široce rozkročen a jeho postavení je stabilní, příčně na nosníku spočívá úzkou částí chodidel, takže jeho postavení je v tomto směru podstatně méně stabilní (je vydán na milost náhodnému závanu větru).

Analýza statické rovnováhy je velmi důležitá v inženýrské praxi. Konstruktor musí nalézt a určit všechny vnější síly a momenty sil, které mohou působit na navrhované dílo a zaručit vhodným konstrukčním návrhem a volbou materiálů, že jim vytvořené dílo odolá. Taková analýza je nezbytná, aby se např. zajistilo, že se most nezřítí vlivem dopravního ruchu či poryvem větru nebo že podvozek letadla vydrží prudké nárazy při tvrdých přistáních.

13.2 PODMÍNKY ROVNOVÁHY

Posuvný (translační) pohyb tělesa se řídí *větou o hybnosti* neboli *první impulzovou větou*, která vyjadřuje pro těleso totéž, co druhý Newtonův zákon pro hmotný bod. Podle

rov. (9.28) platí

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (13.2)$$

Když je těleso v rovnováze pro posuvný pohyb, tj. když je \mathbf{P} konstantní, pak je $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{0}$ a platí

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha sil}). \quad (13.3)$$

Otáčivý (rotační) pohyb tělesa se řídí *větou o momentu hybnosti* neboli *druhou impulzovou větou*, která vyjadřuje pro otáčení to, co předchází rovnice pro posuvný pohyb. Podle rov. (12.37) platí

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (13.4)$$

Když je těleso v rovnováze pro otáčivý pohyb, tj. když je \mathbf{L} konstantní, pak $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$ a platí

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha momentů sil}). \quad (13.5)$$

Z uvedeného plynou dvě **podmínky rovnováhy** tělesa, kladené na vnější síly:

V rovnováze musí být roven nule

1. vektorový součet všech vnějších sil působících na těleso,
2. vektorový součet všech momentů vnějších sil působících na těleso.

Tyto podmínky platí jak pro *statickou* rovnováhu, tak i pro obecnější případ rovnováhy, kdy \mathbf{P} a \mathbf{L} jsou konstantní, ale ne nulové. (Je dobré připomenout, že každý moment \mathbf{M}_i každé síly \mathbf{F}_i obecně závisí na poloze bodu B , vůči němuž moment počítáme. Je-li však $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, pak $\sum \mathbf{M}_i$ na volbě B nezávisí.)

Rov. (13.3) a (13.5) jakožto vektorové rovnice odpovídají každá třem nezávislým rovnicím pro jednotlivé souřadnice:

Rovnováha sil	Rovnováha momentů sil	
$\sum F_x = 0$	$\sum M_x = 0$	
$\sum F_y = 0$	$\sum M_y = 0$	(13.6)
$\sum F_z = 0$	$\sum M_z = 0$	

Pro jednoduchost jsme v posledních rovnicích vypustili index ext , který v předcházejících rovnicích zdůrazňoval,

že se jedná o vnější (externí) síly a vnější momenty sil působící na těleso.

Problém si zjednodušíme tím, že budeme uvažovat pouze případy, kdy síly působící na těleso leží v rovině xy . To znamená, že momenty sil mohou vyvolávat pouze otáčení kolem osy rovnoběžné s osou z . Tímto předpokladem vyloučíme jednu rovnici pro složky sil a dvě rovnice pro složky momentů sil ze soustavy rovnic (13.6). Zbývají rovnice

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{rovnováha sil}), \quad (13.7)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{rovnováha sil}), \quad (13.8)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (\text{rovnováha momentů sil}). \quad (13.9)$$

Zde F_x a F_y jsou x -ové, resp. y -ové složky vnějších sil působících na těleso a M_z je moment vnějších sil způsobující otáčení tělesa kolem osy z nebo kolem *libovolné* osy s ní rovnoběžné.

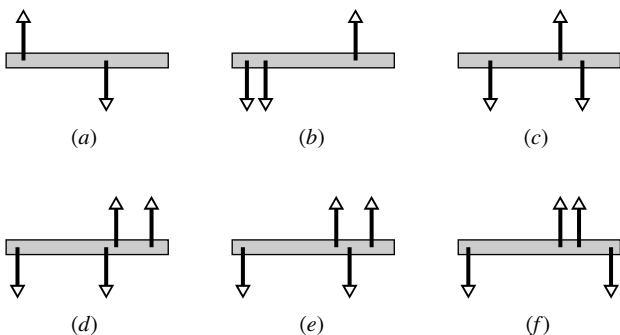
Hokejový puk klouzající stálou rychlostí po ledu splňuje rov. (13.7) až (13.9), a je tedy v rovnováze (dokonce i když rotuje), *ale nikoli ve statické*. Pro dosažení podmínek statické rovnováhy musí být hybnost puku \mathbf{P} dokonce nulová; puk musí na ledu klidně ležet. Tak můžeme vyjádřit další podmínky statické rovnováhy kladené na okamžitý stav tělesa:

Ve statické rovnováze musí být také rovny nule

3. úhrnná hybnost \mathbf{P} tělesa,

4. úhrnný moment hybnosti \mathbf{L} tělesa.

KONTROLA 1: Na obrázku je pohled shora na šest homogenních tyčí, na které kolmo působí různé soustavy dvou a více sil. V kterých případech lze při správně volených nenulových velikostech sil dosáhnout statické rovnováhy?

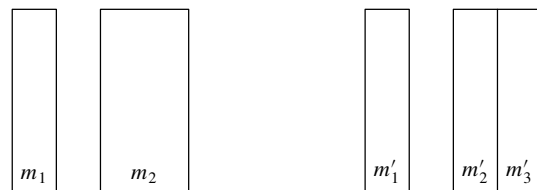


13.3 TĚŽIŠTĚ; STŘED HMOTNOSTI

Nyní rozebereme dva velmi blízké pojmy — střed hmotnosti a těžiště. Ukážeme si, v čem se liší i proč v praxi obvykle splývají. (Termín „těžiště“ je běžný i v hovorové češtině, zatímco „střed hmotnosti“ je výhradně odborný termín. V angličtině je však „center of mass“ obvyklý i v hovorovém stylu.)

Střed hmotnosti

Střed hmotnosti (SH) soustavy neboli **hmotný střed** je jednoznačně určen rozložením hmotnosti v soustavě a fakticky jsme ho již studovali v čl. 9.2. SH jediné částice splývá s její polohou: $\mathbf{r}_{\text{SH}} = \mathbf{r}_1$. SH soustavy dvou *stejných* částic leží uprostřed mezi nimi: $\mathbf{r}_{\text{SH}} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$. Analogicky je tomu u soustavy N stejných částic: $\mathbf{r}_{\text{SH}} = \sum_i \mathbf{r}_i / N$, což můžeme zapsat i jako $\mathbf{r}_{\text{SH}} = \sum_i \mathbf{r}_i / \sum_i 1$. Jedničky, které sčítáme ve jmenovateli, nám ukazují, že všechny částice bereme se stejnou vahou.



K odvození středu hmotnosti

A co když mají částice různé hmotnosti? Představme si nejprve soustavu dvou částic, kde druhá je dvakrát těžší než první: $m_2 = 2m_1$. S takovou soustavou je zřejmě ekvivalentní soustava tří stejných částic, kde $m'_1 = m'_2 = m'_3 = m_1$ a $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}_2$ podle obrázku. Snadno tedy najdeme její střed hmotnosti:

$$\mathbf{r}_{\text{SH}} = \frac{\sum_i \mathbf{r}'_i}{\sum_i 1} = \frac{\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_3}{1 + 1 + 1}.$$

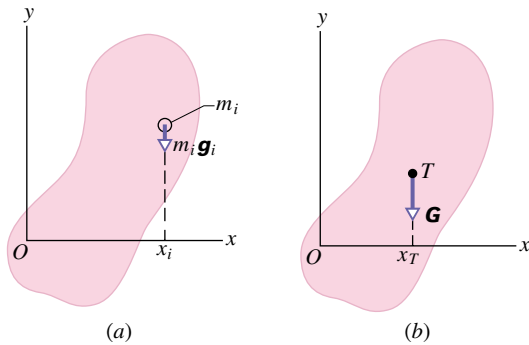
To můžeme zapsat sugestivněji:

$$\mathbf{r}_{\text{SH}} = \frac{m'_1 \mathbf{r}'_1 + 2\mathbf{r}'_2}{m'_1 + 2} = \frac{m'_1 \mathbf{r}'_1 + 2m'_1 \mathbf{r}'_2}{m'_1 + 2m'_1} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Tento vzorec lze snadno zobecnit na N různých částic:

$$\mathbf{r}_{\text{SH}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (13.10)$$

kde $m = \sum_i m_i$ značí celkovou hmotnost soustavy. Dostali jsme též vzorec, který jsme používali v rov. (9.8) pro těžiště. Nepoužili jsme přitom žádné jiné veličiny než vnitřní parametry N , m_i , m , \mathbf{r}_i soustavy.



Obr. 13.4 (a) Na element tělesa o hmotnosti m_i působí tíhová síla $m_i \mathbf{g}_i$ a vytváří vůči počátku O soustavy souřadnic moment s ramenem rovným souřadnici x_i . (b) Výsledná tíhová síla \mathbf{G} působí v těžišti T tělesa. Její rameno vzhledem k počátku O je rovno x_T .

Těžiště

Uvažujme nyní tuhé těleso (tj. soustavu částic, které mají navzájem neproměnné vzdálenosti) nacházející se ve vnějším silovém poli $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Na jeho i -tou částici působí tedy síla $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_i$. Příkladem může být nepravidelný kámen v tíhovém poli Země. Chceme nyní nahradit silové působení na jednotlivé částice tělesa jedinou silou \mathbf{G} působící v jistém bodě — **těžišti** T . Nahrazení znamená, že kdybychom mohli vypnout působení tíhového pole na jednotlivé částice tělesa a místo něj zapnuli tíhovou sílu v těžišti, celkové silové a momentové působení na těleso by se nezměnilo.

Doposud jsme tvrdili, že tíhová síla \mathbf{G} působí ve středu hmotnosti (SH) tělesa, že tedy těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa. Ukážeme nyní, že toto tvrzení je správné, když tíhové zrychlení \mathbf{g} je v celém tělese konstantní.

Obr. 13.4a ukazuje těleso hmotnosti m s vyznačenou i -tou částicí hmotnosti m_i . Na každou takovou částici působí tíhová síla $m_i \mathbf{g}_i$, kde \mathbf{g}_i je tíhové zrychlení v místě, kde se částice nachází. Každá tíhová síla $m_i \mathbf{g}_i$ vytváří vůči ose, která prochází počátkem O soustavy souřadnic kolmo k obrázku, moment síly \mathbf{M}_i , který dle rov. (11.32) má velikost

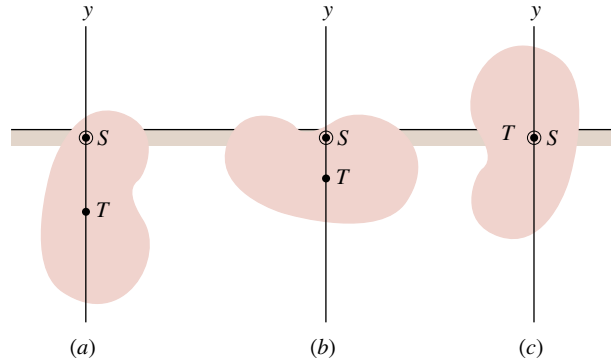
$$M_i = x_i m_i g_i,$$

kde x_i je rameno r_{\perp} síly $m_i \mathbf{g}_i$. Velikost výsledného momentu M_v od všech částic je pak

$$M_v = \sum M_i = \sum x_i m_i g_i. \quad (13.11)$$

Obr. 13.4b ukazuje tíhovou sílu \mathbf{G} působící v těžišti T tělesa. Dle rov. (11.32) velikost momentu síly vyvolaného silou \mathbf{G} vůči ose procházející počátkem je

$$M = x_T G, \quad (13.12)$$



Obr. 13.5 Těleso volně otočné kolem podpěrného bodu S se bude otáčet tak dlouho, dokud těžiště nezaujme polohu svisle pod bodem S , jako je tomu v případech (a) a (b). Výjimkou je jenom případ (c), kdy bod S leží právě v těžišti.

kde x_T je rameno síly \mathbf{G} . Síla \mathbf{G} je rovna součtu tíhových sil $m_i \mathbf{g}_i$ působících na jeho elementy. Když nyní do rov. (13.12) dosadíme $\sum m_i \mathbf{g}_i$ za \mathbf{G} , můžeme psát

$$M = x_T \sum m_i g_i. \quad (13.13)$$

Těžiště jsme zavedli jako bod, vůči němuž je moment \mathbf{M} výsledné tíhové síly \mathbf{G} stejný jako součet \mathbf{M}_v všech momentů \mathbf{M}_i sil \mathbf{G}_i působících na částice tělesa. Je tedy M z rov. (13.13) stejně jako M_v z rov. (13.11) a můžeme psát

$$x_T \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \quad (13.14)$$

Je-li tedy \mathbf{g} konstantní, jsou všechna g_i stejná, můžeme je ze součtů na obou stranách rov. (13.14) vytknout a pak zkrátit. Dosadíme-li ještě na levé straně rov. (13.14) za $\sum m_i$ úhrnnou hmotnost tělesa m a touto hmotností vydělíme pravou stranu rovnice, dostaneme

$$x_T = \frac{1}{m} \sum x_i m_i. \quad (13.15)$$

Porovnáním s rov. (13.10) vidíme, že pravá strana (13.15) dává souřadnici x_{SH} středu hmotnosti. Můžeme tedy napsat

$$x_{SH} = x_T. \quad (13.16)$$

Střed hmotnosti tělesa a jeho těžiště mají stejnou souřadnici x .

Tento výsledek můžeme rozšířit na všechny tři souřadnice použitím vektorového vyjádření momentů sil. Výsledek zní: Těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa, jestliže tíhové zrychlení je stejné ve všech bodech tělesa.

Jednoslovné a stručné označení „těžiště“, umožňující pohodlné odvození typu „těžišťový vztažný systém“, se

proto běžně používá též jako synonymum pro delší a dvojslovný termín „střed hmotnosti“. (V této knize tak činíme všude.)

Z rov. (13.12) plyne, že moment síly vyvolaný tíhovou silou tělesa je nulový pouze tehdy, když rameno síly x_T je nulové. Je-li těleso podepřeno v nějakém bodu S , kolem kterého se může otáčet, otáčí se (vlivem momentu síly $M = x_T G$ vzhledem k S) tak dlouho, dokud rameno síly x_T není nulové. Těžiště tělesa pak leží svisle pod bodem podepření, jak je naznačeno na obr. 13.5a, b, a těleso je ve stálé rovnováze. Když je těleso podepřeno v těžišti jako na obr. 13.5c, potom pro jakékoli natočení tělesa je x_T nulové a těleso je v *rovnováze volné*.

„Těžiště“ v nehomogenním poli

Co se změní, když silové pole $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ není homogenní? I v takovém případě bychom mohli — při každé konkrétní poloze tělesa v poli — zavést „tíhovou sílu“ a „těžiště“ tak, aby tato tíhová síla byla součtem dílčích sil a celkový moment dílčích sil by byl roven nule. Přesněji řečeno, našli bychom takto těžnici, tj. přímku (se směrem daným výslednou silou), na níž by leželo těžiště. Problém je v tom, že pro různé polohy tělesa se těžnice v nehomogenním poli nemusejí protínat, a v tělese tedy neexistuje těžiště jakožto *univerzální* bod, do něhož bychom mohli pro zjednodušení „stáhnout“ veškerou hmotu tělesa. Pro každou konkrétní polohu tělesa je vždy nutno určit znovu jak výslednou tíhovou sílu, tak i její působíště („těžiště“).

Není pravděpodobné, že bychom kdy vyšetřovali v tíhovém poli zemském těleso tak rozlehlé, abychom museli započítat nehomogenitu tíhového pole. Nebudeme také asi nikdy měřit natolik přesně, abychom museli zahrnout nehomogenost tíhového pole v rámci běžných předmětů.

Je třeba si uvědomit, že např. *odstředivá síla*, kterou uplatníme při zkoumání v otáčejícím se systému, roste se vzdáleností od osy otáčení: $F = m\omega^2 r$, a pole odstředivé síly je tedy výrazně nehomogenní.

V nehomogenním poli, a tedy i při studiu kývání či otáčení *nemůžeme* tuhé těleso nahradit hmotným bodem v jeho středu hmotnosti.

13.4 PŘÍKLADY STATICKÉ ROVNOVÁHY

V tomto odstavci budeme řešit šest příkladů na statickou rovnováhu. V každém vybereme systém o jednom či více objektech, na které aplikujeme rovnice rovnováhy



Michel Menin kráčí po laně napjatém ve výši 3 150 m nad francouzskou zemědělskou krajinou. Svou polohu stabilizuje těžkou ohnutou tyčí, která snižuje těžiště systému Menin + tyč do blízkosti lana, a umožní mu tak čelit závanům větru.

(rov. (13.7) až (13.9)). Ve všech příkladech budeme uvažovat jen síly působící v rovině xy , které vůči počátku soustavy souřadnic vytvářejí moment síly mířící ve směru osy z . Ve smyslu rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů vybereme osu rovnoběžnou s osou z , vůči které budeme počítat momenty sil. I když je rov. (13.9) splněna pro jakoukoliv volbu takové osy, ukážeme si, že vhodnou volbou osy můžeme vyloučit jednu či více neznámých sil, čímž se použití rov. (13.9) zjednoduší.

PŘÍKLAD 13.1

Homogenní nosník délky d a hmotnosti $m_n = 1,8$ kg spočívá svými konci na dvou digitálních siloměrech, jak je naznačeno v obr. 13.6a. Homogenní kvádr hmotnosti $m_k = 2,7$ kg leží na nosníku, přičemž jeho střed leží ve vzdálenosti $\frac{1}{4}d$ od levého konce nosníku. Jaké síly ukáží siloměry?

Náš systém bude tvořit nosník a kvádr. Obr. 13.6b je diagram systému, který uvažujeme jako volný, s vyznačením všech sil na něj působících. Siloměry podírají levý a pravý konec nosníku silami \mathbf{F}_l a \mathbf{F}_p . Velikosti těchto sil odečteme na siloměrech. Na nosník působí tíhová síla $m_n \mathbf{g}$ svisle dolů v jeho středu. Podobně na kvádr působí tíhová síla $m_k \mathbf{g}$ svisle dolů v jeho středu. V diagramu na obr. 13.6b je kvádr reprezentován pouze tečkou uvnitř schématu nosníku a vektor $m_k \mathbf{g}$ je znázorněn jako vycházející z této tečky. (Při překreslování obr. 13.6a do obr. 13.6b je vektor $m_k \mathbf{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly $m_k \mathbf{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.)

Náš systém je ve statické rovnováze, takže musí být splněny jak rovnice rovnováhy sil rov. (13.7) a (13.8), tak i rov-

nice rovnováhy momentů sil (13.9). Zadaný příklad budeme řešit dvojným způsobem.

PRVNÍ ŘEŠENÍ: Síly nemají žádné x -ové složky, takže rov. (13.7) $\sum F_x = 0$ je splněna automaticky, aniž poskytne nějaké informace. Rov. (13.8) dá pro velikosti y -ových složek sil podmínku

$$\sum F_y = F_1 + F_p - m_n g - m_k g = 0. \quad (13.17)$$

V rovnici vystupují dvě neznámé síly (F_1 a F_p), ale nemůžeme je obě určit z této jediné rovnice. Máme však po ruce ještě jednu rovnici, totiž rov. (13.9), která vyjadřuje rovnováhu momentů sil.

Momenty sil v rov. (13.9) můžeme vyjádřit vůči libovolné ose kolmé k rovině obr. 13.6. Zvolíme osu procházející levým koncem nosníku. Za kladné budeme pokládat ty momenty sil, které — působí-li samostatně — vyvolají kolem zvolené osy otáčení proti směru hodinových ručiček. Z rov. (13.9) potom plyne

$$\sum M_z = (F_1)(0) - (m_k g)\left(\frac{1}{4}d\right) - (m_n g)\left(\frac{1}{2}d\right) + (F_p)(d) = 0,$$

odkud

$$\begin{aligned} F_p &= \left(\frac{1}{4}g\right)(2m_n + m_k) = \\ &= \frac{1}{4}(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2 \cdot 1,8 \text{ kg} + 2,7 \text{ kg}) = \\ &= 15 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned} \quad (13.18)$$

Všimněte si: tím, že jsme zvolili osu procházející působiš-
tém jedné z neznámých sil (F_1), jsme tuto sílu vyloučili z rov. (13.9), a tím umožnili přímo z ní vypočítat druhou z neznámých sil. *Vhodná volba osy zjednoduší řešení problému.*

Neznámou sílu F_1 pak určíme z rov. (13.17), když do ní dosadíme již známé hodnoty:

$$\begin{aligned} F_1 &= (m_k + m_n)g - F_p = \\ &= (2,7 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) - (15 \text{ N}) = \\ &= 29 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

DRUHÉ ŘEŠENÍ: Pro kontrolu vyřešíme příklad ještě pro jinou volbu osy. Když jsme zvolili osu procházející levým koncem nosníku, dostali jsme rov. (13.18) a velikost síly $F_p = 15 \text{ N}$.

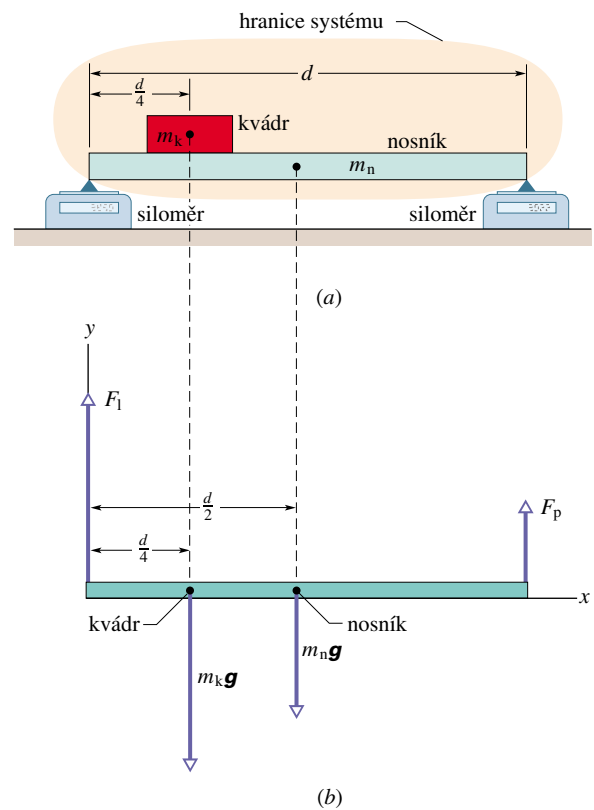
Pro osu procházející pravým koncem nosníku rov. (13.9) dává

$$\sum M_z = -(F_1)(d) + (m_k g)\left(\frac{3}{4}d\right) + (m_n g)\left(\frac{1}{2}d\right) + (F_p)(0) = 0.$$

Když tuto rovnici řešíme pro F_1 , dostaneme

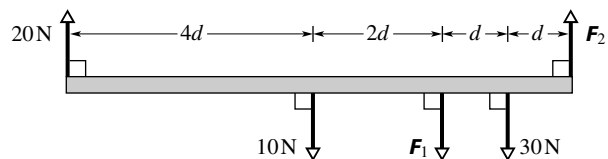
$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{1}{4}g\right)(2m_n + 3m_k) = \\ &= \frac{1}{4}(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2 \cdot 1,8 \text{ kg} + 3 \cdot 2,7 \text{ kg}) = \\ &= 29 \text{ N}, \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

což je ve shodě s naším předcházejícím výsledkem. Všimněte si ještě, že délka nosníku nevystupuje v poslední rovnici přímo, ale jen prostřednictvím toho, jak ovlivňuje hmotnost nosníku. Všimněte si také, že podmínku rovnováhy sil nepotřebujeme, když podmínku rovnováhy momentů sil užijeme pro dvě různé osy.



Obr. 13.6 Příklad 13.1. (a) Nosník hmotnosti m_n nese kvádr o hmotnosti m_k . Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému, který uvažujeme jako volný, ukazuje síly působící na systém nosník + kvádr.

KONTROLA 2: Na obrázku je pohled shora na homogenní tyč, která je ve statické rovnováze. (a) Můžete najít velikosti neznámých sil F_1 a F_2 pouze z podmínky rovnováhy sil? (b) Chcete-li určit velikost síly F_2 použitím jediné rovnice, kam musíte umístit osu otáčení? (c) Ukáže se, že velikost síly F_2 je 65 N. Jaká je pak velikost síly F_1 ?



PŘÍKLAD 13.2

Kuželkář drží v ruce kouli o hmotnosti $m_k = 7,2 \text{ kg}$. Jak ukazuje obr. 13.7a, vrchní část jeho ruky (paže) je ve svislé, spodní část (předloktí) ve vodorovné poloze. Jakou silou v tomto případě musí působit biceps a jeho úpony na předloktí? Předloktí má hmotnost $m = 1,8 \text{ kg}$; předpokládané rozměry jsou vyznačeny na obr. 13.7a.

ŘEŠENÍ: Naším systémem je předloktí spolu s koulí. Na obr. 13.7b je znázorněn silový diagram systému. (Koule je znázorněna tečkou uvnitř hranic schématu předloktí; tíhová síla $m_k \mathbf{g}$ má své působíště umístěno do této tečky. Při překreslování obr. 13.7a do diagramu na obr. 13.7b byl vektor $m_k \mathbf{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly $m_k \mathbf{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Neznámé síly jsou síla \mathbf{T} , kterou působí biceps, a síla \mathbf{F} , kterou působí kost paže v loketním kloubu na kost předloktí. Všechny síly působí svisle.

Z rov. (13.8), která říká $\sum F_y = 0$, dostáváme

$$\sum F_y = T - F - mg - m_k g = 0. \quad (13.19)$$

Užijeme momentovou rovnici (13.9). Proložíme osu otáčení loketním kloubem (bod O) kolmo k rovině obrázku, momenty sil vyvolávající rotaci proti směru otáčení hodinových ručiček budeme pokládat za kladné a dostaneme

$$\sum M_z = (F)(0) + (T)(d) - (mg)(D) - (m_k g)(a) = 0. \quad (13.20)$$

Volbou osy procházející bodem O jsme vyloučili neznámou F z rov. (13.20). Z rovnice vypočítáme T :

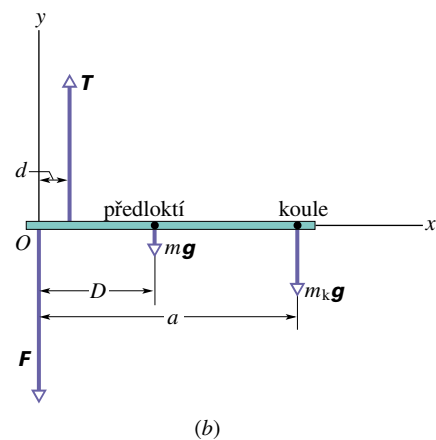
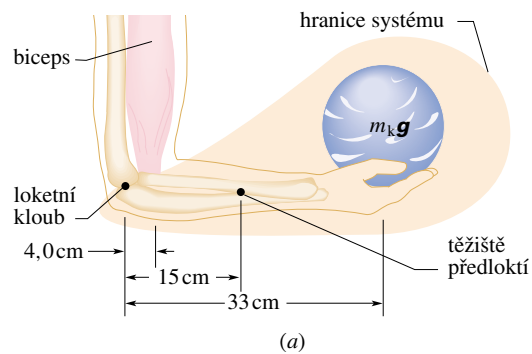
$$\begin{aligned} T &= g \frac{mD + m_k a}{d} = \\ &= (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) \frac{(1,8 \text{ kg})(15 \text{ cm}) + (7,2 \text{ kg})(33 \text{ cm})}{(4,0 \text{ cm})} = \\ &= 648 \text{ N} \doteq 650 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Biceps musí držet předloktí silou, která je přibližně devětkrát větší než tíha koule; držet těžkou kouli způsobem znázorněným na obr. 13.7a je obtížné.

Z rov. (13.19) po dosazení již známých hodnot dostaneme pro F vyjádření

$$\begin{aligned} F &= T - g(m_k + m) = \\ &= (648 \text{ N}) - (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(7,2 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg}) = \\ &= 560 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Síla F je přibližně osmkrát větší než tíha koule.

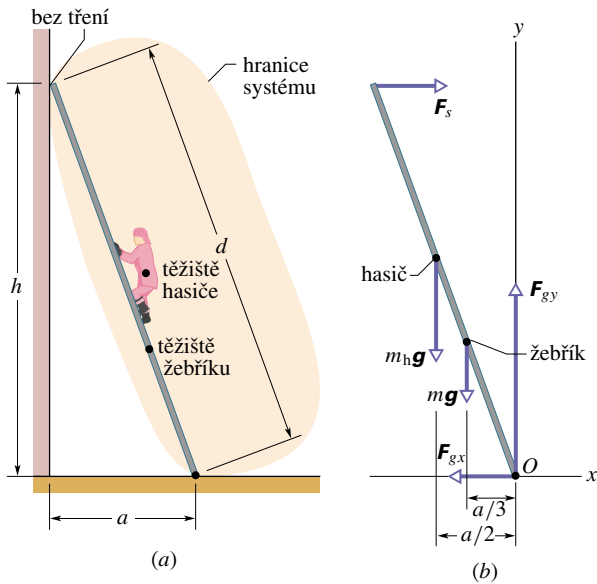


Obr. 13.7 Příklad 13.2 (a) Ruka drží kuželkovou kouli. Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému předloktí + koule ukazuje působící síly, když pokládáme systém za volný. Vektory nejsou znázorněny ve stejném měřítku; síla \mathbf{T} přenášena bicipsem a síla \mathbf{F} působící na loketní kloub jsou mnohonásobně větší než ostatní síly.

PŘÍKLAD 13.3

Žebřík o délce $d = 12 \text{ m}$ a hmotnosti $m = 45 \text{ kg}$ je opřen o stěnu ve výšce $h = 9,3 \text{ m}$, jak je naznačeno na obr. 13.8a. Těžiště žebříku je v jedné třetině jeho výšky. Hasič o hmotnosti $m_h = 72 \text{ kg}$ vyšplhá po žebříku tak vysoko, že jeho těžiště leží v polovině výšky žebříku. Předpokládejte, že tření mezi žebříkem a stěnou je zanedbatelné a opření žebříku o podlahu je pevné. Jaké síly působí na žebřík od stěny a od podlahy?

ŘEŠENÍ: Na obr. 13.8b je znázorněn diagram systému hasič + žebřík, když jej pokládáme za volný. (Hasič je znázorněn tečkou uvnitř hranic schématu žebříku; vektor tíhové síly $m_h \mathbf{g}$ má počátek v místě tečky. Při překreslování obr. 13.8a do obr. 13.8b byl vektor $m_h \mathbf{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Posunutí nezmění ani velikost síly $m_h \mathbf{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Stěna působí na žebřík vodorovnou silou \mathbf{F}_s . Síla nemůže mít žádnou svislou složku, protože předpokládáme, že mezi stěnou a žebříkem nevzniká tření. Podlaha působí na žeb-



Obr. 13.8 Příklady 13.3 a 13.4. (a) Hasič vyšplhá do poloviny výšky žebříku, který je opřen o hladkou stěnu (mezi žebříkem a stěnou nepůsobí tření). Tření mezi podlahou a žebříkem zabrání podklouznutí žebříku. (b) Silový diagram systému, který pokládáme za volný, ukazuje síly působící na systém hasič + žebřík. Počátek O soustavy souřadnic je volen v místě, kde působí neznámá síla \mathbf{F}_g (její složky \mathbf{F}_{gx} a \mathbf{F}_{gy} jsou v diagramu vyznačeny). Taková volba usnadní nalezení další neznámé síly \mathbf{F}_s .

řík silou \mathbf{F}_g , která má vodorovnou složku F_{gx} (vzhledem k pevnému opření — dostatečně velké tření mezi podlahou a žebříkem nebo zapíchnutí žebříku do země) a svislou složku F_{gy} (obvyklá normálová síla). Jak je ukázáno v diagramu, zvolíme soustavu souřadnic s počátkem O v místě, kde je žebřík opřen o podlahu. Vzdálenost a od stěny k patě žebříku vypočteme jako odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku:

$$a = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (9,3 \text{ m})^2} = 7,58 \text{ m}.$$

Z rovnic rovnováhy složek sil (13.7) a (13.8) dostaneme pro náš systém rovnice

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0 \quad (13.21)$$

a

$$\sum F_y = F_{gy} - m_h g - m g = 0. \quad (13.22)$$

Rov. (13.22) dává

$$F_{gy} = g(m_h + m) = (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg}) = 1146,6 \text{ N} \doteq 1100 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Pro výpočet rovnováhy momentů sil zvolíme osu procházející počátkem O kolmo na rovinu obrázku. Ramena sil \mathbf{F}_s , $m_h \mathbf{g}$, $m \mathbf{g}$, \mathbf{F}_{gx} a \mathbf{F}_{gy} vůči zvolené ose jsou postupně h , $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, 0 a 0 . Nulová ramena sil \mathbf{F}_{gx} a \mathbf{F}_{gy} způsobí, že tyto síly mají nulový

moment vůči zvolené ose. Z rovnice rovnováhy momentů sil (13.9) potom plyne

$$\sum M_z = -(F_s)h + (m_h g)(\frac{1}{2}a) + (m g)(\frac{1}{3}a) = 0. \quad (13.23)$$

Řešením rov. (13.23) dostaneme pro F_s vyjádření

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{ga(\frac{1}{2}m_h + \frac{1}{3}m)}{h} = \\ &= \frac{(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(7,58 \text{ m})(36 \text{ kg} + 15 \text{ kg})}{(9,3 \text{ m})} = \\ &= 407 \text{ N} \doteq 410 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Z rov. (13.21) potom ještě dostaneme

$$F_{gx} = F_s = 410 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

PŘÍKLAD 13.4

Nechť v př. 13.3 má statický činitel tření f_s mezi žebříkem a podlahou hodnotu $0,53$. Na jakou část $0 \leq q \leq 1$ žebříku může hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat?

ŘEŠENÍ: Síly mají stejná označení jako na obr. 13.8. Nechť qd je délka, kam může po žebříku hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat (jeho vodorovná vzdálenost od počátku O je pak qa). V okamžiku podklouznutí je splněna rovnice

$$F_{gx} = f_s F_{gy}, \quad (13.24)$$

ve které je F_{gx} statická síla tření (obvykle značená F_s) a F_{gy} je normálová síla (obvykle značená N).

Použijeme-li rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů a volíme-li osu procházející počátkem O , dostaneme v okamžiku podklouznutí rovnici

$$\sum M_z = -(F_s)(h) + (m_h g)(qa) + (m g)(\frac{1}{3}a) = 0,$$

odkud

$$F_s = \frac{ga}{h}(\frac{1}{3}m + m_h q). \quad (13.25)$$

Rovnice ukazuje toto: jak hasič stoupá po žebříku, tj. jak roste q , tak musí vzrůstat i síla F_s , kterou působí stěna na žebřík, aby byla dosažena rovnováha. Abychom našli hledanou hodnotu q v okamžiku podklouznutí, musíme nejprve nalézt, jaká bude v tomto okamžiku síla F_s .

Rov. (13.7) pro rovnováhu x -ových složek sil dává

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0.$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rov. (13.24), dostaneme, že v okamžiku podklouznutí

$$F_s = F_{gx} = f_s F_{gy}. \quad (13.26)$$

Z rov. (13.8) pro rovnováhu y-ových složek sil dostáváme

$$\sum F_y = F_{gy} - m_h g - mg = 0,$$

odkud

$$F_{gy} = (m_h + m)g. \quad (13.27)$$

Porovnáme-li rovnice (13.26) a (13.27), dostaneme

$$F_s = f_s g (m_h + m). \quad (13.28)$$

Jestliže nakonec porovnáme rov. (13.25) a (13.28) a řešíme je pro q , dostaneme

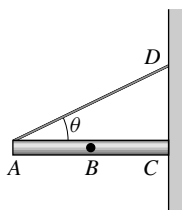
$$\begin{aligned} q &= \frac{f_s h (m_h + m)}{a m_h} - \frac{m}{3m_h} = \quad (13.29) \\ &= \frac{(0,53)(9,3 \text{ m})}{(7,6 \text{ m})} \frac{(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})}{(72 \text{ kg})} - \frac{(45 \text{ kg})}{3(72 \text{ kg})} = \\ &= 0,85. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Hasič může vylézt do 85 % délky žebříku, než začne žebřík podklouzávat.

Z rov. (13.29) můžete dále vyčíst, že hasič může vylézt až na konec žebříku (tomu odpovídá $q = 1$), aniž žebřík podklouzne, pokud činitel tření $f_s > 0,61$. Na druhé straně žebřík podklouzne už vlastní vahou ($q = 0$), když činitel tření $f_s < 0,11$.

Příklad lze vyřešit jednodušeji, zvolíme-li za počátek souřadnic místo dotyku žebříku o stěnu.

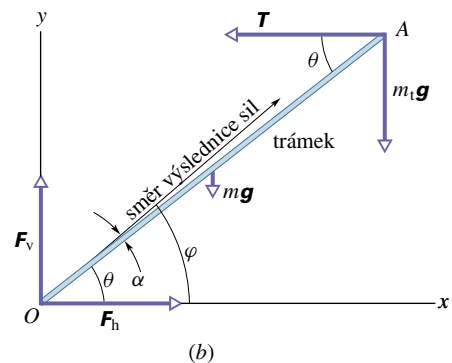
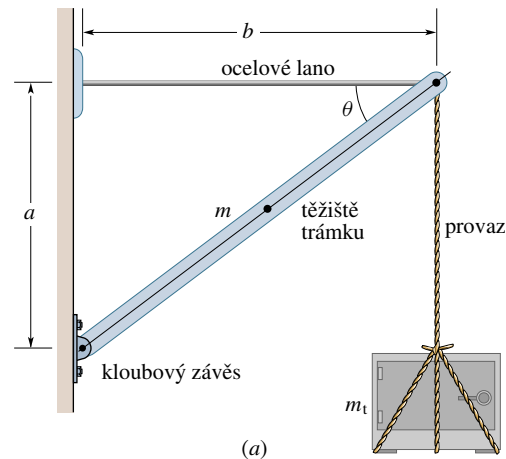
KONTROLA 3: Tyč AC o hmotnosti 5 kg, znázorněná na připojeném obrázku, je držena v klidu jednak silou \mathbf{T} přenášenou přes provaz AD , jednak silou tření mezi stěnou a tyčí. Homogenní tyč je dlouhá 1 m a úhel, který svírá provaz s tyčí, činí $\theta = 30^\circ$. (a) Do kterého z označených bodů musíte umístit osu, vůči níž budete počítat momenty sil, máte-li jedinou rovnici najít sílu \mathbf{T} , kterou na tyč působí provaz? S takto zvolenou osou určete, jaká znaménka budou mít (b) moment síly M_t , způsobený tíhou tyče, a (c) moment síly M_p , kterým na tyč působí provaz, když budete pokládat momenty sil působící proti směru otáčení hodinových ručiček za kladné. (d) Je M_p větší, menší, nebo stejně velké jako M_t ?



PŘÍKLAD 13.5

Obr. 13.9a zobrazuje trezor o hmotnosti $m_t = 430 \text{ kg}$, který je provazem přivázan k nosníku s rozměry $a = 1,9 \text{ m}$ a $b = 2,5 \text{ m}$. Homogenní trámek nosníku má hmotnost $m = 85 \text{ kg}$, hmotnost vodorovného lana je zanedbatelná.

(a) Jak velkou silou \mathbf{T} je napínáno lano?



Obr. 13.9 Příklad 13.5. (a) Trezor je zavěšen na nosníku, který sestává z homogenního šikmého trámku a vodorovného ocelového lana. (b) Silový diagram trámku uvažovaného jako volné těleso. Všimněte si, že výslednice sil \mathbf{F}_v a \mathbf{F}_h nemíří přesně ve směru osy trámku.

ŘEŠENÍ: Na obr. 13.9b je silový diagram trámku, který pokládáme za náš systém. Na trámek působí v jeho těžišti tíhová síla $m\mathbf{g}$, v bodě A síla \mathbf{T} od lana a síla $m_t\mathbf{g}$ od provazu (tíha trezoru), a konečně v kloubovém závěsu O síla \mathbf{F} od stěny s horizontální složkou \mathbf{F}_h a vertikální \mathbf{F}_v .

Použijme rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů sil, přičemž osu otáčení necháme procházet kloubovým závěsem (bod O) kolmo k rovině obrázku. Když pokládáme za kladné ty momenty sil, které vyvolávají rotaci působící proti směru otáčení hodinových ručiček, dostáváme

$$\sum M_z = (T)(a) - (m_t g)(b) - (mg)\left(\frac{1}{2}b\right) = 0.$$

Chytrou volbou osy jsme z rovnice vyloučili neznámé síly F_h a F_v (nevytváří totiž žádný moment síly vůči zvolené ose) a zbyla nám jen jediná neznámá síla T . Tu z rovnice vypočteme:

$$\begin{aligned} T &= \frac{gb(m_t + \frac{1}{2}m)}{a} = \\ &= \frac{(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2,5 \text{ m})(430 \text{ kg} + 42,5 \text{ kg})}{(1,9 \text{ m})} = \\ &= 6090 \text{ N} \doteq 6100 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(b) Najděte složky F_h a F_v síly, která na trámek působí přes kloubový závěs.

ŘEŠENÍ: Použijeme rovnice rovnováhy sil. Z rov. (13.7) dostaneme

$$\sum F_x = F_h - T = 0,$$

a tedy

$$F_h = T = 6090 \text{ N} \doteq 6100 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Z rov. (13.8) dostaneme

$$\sum F_y = F_v - mg - m_t g = 0,$$

a tedy

$$\begin{aligned} F_v &= g(m + m_t) = (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(85 \text{ kg} + 430 \text{ kg}) = \\ &= 5047 \text{ N} \doteq 5000 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(c) Jakou silou působí kloubový závěs na trámek?

ŘEŠENÍ: Z obrázku vidíme, že

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \\ &= \sqrt{(6090 \text{ N})^2 + (5047 \text{ N})^2} \doteq 7900 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Všimněte si, že síla F je podstatně větší než společná tíha trezoru a trámku (5000 N) i než napětí ve vodorovném lanu (6100 N).

(d) Jaký je úhel α mezi osou trámku a směrem působení výsledné síly F , která působí od kloubového závěsu na trámek?

ŘEŠENÍ: Z obrázku vidíme, že

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{a}{b} = \frac{(1,9 \text{ m})}{(2,5 \text{ m})} = 0,760, \quad \text{tedy } \theta = 37,2^\circ, \\ \text{tg } \varphi &= \frac{F_v}{F_h} = \frac{(5047 \text{ N})}{(6090 \text{ N})} = 0,829, \quad \text{tedy } \varphi = 39,6^\circ, \end{aligned}$$

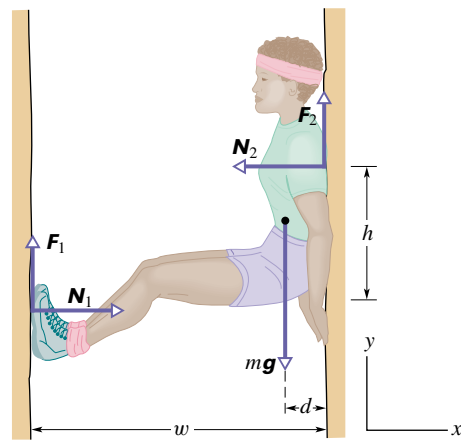
a tedy

$$\alpha = \varphi - \theta = 39,6^\circ - 37,2^\circ = 2,4^\circ. \quad (\text{Odpověď})$$

Kdyby tíha trámku byla tak malá, že by se dala zanedbat, úhel α by se rovnal nule. Síla od kloubového závěsu by pak působila přesně ve směru osy trámku.

PŘÍKLAD 13.6

Na obr. 13.10 je zobrazena horolezkyně o hmotnosti $m = 55 \text{ kg}$, která odpočívá při lezení „komínem“. Má zapřena ramena a nohy ve spáře, jejíž šířka $w = 1,0 \text{ m}$. Její těžiště je ve vzdálenosti $d = 0,2 \text{ m}$ od stěny, na které má zapřena ramena. Činitel statického tření mezi botami a stěnou $f_1 = 1,1$ a mezi rameny a stěnou $f_2 = 0,70$.



Obr. 13.10 Příklad 13.6. Na obrázku jsou znázorněny síly, které působí na horolezkyni odpočívající při lezení skalním komínem. Síla, kterou horolezkyně působí na stěny komínu, vede ke zvýšení normálových sil N_1 , N_2 (obě jsou stejně velké), a tím i třecích sil F_1 a F_2 .

(a) Jakou minimální silou musí horolezkyně působit na stěny, aby nespadla?

ŘEŠENÍ: Horizontální síly působící na ramena (N_2) i boty (N_1) mají stejnou velikost N , ale opačnou orientaci. Proto je výsledná horizontální síla nulová a rov. (13.7), tj. $\sum F_x = 0$, je splněna.

Tíhová síla působí na horolezkyni svisle dolů. Proti ní působí třecí síly F_1 na chodidla a F_2 na ramena. Dokud je síla působící na stěny dostatečně velká, ustaví se automaticky rovnováha a je splněna rov. (13.8) ($\sum F_y = 0$), která dává

$$F_1 + F_2 = mg. \quad (13.30)$$

Předpokládejme, že zpočátku horolezkyně tlačí na stěny velmi silně a potom tlak uvolňuje. Jak uvolňuje tlak, klesá velikost normálové síly N , a spolu s ní klesají i hodnoty součinů $f_1 N$ a $f_2 N$, které limitují velikosti automatického nastavení rovnováhy třecích sil působících na ramena a chodidla horolezkyně a její tíhy (viz rov. (6.1)).

Když velikost síly N klesne na hodnotu, kdy součin $f_1 N$ je právě roven třecí síle F_1 působící na chodidla horolezkyně

a součin $f_2 N$ třecí síle F_2 působící na její ramena, je horolezkyňě na pokraji podklouznutí na obou místech. Kdyby ještě dále snížila tlak na stěny, bude součet zmíněných součinů menší než její tíha mg a horolezkyňě spadne. Nejmenší hodnotu velikosti síly N , při které ještě nedojde k podklouznutí, tak dostaneme z rovnice

$$f_1 N + f_2 N = mg, \quad (13.31)$$

kteřá plyne z rov. (13.30). Jejím řešením dostaneme hledanou hodnotu

$$N = \frac{mg}{f_1 + f_2} = \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{(1,1 + 0,70)} = 299 \text{ N} \doteq 300 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Minimální síla, kterou horolezkyňě musí tlačít na stěny, aby nespadla, je přibližně 300 N.

(b) Jaká musí být při této síle vertikální vzdálenost h mezi horolezčiny rameny a chodidly, aby byla ve stabilní rovnováze?

ŘEŠENÍ: Aby byla splněna momentová rov. (13.9), tj. $\sum M_z = 0$, musí mít síly působící na horolezkyňi nulový výsledný moment vůči libovolné ose otáčení kolmé k rovině obrázku. Zvolíme-li takovou osu v místě, kde působí síla mezi rameny a stěnou, dostaneme rovnici

$$\sum M_z = -F_1 w + Nh + mgd = 0. \quad (13.32)$$

Vyřešíme-li tuto rovnici pro h , dosadíme za F_1 hodnotu $f_1 N$, položíme $N = 299 \text{ N}$ a užijeme ostatní známé hodnoty, dostaneme postupně

$$\begin{aligned} h &= \frac{F_1 w - mgd}{N} = \frac{f_1 N w - mgd}{N} = f_1 w - \frac{mgd}{N} = \\ &= (1,1)(1,0 \text{ m}) - \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(0,20 \text{ m})}{(299 \text{ N})} = \\ &= 0,739 \text{ m} \doteq 0,74 \text{ m}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme, když zvolíme jakoukoliv jinou osu kolmou k rovině obrázku, např. osu procházející místem působení chodidel na stěnu.

(c) Jaké jsou hodnoty třecích sil držících horolezkyňi?

ŘEŠENÍ: Ze známé hodnoty síly $N = 299 \text{ N}$ dostaneme

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 N = (1,1)(299 \text{ N}) = \\ &= 328,9 \text{ N} \doteq 330 \text{ N} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

a z rov. (13.30) dále plyne

$$\begin{aligned} F_2 &= mg - F_1 = (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) - (328,9 \text{ N}) = \\ &= 210,1 \text{ N} \doteq 210 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(d) Je horolezkyňě ve stabilní rovnováze, když působí na stěny stejnou silou (299 N), ale její chodidla jsou výše? Uvažujte případ, kdy $h = 0,37 \text{ m}$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (13.32) pro stejnou volbu osy, stejnou hodnotu síly (299 N) a novou hodnotu výšky h dostáváme pro velikost síly F_1 vyjádření

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{Nh + mgd}{w} = \\ &= \frac{(299 \text{ N})(0,37 \text{ m}) + (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(0,20 \text{ m})}{(1,0 \text{ m})} = \\ &= 218 \text{ N}. \end{aligned}$$

To je méně než mezní hodnota $f_1 N = 329 \text{ N}$, a sílu tedy lze vyvinout.

Dále užijeme rov. (13.30), abychom našli hodnotu F_2 , která vyhoví rovnici rovnováhy sil $\sum F_y = 0$:

$$F_2 = mg - F_1 = (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) - (218 \text{ N}) = 321 \text{ N}.$$

Tato hodnota přesahuje mezní hodnotu $f_2 N = 209 \text{ N}$, a je tedy nemožné ji realizovat tlakem 299 N. Jediný způsob, jak zabránit pádu při hodnotě $h = 0,37 \text{ m}$ (a též každé jiné hodnotě menší než 0,74 m), je tlačít na stěnu větší silou než 299 N, a tak zvýšit mezní hodnotu $f_2 N$.

Podobně je nutno vyvozovat tlak na stěny větší než 299 N i v případě, kdy $h > 0,74 \text{ m}$. Zde je právě výhoda těch, kteří se seznámí s fyzikou, než začnou lézt komínem. Když potřebujete odpočívat, vyhněte se chybě horolezeckých nováčků, kteří zapřou chodidla buď příliš vysoko nebo příliš nízko. Budete vědět, že existuje optimální svislá vzdálenost mezi rameny a chodidly, která vám dovoluje bezpečně odpočívat s nejmenší silou, kterou se musíte opírat o stěny. Tak můžete odpočívat nepohodlněji.

RADY A NÁMĚTY

Bod 13.1: Úlohy na statickou rovnováhu

Takové úlohy řešte podle následujících kroků:

1. Nakreslete si *náčrtek* problému.
2. Zvolte *systém*, na který budete aplikovat rovnice rovnováhy. Hranice systému vyznačte na náčrtku uzavřenou křivkou, abyste si je dobře zapamatovali. Někdy zvolíte za systém pouze jeden objekt, který chcete mít v rovnováze (jako v př. 13.6 horolezkyňi). Jindy je výhodnější zahrnout do systému více objektů. Zjednoduší se tím výpočet. Kdybyste např. v př. 13.3 a 13.4 zvolili za systém pouze žebřík, museli byste v silovém diagramu (obr. 13.8b) uvažovat i síly, kterými na žebřík působí ruce a nohy hasiče. Tyto další neznámé síly by vám zkomplikovaly výpočet. Systém byl na obr. 13.8 zvolen tak, aby zahrnoval i hasiče, a tím se zmíněné neznámé síly staly *vnitřními silami* soustavy, které není nutné pro vyřešení př. 13.3 a 13.4 znát.
3. Namalujte diagram, kde považujete systém za volné těleso, tj. nepodrobené vazbám. V diagramu vyznačte všechny

síly působící na těleso (nezapomeňte na síly nahrazující vazby, např. na reakci podložky), zřetelně je označte a ujistěte se, že jejich působíště a směry působení jsou správně vyznačeny.

4. Vyznačte v diagramu osy x a y souřadnicového systému. Volte je tak, aby nejméně jedna osa byla rovnoběžná s jednou či více neznámými silami. Síly, které neleží ve směru jedné z os rozložte na složky. Ve všech našich řešených příkladech bylo rozumné volit osu x vodorovně a osu y svisle.
5. Napište pro složky sil ve směru obou os *rovnice rovnováhy sil* se správným vyznačením symbolů.
6. Vyberte jednu nebo více os otáčení kolmých k rovině obrázku a napište pro ně *rovnici rovnováhy momentů sil*. Vyberte-li osu, která prochází působíštěm některé z neznámých sil, rovnice se zjednoduší, protože zmíněná neznámá funkce v ní nebude vystupovat.
7. Řešte rovnice *algebraicky* pro příslušné neznámé. Někteří studenti raději již v této fázi dosazují hodnoty veličin včetně jejich jednotek. Zkušební řešitelé však dávají přednost algebraickému řešení, protože v něm lépe vynikne závislost řešení na jednotlivých proměnných.
8. Nakonec do algebraického řešení *dosadte číselné hodnoty* s příslušnými jednotkami, abyste dostali číselné hodnoty neznámých veličin.
9. Zamyslete se nad výsledkem — má vůbec smysl? Není výsledek na první pohled příliš velký nebo příliš malý? Má správné znaménko? Odpovídají jednotky veličině, kterou určujeme?

13.5 NEÚPLNĚ URČENÉ SOUSTAVY

Pro řešení úloh této kapitoly máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice. Zpravidla to jsou dvě rovnice rovnováhy pro složky sil ve směru souřadnicových os a jedna rovnice rovnováhy momentů sil kolem osy kolmé k rovině dané souřadnicovými osami užitými v rovnicích rovnováhy sil. Když má úloha více než tři neznámé, nestačí soustava tří rovnic na její řešení. Takové úlohy nemůžeme jednoznačně řešit.

Je jednoduché najít takové problémy. Např. v př. 13.3 a 13.4 stačí předpokládat, že tření působí také mezi žebříkem a svislou stěnou. Musíme pak uvažovat také svislou třecí sílu mezi vrchním koncem žebříku a stěnou, čímž počet neznámých stoupne na čtyři. Tyto čtyři neznámé nemůžeme ze tří rovnic jednoznačně určit a úlohu nelze dořešit.

Dále můžeme uvažovat nesymetricky zatížené auto. Jaké síly — obecně všechny různé — působí na čtyři pneumatiky? Znovu nemůžeme tyto síly najít, protože máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice.

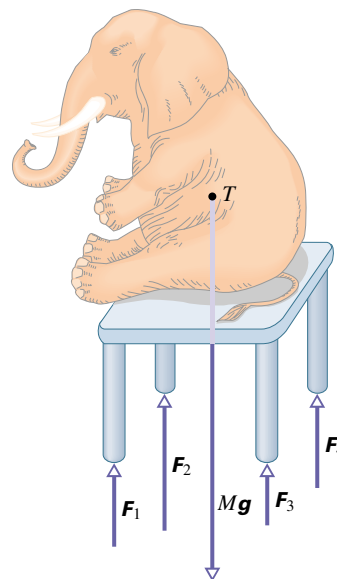
Podobně můžeme řešit problém statické rovnováhy stolu o třech nohách, ale už ne stolu o čtyřech nohách. Takové úlohy, kde je více neznámých než rovnic, označujeme jako **neúplně určené**.

V reálném světě však existují řešení i pro tyto neúplně určené úlohy. Postavíme-li kola aut na čtyři siloměry, každý ukáže nějakou hodnotu síly, přičemž součet těchto hodnot dá tíhu auta. Co nám brání v řešení problému nalézt hodnoty údajů na jednotlivých siloměrech početně?

Každý takový rozpor naznačuje, že původně zvolený model *není* dost dobrý pro úlohu, kterou právě řešíme. Zde jsme např. předpokládali — aniž jsme to zvláště zdůraznili — že tělesa, na která jsme aplikovali rovnice statické rovnováhy, jsou dokonale tuhá. To znamená, že se vůbec nedeformují, když na ně působí síly. Skutečná tělesa však tuhá nejsou. Např. pneumatiky vozu se po jeho zatížení snadno deformují, dokud nenastane statická rovnováha.

Všichni máme zkušenosti s viklajícím se restauračním stolem, jehož jednu nohu podložíme několikrát přeloženým kouskem papíru, abychom viklání odstranili. Můžeme si představit, že kdyby si dostatečně těžké slůně sedlo na takový stůl a on se pod ním nerozpadl, zdeformuje se stůl (i podlaha) tak, že se nakonec všechny čtyři nohy dotknou podlahy. Síly podpírající nohy dosáhnou zcela určitých hodnot (obecně pro každou nohu jinou hodnotu) a stůl se přestane viklat (obr. 13.11). Jak ale najdeme jejich velikosti?

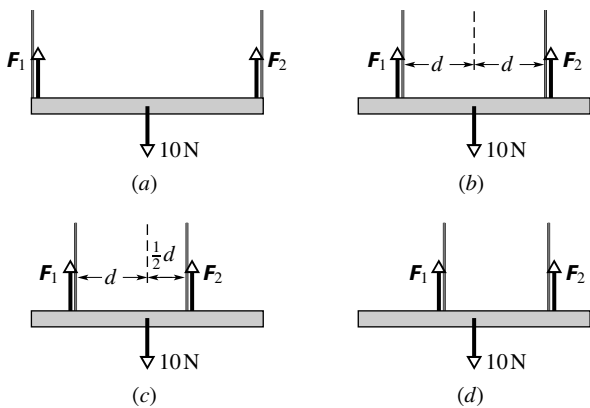
Abychom vyřešili tuto zatím neúplně určenou úlohu, musíme doplnit rovnice rovnováhy jistými poznatky z teo-



Obr. 13.11 Stůl je neúplně určená soustava. Čtyři síly působící na jeho nohy jsou různě velké a nemohou být určeny pouze z rovnic statické rovnováhy.

rie pružnosti (*elasticity*), části fyziky a technických věd, která popisuje, jak se reálná tělesa deformují, když na ně působí síly.

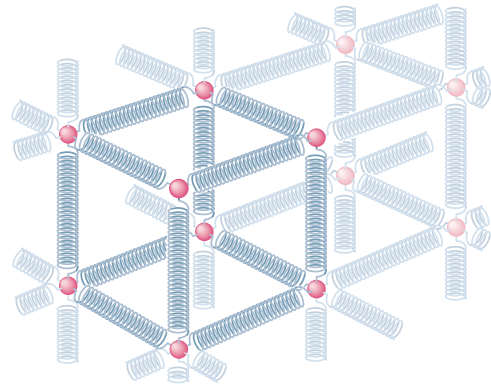
KONTROLA 4: Homogenní vodorovná tyč vážící 10 N je zavěšena na strop dvěma dráty, které ji drží dvěma silami F_1 a F_2 . Obrázek ukazuje čtyři uspořádání drátů. Jsou mezi nimi uspořádání, která vedou na neúplně určenou soustavu (tj. takovou soustavu, že nemůžeme určit číselné hodnoty sil F_1 a F_2)?



13.6 PRUŽNOST

Když se spojí velké množství atomů, aby vytvořilo kus kovu (např. hřebík), uspořádají se zpravidla tak, že jejich rovnovážné polohy vytvoří trojrozměrnou *mřížku*, tedy pravidelné prostorové uspořádání, ve kterém každý atom má jisté vzdálenosti od svých nejbližších sousedů*. Atomy jsou drženy pohromadě meziatomovými silami, které jsou na obr. 13.12 reprezentovány pružinkami. Mřížka je neobvykle pevná, což jinak řečeno znamená, že meziatomové pružinky jsou velmi tuhé. Z toho důvodu pokládáme mnohé běžné předměty, jako např. kovový žebřík, stůl nebo lžici, za dokonale tuhé. Ovšem jiné běžné předměty, např. zahradní hadice nebo gumové rukavice, se vůbec jako tuhé nejeví. Molekuly těchto předmětů *netvoří* pevné mřížky znázorněné na obr. 13.12, ale jsou uspořádány do dlouhých molekulárních řetězců, které jsou vzájemně vázány velmi volně.

* Běžné kovové předměty, např. hřebík, jsou tvořeny kovovými zrn, jejichž vnitřní struktura má podobu více méně pravidelné mřížky, jaká je znázorněna na obr. 13.12. Síly působící mezi zrn jsou však podstatně slabší než síly držící pohromadě mřížku. Proto deformace nastává přeuspořádáním zrn a lom probíhá po hranicích zrn, a to výrazně snadněji než „drcení zrn“.



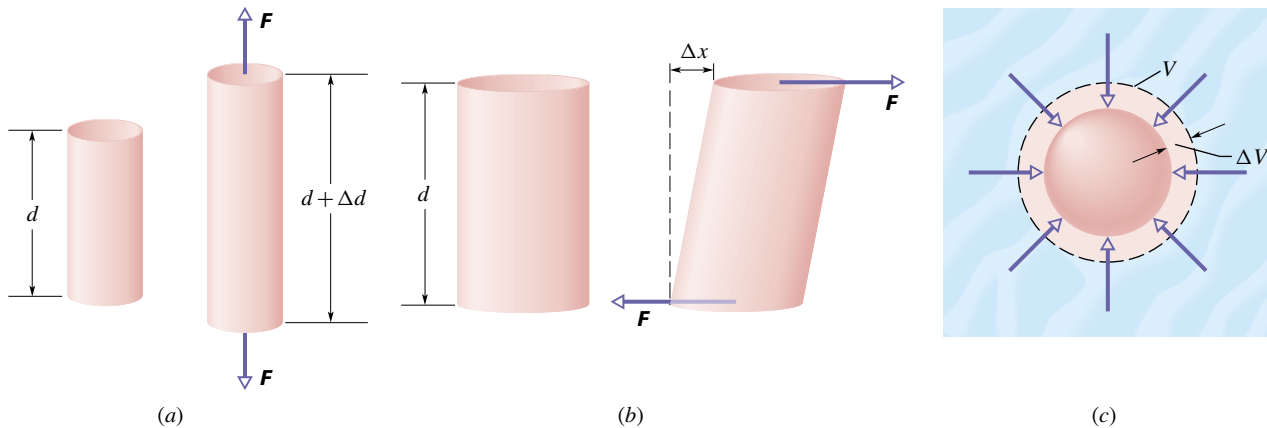
Obr. 13.12 Atomy pevných kovových materiálů jsou rozmístěny v trojrozměrné mřížce, kde motiv mřížky se opakuje až k hranicím krystalových zrn. Pružinky představují meziatomové síly.

Všechny reálné „pevné“ předměty jsou do určité míry pružné. To znamená, že můžeme do určité míry měnit jejich rozměry tahem, jednosměrným tlakem, kroucením či všestranným tlakem. Abychom odhadli řádovou velikost těchto změn, představme si ocelovou tyč délky 1 m a průměru 1 cm, na kterou zavěsíme malé osobní auto. Tyč se protáhne, ale pouze o 0,5 mm neboli o 0,05 %. Po odlehčení se opět zkrátí na svou původní délku.

Když zavěsíme na tyč dvě auta, tyč se trvale deformuje, po odlehčení se nevrátí přesně do své původní délky. Když na tyč zavěsíme tři auta, tyč se přetrhne. Těsně před přetržením bude deformace menší než 0,2 %. I když uvedené deformace vypadají jako malé, hrají důležitou roli v inženýrské praxi. (Je zřejmě důležité, zda křídlo letadla přečká náhodně zvýšené zatížení bez pohromy a neodtrhne se od letadla.)

Na obr. 13.13 jsou znázorněny tři způsoby změny rozměru tělesa pod vlivem vnějších sil. Na obr. 13.13a je válec natahován. Na obr. 13.13b je válec namáhán silou, která působí kolmo k jeho ose. Je to podobný způsob namáhání, jakým můžeme měnit tvar balíčku karet nebo knihy. Na obr. 13.13c je znázorněno pevné těleso umístěné v kapalině, které je rovnoměrně stlačováno všestranným vysokým tlakem přenášeným kapalinou. Co mají společného uvedené tři typy namáhání těles? **Napětí**, tj. síla přepočtená na jednotkovou plochu, v nich vyvolává **deformaci**, kterou v nauce o pružnosti chápeme jako relativní změnu tvaru. Napětí zobrazené na obr. 13.13a označujeme jako **tah**, na obr. 13.13b jako **smyk** a napětí z obr. 13.13c označujeme jako **všestranný tlak** (nebo jen tlak, když nemůže dojít k záměně s případem probíraným v následujícím odstavci „Tah a tlak“).

Napětí i deformace jsou v případech znázorněných v obr. 13.13 různé, ale je jim společné, že v prvním při-

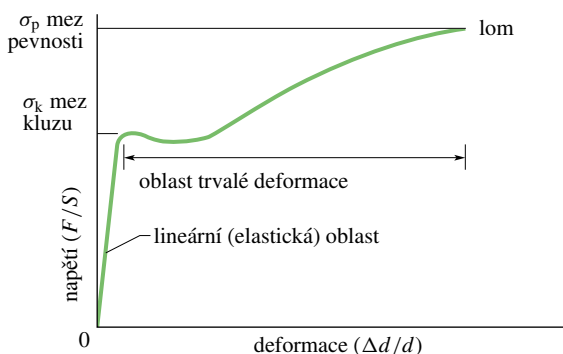


Obr. 13.13 (a) Válec podrobený tahu se protáhne o Δd . (b) Válec podrobený smyku se deformuje o Δx podobným způsobem, jako když se sesune balíček hracích karet. (c) Pevná koule podrobená všestrannému tlaku, který vytvoří hydrostatický tlak kapaliny, se smrští o objem ΔV . Velikost deformací je v obrázku značně zvětšena.

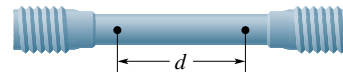
blížení, které většinou stačí k řešení praktických úloh, jsou vzájemně úměrné. Konstanta úměrnosti se nazývá **modul pružnosti**, takže můžeme psát

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace} \quad (13.33)$$

Na obr. 13.14 je graf závislosti napětí na deformaci pro ocelový zkušební válcový vzorek, jehož tvar je znázorněn na obr. 13.15. Při standardní zkoušce se tahové napětí působící na vzorek pomalu zvyšuje z nuly až na hodnotu, při které se zkušební vzorek přetrhne. V celém průběhu děje pečlivě měříme a zaznamenáváme deformaci a k ní příslušné napětí. Pro podstatný rozsah použitých napětí je mezi napětím a deformací přímá úměrnost. Zrušíme-li napětí, vrátí se vzorek do svých původních rozměrů; v tomto oboru platí rov. (13.33). Jestliže napětí zvýšíme nad **mez kluzu** σ_k materiálu, zůstane vzorek trvale deformován. Jestliže napětí dále zvyšujeme, vzorek se nakonec přetrhne při napětí σ_p , které se nazývá **mez pevnosti**.



Obr. 13.14 Křivka napětí-deformace pro ocelový zkušební vzorek tvaru znázorněného na obr. 13.15. Vzorek se začne trvale deformovat, jakmile napětí dosáhne *meze kluzu* oceli a přetrhne se, když napětí dosáhne její *meze pevnosti*.



Obr. 13.15 Vzorek, který se užívá ke stanovení křivky napětí-deformace zobrazené na obr. 13.14. Odpovídající hodnoty napětí a deformace tvořící křivku se měří a zobrazují.

Tah a tlak

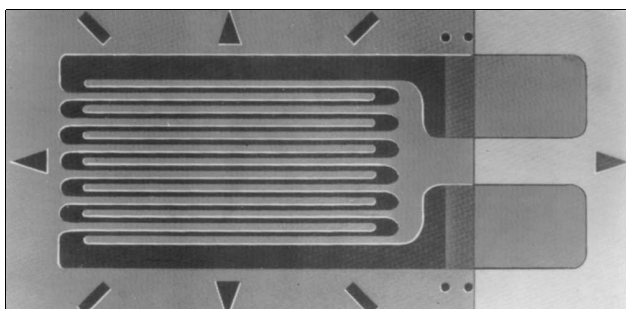
Pro případ namáhání vzorku tahem (obr. 13.13a) získáme napětí σ na ploše kolmé k působící síle jednoduše vydělením velikosti F působící síly velikostí S plochy průřezu, tedy $\sigma = F/S$. Působí-li síly protahující vzorek tak, jak je vyznačeno na obrázku, nazýváme napětí **tahem**. Jsou-li síly opačně orientované, takže vzorek zkracují, mluvíme o **tlaku** a znaménko napětí σ pokládáme za záporné. (V tahově namáhané tyči je na ploše říznuté šikmo ke směru působící síly napětí jiné než právě uvedený tlak. Tlak právě zavedený nesmíme zaměňovat se všestranným tlakem v kapalinách a plynech. Ten je stejný na všech plochách procházejících daným bodem a setkáme se s ním na str. 344.) **Deformace** e je bezrozměrová veličina, kterou pro tahové namáhání vzorku vyjádříme jako podíl prodloužení vzorku Δd k jeho délce d , tedy $e = \Delta d/d$. Deformaci v tomto případě nazýváme **relativní prodloužení**. Je dána hodnotou zlomku a často ji vyjadřujeme v procentech. Působí-li na tyč tlak, tyč se zkrátí a relativní prodloužení pokládáme za záporné. Jestliže tyč je dostatečně dlouhá a napětí v ní nepřesáhne hodnotu meze kluzu, pak deformace, kterou spočítáme pro celou tyč, platí také pro každou její část. Protože deformace je bezrozměrová, má modul pružnosti z rov. (13.33) stejný rozměr jako napětí, tj. sílu na jednotku plochy.

Modul pružnosti pro tahové (a tlakové) namáhání vzorku se nazývá **Youngův modul** neboli **modul pružnosti v tahu** a užíváme pro něj symbol E . Obecná rov. (13.33)

tak pro případ tahového namáhání dostane tvar

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta d}{d}. \quad (13.34)$$

Deformace vzorku $\Delta d/d$ může často být poměrně snadno změřena tenzometrem (obr. 13.16). Je to jednoduché zařízení: plátek, který se speciálním lepidlem přilepí k místu, kde chceme relativní prodloužení měřit. Činnost tenzometru znázorněného na obrázku je založena na skutečnosti, že elektrický odpor jeho vodivé cesty (značena tmavěji) se s protažením tenzometru zvětší.



Obr. 13.16 Tenzometr vnějších rozměrů 9,8 mm × 4,6 mm. Tenzometr se přilepí na místo předmětu, ve kterém potřebujeme změřit deformaci; tenzometr se deformuje spolu s předmětem v místě, kde je přilepen. Elektrický odpor tenzometru se mění s deformací a umožňuje měřit deformace asi do velikosti 3 %.

I když Youngův modul pro tah a tlak bývá téměř stejný, mez pevnosti se často pro obě namáhání velmi liší. Např. beton je velmi pevný v tlaku, ale má velmi malou mez pevnosti v tahu, a proto se jako materiál přenášející tah téměř neuvžívá. V tab. 13.1 jsou uvedeny hodnoty Youngových modulů a dalších elastických konstant často užívaných materiálů.

Smyk

Napětí je síla na jednotku plochy i v případě smykového namáhání vzorku, ale síla zde působí v rovině plochy

a ne kolmo na ni jako v případě tahu. Smyková deformace je bezrozměrové číslo $\Delta x/d$ — význam veličin plyne z obr. 13.13b. Odpovídající modul se označuje písmenem G a nazývá se **modul pružnosti ve smyku**. Pro smyk dostane rov. (13.33) konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{d}. \quad (13.35)$$

Smykové napětí hraje rozhodující úlohu při kroucení tyčí, a tedy též při lyžařům známých spirálních zlomeních, zaviněných zkroucením končetin.

Všestranný tlak

Napětí působící na kouli z obr. 13.13c je realizováno všestranným tlakem přenášeným kapalinou (srovnej s kap. 15). Deformace je dána poměrem $\Delta V/V$, kde V je původní objem deformovaného tělesa a ΔV je absolutní hodnota změny jeho objemu způsobená tlakem. Odpovídající modul se označuje symbolem K a nazývá se **modul objemové pružnosti**. Říkáme, že takto namáhané těleso je pod hydrostatickým tlakem. Tlak přenášený kapalinou, která je v klidu, označujeme jako hydrostatický tlak p . Pro popsanou objemovou deformaci vzorku přejde obecná rov. (13.33) na tvar

$$p = K \frac{\Delta V}{V}. \quad (13.36)$$

Modul objemové pružnosti vody je $2,2 \cdot 10^9$ Pa a oceli $16 \cdot 10^{10}$ Pa. Hydrostatický tlak v průměrné hloubce Tichého oceánu, která je 4 000 m, je $4,0 \cdot 10^7$ Pa. Relativní smrštění $\Delta V/V$ objemu vody způsobené tímto tlakem je 1,8 %, ocel se pod stejným tlakem smrští jen o 0,025 %. Obecně jsou pevné látky díky svým tuhým atomovým mřížkám podstatně méně stlačitelné než kapaliny, jejichž atomy či molekuly jsou ke svým sousedům vázány mnohem méně pevně.

Tabulka 13.1 Elastické vlastnosti často užívaných materiálů

MATERIÁL	ρ kg·m ⁻³	E 10 ⁹ Pa	σ_p 10 ⁶ Pa	σ_k 10 ⁶ Pa
Ocel ^a	7 860	200	400	250
Hliník	2 710	70	110	95
Sklo	2 190	65	50 ^b	—
Beton ^c	2 320	30	40 ^b	—
Dřevo ^d	525	13	50 ^b	—
Kost	1 900	9 ^b	170 ^b	—
Polystyren	1 050	3	48	—

^a konstrukční ocel (ASTM-A36) ^b v tlaku ^c vysokotlaký ^d jedle douglaska

PŘÍKLAD 13.7

Tyč kruhového průřezu z konstrukční oceli má poloměr $R = 9,5 \text{ mm}$ a délku $d = 81 \text{ cm}$. Síla F o velikosti $6,2 \cdot 10^4 \text{ N}$ (přibližně 6 tun) ji protahuje ve směru její délky.

(a) Jaké je napětí v tyči?

ŘEŠENÍ: Z definice plyne, že

$$\begin{aligned} \text{napětí} &= \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{(6,2 \cdot 10^4 \text{ N})}{\pi (9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \\ &= 2,2 \cdot 10^8 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Mez kluzu pro konstrukční ocel je $2,5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$, tyč je tedy nebezpečně blízko ke své mezní hodnotě, při které začne plasticky téci.

(b) Jaké je prodloužení tyče při tomto zatížení? Jaká je hodnota deformace?

ŘEŠENÍ: Z rov. (13.34), po dosazení právě získaných výsledků a hodnoty Youngova modulu pro ocel (tab. 13.1), plyne

$$\begin{aligned} \Delta d &= \frac{(F/S)d}{E} = \frac{(2,2 \cdot 10^8 \text{ Pa})(0,81 \text{ m})}{(2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa})} = \\ &= 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,89 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

a pro deformaci dále dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\Delta d}{d} &= \frac{(8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m})}{(0,81 \text{ m})} = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-3} = 0,11 \%. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

PŘÍKLAD 13.8

Femur, základní kost stehna, má u dospělého člověka minimální průměr asi 2,8 cm, což odpovídá ploše průřezu $S = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Při jakém tlaku kost praskne?

ŘEŠENÍ: Z tab. 13.1 plyne, že mez pevnosti σ_p pro kost namáhanou tlakem je $170 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Síla F , která vytvoří ve femuru napětí σ_p , je tedy

$$\begin{aligned} F &= \sigma_p S = (170 \cdot 10^6 \text{ Pa})(6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = \\ &= 1,0 \cdot 10^5 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

To je přibližně 10 tun. I když je to velká síla, může být dosažena např. při nešikovném přistání parašutisty. Vhodným rozložením nárazu do delšího časového intervalu je však možno sílu zmenšit hluboko pod nebezpečnou hodnotu.

PŘÍKLAD 13.9

Stůl má tři nohy, které jsou $d = 1,00 \text{ m}$ dlouhé, a čtvrtou, která je delší o $\Delta d = 0,50 \text{ mm}$, takže se stůl mírně viklá. Těžký

ocelový válec o hmotnosti $m = 290 \text{ kg}$ je vzpřímeně postaven na stůl (hmotnost stolu, která je podstatně menší než hmotnost válce, při výpočtu zanedbáme), takže všechny čtyři nohy se zkrátí a stůl se přestane viklat. Nohy jsou umělohmotné válce s plochou průřezu $S = 1,0 \text{ cm}^2$ a mají Youngův modul $E = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$. Předpokládejte, že na dokonale tuhé vrchní desce stolu je válec umístěn tak, že deska zůstane vodorovná, že nohy stolu se neohnou a že podlaha je dokonale tuhá. Jakou silou nese podlaha každou ze čtyř noh?

ŘEŠENÍ: Za systém zvolíme stůl a ocelový válec. Situace je podobná jako na obr. 13.11, pouze slona zastupuje ocelový válec. Aby zůstala deska stolu vodorovná, musí být všechny tři stejně dlouhé nohy stlačeny o stejný úsek, který označíme Δd_3 . Síly, které způsobí tato stlačení také musí být stejné, jejich velikost označíme F_3 . Delší noha musí být stlačena o delší úsek Δd_4 větší silou F_4 . Musí platit rovnice

$$\Delta d_4 = \Delta d_3 + \Delta d. \quad (13.37)$$

Rovnici (13.34) můžeme přepsat na tvar $\Delta d = Fd/(ES)$. Tuto rovnici užitíme, abychom dosadili za Δd_3 a Δd_4 do rov. (13.37). Přitom za d budeme pokládat původní délku všech noh, tj. 1 m. Nepatrný rozdíl jejich délek zde můžeme zanedbat. Z rov. (13.37) tak dostaneme

$$F_4 d = F_3 d + SE \Delta d. \quad (13.38)$$

Z rov. (13.8), která udává rovnováhu y -ových složek sil, pro náš systém plyne

$$\sum F_y = 3F_3 + F_4 - mg = 0. \quad (13.39)$$

Ze soustavy rov. (13.38) a rov. (13.39) vypočteme neznámou sílu F_3

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{mg}{4} - \frac{SE \Delta d}{4d} = \\ &= \frac{(290 \text{ kg})(9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})}{4} - \\ &\quad - \frac{(1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)(1,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa})(5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m})}{4(1,00 \text{ m})} = \\ &= 711 \text{ N} - 163 \text{ N} = 548 \text{ N} \doteq 550 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

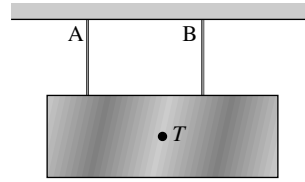
Z rov. (13.39) potom získáme

$$\begin{aligned} F_4 &= mg - 3F_3 = (290 \text{ kg})(9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) - \\ &\quad - 3(548 \text{ N}) \doteq 1200 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Dále lze ukázat, že každá ze tří kratších noh byla stlačena o 0,42 mm a delší noha o 0,92 mm, tedy že rozdíl délek noh 0,50 mm byl vyrovnán.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje vodorovný homogenní blok zavěšený na dvou drátech A a B, které byly ustříženy z těže cívky. Těžiště bloku je blíže k drátu B než

k drátu A. (a) Uvažujete-li momenty vzhledem k těžišti, udejte, zda moment vytvářený silou přenášenou drátem A je větší, menší, nebo stejně velký jako moment síly vytvářený drátem B. (b) Kterým drátem je přenášena větší síla? (c) Jestliže délky drátů jsou nyní stejné, který z drátů byl původně delší?



PŘEHLED & SHRUTÍ

Statická rovnováha

Říkáme, že tuhé těleso, které je a zůstává v klidu, je ve *statické rovnováze*. Vektorový součet všech vnějších sil působících na takové těleso musí být nulový:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha sil}). \quad (13.3)$$

Když všechny síly leží v rovině xy , je právě uvedená vektorová rovnice ekvivalentní dvěma skalárním rovnicím pro složky sil:

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{rovnováha } x\text{-ových složek sil}) \quad (13.7)$$

a

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{rovnováha } y\text{-ových složek sil}). \quad (13.8)$$

Je-li těleso ve statické rovnováze, musí být také součet všech vnějších momentů sil na něj působících nulový, a to *nezávisle na tom*, vůči kterému bodu moment počítáme;

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha momentů sil}). \quad (13.5)$$

Když všechny síly leží v rovině xy , jsou všechny vektory momentů sil rovnoběžné s osou z . Rov. (13.5) je potom ekvivalentní jedné skalární rovnici pro z -ové složky momentů sil,

$$\sum M_z = 0 \quad (\text{rovnováha } z\text{-ových složek momentů sil}). \quad (13.9)$$

Těžiště

Tíhová síla působí na jednotlivé částice tělesa. Výsledek takového působení je stejný, jako když umístíme výslednici těchto individuálních sil — tíhovou sílu $m\mathbf{g}$ — do význačného bodu tělesa, který nazveme *těžiště*. Těžiště splývá se středem hmotnosti, když je tíhové zrychlení \mathbf{g} konstantní v celém objemu tělesa, tedy stejné pro všechny jeho částice. Termíny „těžiště“ a „střed hmotnosti“ ve zbytku knihy nerozlišujeme.

Moduly pružnosti

Uvedli jsme tři *moduly pružnosti*, které se užívají k popisu pružnostního (elastického) chování těles, na která působí síly. Deformace (relativní změna tvaru tělesa) je přímo úměrná napětí

(síle na jednotku plochy); jejich podíl je příslušným modulem. Obecná rovnice vztahu napětí a deformace je

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace}. \quad (13.33)$$

Tah a tlak

Pro těleso, které je namáháno tahem nebo tlakem (obr. 13.13a), dostane obecná rov. (13.33) tvar

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta d}{d}, \quad (13.34)$$

kde $\Delta d/d$ je relativní prodloužení (deformace) vzorku (namáhaného tělesa), F je velikost síly \mathbf{F} působící na vzorek, S je plocha průřezu vzorku kolmé ke směru působící síly \mathbf{F} a E je *Youngův modul* látky, ze které je vzorek zhotoven. Napětí je F/S .

Smyk

Pro objekt, který je namáhán smykovým napětím (obr. 13.13b), přejde rov. (13.33) na konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{d}, \quad (13.35)$$

kde $\Delta x/d$ je smyková deformace vzorku, Δx je posunutí vrchního konce vzorku ve směru síly \mathbf{F} působící na vrchní konec vzorku a G je *modul pružnosti ve smyku* látky, z níž je vzorek zhotoven. Napětí je F/S .

Všestranný tlak (hydrostatický)

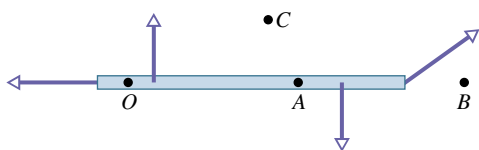
Když je vzorek vystaven *všestrannému tlaku* — nejnadhěji jej lze realizovat hydrostatickým tlakem kapaliny obklopující vzorek (obr. 13.13c) — přejde rov. (13.33) na tvar

$$p = K \frac{\Delta V}{V}, \quad (13.36)$$

kde p je *hydrostatický tlak* kapaliny obklopující vzorek. Deformace $\Delta V/V$ je absolutní hodnota relativní změny objemu vzorku vyvolané působícím tlakem a K je *modul objemové pružnosti* látky, z které je zhotoven vzorek.

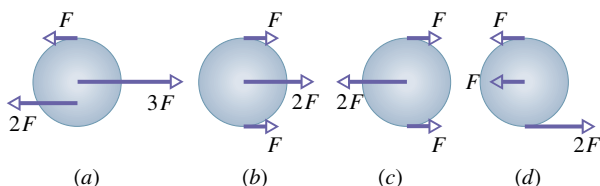
OTÁZKY

1. Na obr. 13.17 je pohled shora na tyč namáhanou čtyřmi silami. Předpokládejme, že jsme zvolili osu otáčení bodem O kolmo k rovině obrázku a zjistili, že momenty sil vůči této ose jsou v rovnováze (jejich součet je nulový). Bude rovnováha momentů sil zachována, zvolíme-li místo osy procházející bodem O osu s ní rovnoběžnou, procházející body (a) A , (b) B , (c) C ? (d) Předpokládejme, že oproti předcházejícímu případu nyní zjistíme, že momenty sil vůči ose O nejsou v rovnováze. Existuje v tomto případě takový bod, aby — když jím povedeme rovnoběžnou osu — byly momenty sil vůči této ose v rovnováze?



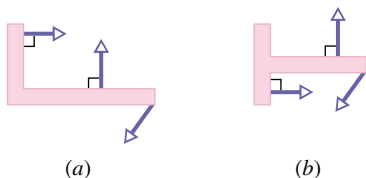
Obr. 13.17 Otázka 1

2. Obr. 13.18 ukazuje pohled shora na čtyři disky (puky), které bez tření kloužou po podložce. Tři síly o velikostech F , $2F$ nebo $3F$ působí na každý z disků, přičemž působíště sil je buď ve středu disku, na jeho okraji, nebo na půl cesty mezi okrajem a středem. Vektory sil se otáčejí spolu s diskem a v momentce znázorněné na obr. 13.18 míří přesně doprava nebo doleva. Které disky jsou v rovnováze?

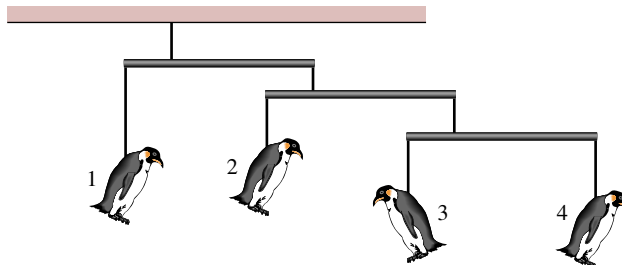


Obr. 13.18 Otázka 2

3. Na obr. 13.19 je pohled shora na dva pevné útvary, na které působí tři síly. Směry sil jsou na obrázku vyznačeny. Které útvary mohou být uvedeny do stavu statické rovnováhy vhodným nastavením velikostí působících sil (uvažujeme pouze nenulové síly)?

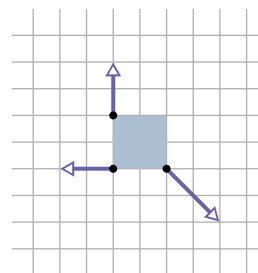
Obr. 13.19
Otázka 3

4. Na obr. 13.20 je zobrazena hračka s visícími tučňáky. Každá vodorovná tyčka (hmotnost tyček budeme v dalších úvahách zanedbávat) je zavěšena tak, že její část vpravo od závěsu je třikrát delší, než část vlevo od závěsu. Tučňák 1 má hmotnost $m_1 = 48$ kg. Jaké jsou hmotnosti ostatních tučňáků, aby mohli viset tak, jak je znázorněno na obrázku?



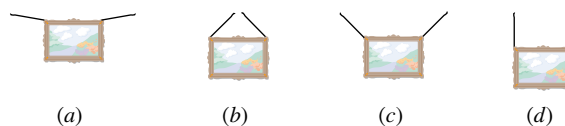
Obr. 13.20 Otázka 4

5. Na obr. 13.21 je pohled shora na kovový čtvereček ležící na dokonale hladké podložce (mezi čtverečkem a podložkou nepředpokládáme žádné tření). Tři síly, jejichž velikosti i směry jsou na obrázku přesně vyznačeny, působí na rohy čtverečku. (a) Je splněna první podmínka rovnováhy z rov. (13.1)? (b) Je splněna také druhá podmínka rovnováhy z této rovnice? (c) Jestliže některá z odpovědí na otázku (a) nebo (b) je záporná, můžeme přidáním vhodně volené čtvrté síly dosáhnout splnění obou podmínek rovnováhy?

Obr. 13.21
Otázka 5

6. (a) Kolik různých věží, které budou bez další podpory stát, můžete vytvořit ze tří malých kostek stavebnice Lego? Kostky se čtyřmi výčnělky lze postavit přímo nad sebe nebo je možné je spojit tak, že vrchní kostka je posunuta o půl své délky vpravo nebo vlevo. (Uspořádání a jeho zrcadlový obraz pokládejte za jedno uspořádání.) Kolik takových věží je (b) v stabilní rovnováze a kolik (c) v labilní rovnováze (těžiště nad hranou kostky)? (d) Které uspořádání je nejstabilnější (nejhůře se převrátí) a proč?

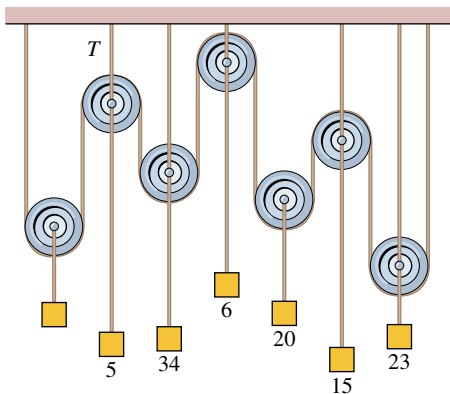
7. Na obr. 13.22 jsou znázorněny čtyři způsoby zavěšení obrazu na stěnu dvěma stejně dlouhými vlákny. Vlákna na obr. 13.22b, c svírají stejné úhly s vodorovnou přímkou. Seřadte všechna čtyři uspořádání podle velikosti sil přenášených vlákny. Uspořádání, kde jsou síly největší, zařadte jako první.



Obr. 13.22 Otázka 7

8. Žebřík je opřen o stěnu, přičemž tření mezi stěnou a žebříkem zanedbáme. Proti spadnutí je žebřík zabezpečen třením mezi ním a podlahou. Spodní konec žebříku přisuneme směrem ke stěně. Uveďte, které z následujících veličin se zvětší, zmenší, nebo zůstanou stejné: (a) síla, kterou působí podlaha na žebřík, (b) síla, kterou působí stěna na žebřík, (c) síla statického tření působící od podlahy na žebřík a (d) maximální hodnota $F_{s,max}$ statické třecí síly.

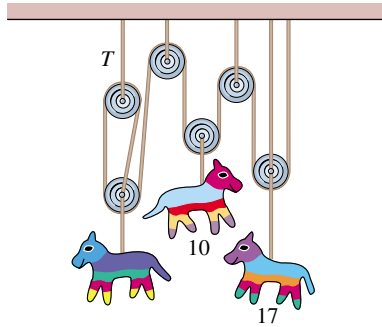
9. Jeden učitel fyziky, když se dostal do ráže, zkonstruoval statický systém kladek a lan, znázorněný na obr. 13.23. Jedno dlouhé lano vychází od stropu, obtáčí všechny kladky a končí opět na stropě. Na kratších lanech jsou od stropu zavěšeny některé kladky a také všechna závaží upevněná v ose kladek. Tíhy závaží jsou až na jednu výjimku na obrázku vyznačeny (čísla udávají tíhu v newtonech). (a) Jaká je velikost zbývajících tíh? (Tip: Obtáčí-li lano kladku z poloviny, jak je tomu na obrázku, je výsledná síla působící od lana na kladku dvojnásobkem síly přenášené lanem — neboli, jak se běžně ne zcela přesně říká, dvojnásobkem napětí lana.) (b) Jakou sílu T přenáší krátké lano? Při výpočtech pokládejte kladky a lana za nehmotné.



Obr. 13.23 Otázka 9

10. Tři figurky visí na statickém systému kladek a lan zobrazeném na obr. 13.24. Jedno dlouhé lano jde z místa upevnění vpravo na stropě přes všechny kladky až do osy kladky vlevo dole. Několik kratších lan slouží k zavěšení kladek na strop nebo figurek na kladky. Tíha dvou figurek (v newtonech) je vyznačena na obrázku. (a) Jaká je tíha třetí figurky? (Tip: Podobně

jako v předcházející otázce využijte skutečnosti, že síla přenášená dlouhým lanem je poloviční než síla, kterou lano působí na kladku.) (b) Jaká je síla přenášená v krátkém laně označeném T ?



Obr. 13.24 Otázka 10

11. (a) Použijete v úloze uvedené v kontrole 3 při výpočtu velikosti momentu síly M_p , který na tyč působí od síly T , funkci $\sin \theta$ nebo $\cos \theta$? (b) Jestliže zmenšíme úhel θ , že zkrátíme provaz a tyč ponecháme vodorovnou, bude nutno moment M_p síly pro zachování rovnováhy zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejný? (c) Sílu T vytvářející moment musíme v tom případě zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejnou?

12. Tabulka udává velikosti ploch tří povrchů a velikosti výsledných sil, které na tyto plochy působí. Síly působí kolmo k povrchům a jsou podél nich rovnoměrně rozloženy. Seřaďte povrchy podle velikostí napětí, která na ně působí.

	VELIKOST PLOCHY	SÍLA
Povrch A	$0,5S_0$	$2F_0$
Povrch B	$2S_0$	$4F_0$
Povrch C	$3S_0$	$6F_0$

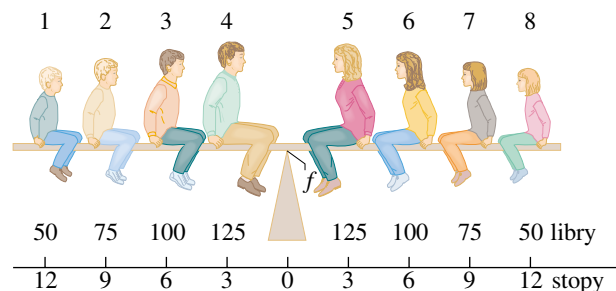
13. Dlouhá tyč byla rozřezána na tyče A, B, C. Tyče se přiloženými silami prodloužily. Seřaďte je sestupně podle velikosti napětí v nich.

	PŮVODNÍ DÉLKA	ZMĚNA DÉLKY
Tyč A	$2d_0$	Δd_0
Tyč B	$4d_0$	$2\Delta d_0$
Tyč C	$10d_0$	$4\Delta d_0$

CVIČENÍ & ÚLOHY

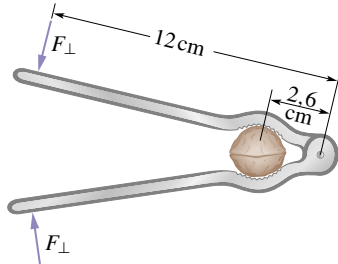
ODST. 13.4 Příklady statické rovnováhy

1C. Osmičlenná americká rodinka, jejíž váhy v librách jsou uvedeny na obr. 13.25, se houpe na prkně. Kteří z členů rodiny (udejte čísla) vytvářejí největší momenty síly vůči ose houpačky (a) mířící před rovinu stránky, (b) mířící za rovinu stránky?



Obr. 13.25 Cvičení 1

2C. Na obr. 13.26 je znázorněn ořech, který chceme rozlousknout louskáčkem. Předpokládáme, že k rozlousknutí ořechu je třeba na něj působit z obou stran silou o velikosti 40 N. Jaké velikosti F_{\perp} musí mít síly, kterými působíme kolmo na rukojeti louskáčku, abychom ořech rozlouskli? Důležité rozměry jsou udány na obrázku.



Obr. 13.26
Cvičení 2

3C. Šikmá věž v Pise (obr. 13.27) je 55 m vysoká a její průměr je 7 m. Vršek věže je odchýlen 4,5 m od svislice. Pokládejte věž



Obr. 13.27 Cvičení 3. Šikmá věž v Pise (fotografie není pootočená).

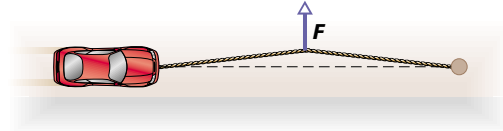
za homogenní kruhový válec. (a) Jak velká další odchylka vršku věže by vedla k jejímu pádu převrácením? (b) Jaký by přitom byl úhel mezi svislicí a osou věže?

4C. Na částici působí síly $\mathbf{F}_1 = 10\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ a $\mathbf{F}_2 = 17\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. (a) Jaká síla \mathbf{F}_3 vyrovná tyto síly? (*Tip:* Vektorový součet všech tří sil musí být nulový.) (b) Jaký úhel svírá síla \mathbf{F}_3 s osou x ? Pro číselný výpočet předpokládejte, že čísla udávají velikosti sil v newtonech.

5C. Lukostřelec napíná luk. Jaký úhel svírají dvě části těživy, známe-li sílu, jakou ji lukostřelec natahuje?

6C. Na obr. 13.28 je znázorněno, jak řidič znalý fyziky vyproštuje svůj vůz z hlubokého bláta na krajnici silnice. Jeden konec lana uvázal pevně kolem předního nárazníku a druhý kolem patníku vzdáleného 20 m. Potom zatáhne za střed lana kolmo k jeho délce silou 600 N. Lano se protáhne, takže jeho

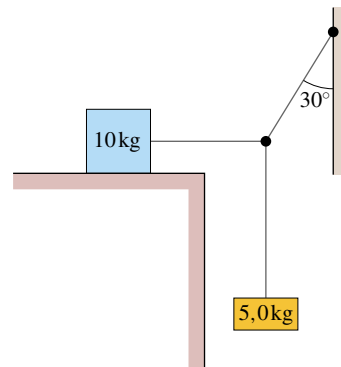
střed se vysune ve směru síly o 30 cm, když se vůz nepatrně pohne. Jaká síla působí na vůz v tomto okamžiku?



Obr. 13.28 Cvičení 6

7C. Provaz, jehož hmotnost budeme zanedbávat, je natažen mezi dvěma úchyty vzdálenými 3,44 m. Provaz se prohne o 35 cm, když se na něj uprostřed zavěsí předmět o tíze 3 160 N. Jaká je potom síla napínající provaz?

8C. Na obr. 13.29 je znázorněn systém, který je v rovnováze, ale jehož blok spočívající na vodorovné podložce začne klouzat, když k předmětu o hmotnosti 5 kg je přidáno jakékoliv další závaží. Jaký je statický činitel tření mezi desetikilogramovým blokem a jeho podložkou?



Obr. 13.29
Cvičení 8

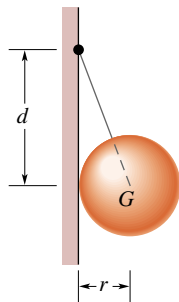
9C. Lešení o hmotnosti 60 kg a délce 5 m je drženo ve vodorovné poloze závěsnými lany na obou jeho koncích. Čistič oken o hmotnosti 80 kg stojí v místě, které je vzdáleno 1,5 m od jednoho konce. Jaká síla napínající lano je přenášena (a) lanem, které je blíže k čističi, (b) vzdálenějším lanem?

10C. Tři muži nesou trám. Jeden muž je na konci trámu a druzí dva nesou trámek mezi sebou na příčném trámku. Kde musí být umístěn příčný trámek, aby všichni muži nesli stejně? (Zanedbejte hmotnost příčného trámku.)

11C. Rovnoměrně naložená přepravka tvaru krychle o hraně 0,750 m a tíze 500 N spočívá na podlaze a je zapřena o velmi nízkou pevnou překážku. V jaké výšce nad podlahou musí působit síla 350 N, aby přepravku právě nadzvedla?

12C. Homogenní koule tíhy G a poloměru r visí na vlákně připevněném k dokonale hladké stěně ve výšce d nad středem koule (obr. 13.30). Najděte (a) napětovou sílu přenášenou vláknem, (b) sílu, kterou stěna působí na kouli.

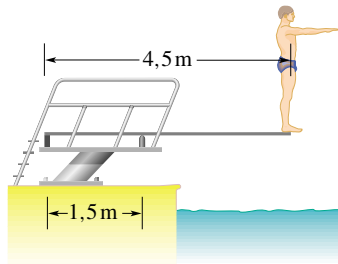
13C. Auto hmotnosti 1 360 kg má rozvor (vzdálenost mezi přední a zadní nápravou) 3,05 m. Těžiště auta je 1,78 m za přední nápravou. Určete zatížení (a) kol přední nápravy, (b) kol zadní nápravy, za předpokladu, že auto stojí na rovině a obě kola téžé nápravy jsou zatížena stejně.



Obr. 13.30
Cvičení 12

14C. Muž o hmotnosti 75 kg se na vodorovné lávce zastaví, když urazil čtvrtinu vzdálenosti od jednoho jejího konce. Lávka je homogenní a její hmotnost je 300 kg. Jakou svislou silou působí lávka a muž (a) na vzdálenější pilíř, (b) na bližší pilíř? Pilíře jsou umístěny na koncích lávky.

15C. Skokan vážící 580 N stojí na konci 4,5 m dlouhého skákacího prkna. Prkno je připevněno k dvěma podpěrám vzdáleným 1,5 m, jak je ukázáno na obr. 13.31. Jaká je velikost a orientace síly působící na prkno od (a) levé podpěry, (b) pravé podpěry? (c) Která podpěra je natahována a která stlačována?

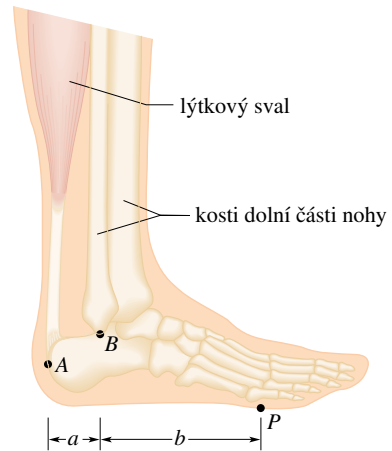


Obr. 13.31
Cvičení 15

16C. Metrové pravítko je vyváženo na břitu podloženém v místě se značkou 50,0 cm. Na značku 12,0 cm položíme na sebe dvě mince a pravítko se nám pak povede vyrovnat, když břit podložíme pod značku 45,5 cm. Jedna mince má hmotnost 5,0 g. Jaká je hmotnost pravítka?

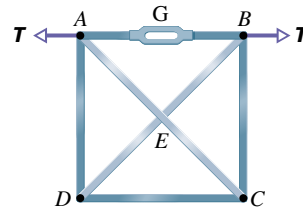
17C. Čistič oken hmotnosti 75 kg užívá žebřík, který má hmotnost 10 kg a je dlouhý 5,0 m. Spodní konec žebříku postaví na podlahu ve vzdálenosti 2,5 m od stěny a vrchní konec opře o narsklé okno v této stěně. Když vyšplhá po žebříku 3,0 m, okno se rozbije. Vypočtěte (a) sílu, jakou žebřík působil na okno bezprostředně před jeho rozbitím, (b) velikost a směr síly, kterou podlaha působila na žebřík v tomto okamžiku. Zanedbejte tření mezi žebříkem a oknem a předpokládejte, že žebřík po podlaze neklouže.

18C. Obr. 13.32 ukazuje anatomickou stavbu spodní části nohy, která umožňuje stání na špičkách. Při něm je pata vysoko zvednutá nad podlahu a chodidlo se dotýká podlahy jen v malém okolí bodu P , které jsme na obrázku označili jako působiště síly podpírající nohu osoby stojící na špičkách. Vypočtěte síly, kterými působí na chodidlo (a) lýtkový sval v bodě A , (b) holenní a lýtková kost v bodě B , když osoba stojí na špičkách. Položte $a = 5,0$ cm a $b = 15,0$ cm a hledané síly vyjádřete v násobcích tíhy G osoby.



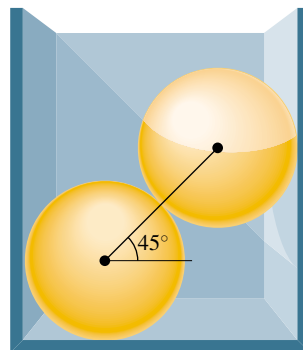
Obr. 13.32
Cvičení 18

19Ú. Stahovákem G zkrátíme tyč AB čtvercového rámu $ABCD$ znázorněného na obr. 13.33. Tím se tyč napne a na body A a B působí síly T mířící ven z rámu. Určete síly působící na ostatní tyče rámu. Najděte, které tyče jsou podrobeny tahu a které tlaku. Úhlopříčné tyče AC a BD se nedotýkají v místě E . Uvážení symetrie rámu zjednoduší řešení této a podobných úloh.



Obr. 13.33
Úloha 19

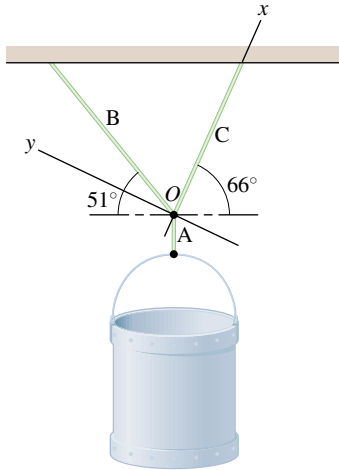
20Ú. Dvě stejné, homogenní koule jsou umístěny v pravouhlé pevné nádobě (obr. 13.34). Najděte síly, které působí na koule (a) od stěn nádoby, (b) síly vzájemného působení koulí, jestliže spojnice těžišť koulí svírá úhel 45° s vodorovnou rovinou. Výsledky vyjádřete v násobcích tíhy jedné koule. Neuvažujte tření.



Obr. 13.34
Úloha 20

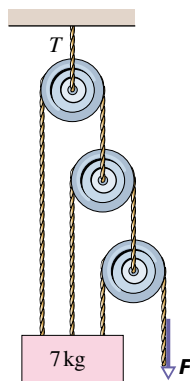
21Ú. Okov o hmotnosti 900 kg je zavěšen na svislém laně A , které je v místě O spojeno se dvěma dalšími lany B a C , která svírají s vodorovnou rovinou úhly 51° a 66° (obr. 13.35). Najděte napěťovou sílu přenášenou (a) lanem A , (b) lanem B , (c) lanem C . (Tip: Abyste nemuseli řešit systém dvou rovnic o dvou

neznámých, zvolte soustavu souřadnic tak, jak je naznačeno na obrázku.)



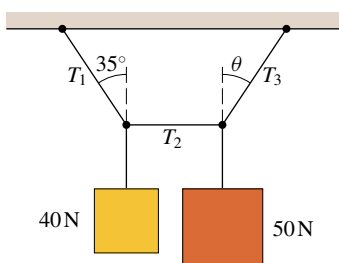
Obr. 13.35
Úloha 21

22Ú. Síla F udržuje v systému znázorněném na obr. 13.36 rovnováhu. Hmotnost bloku je 7 kg. Vypočítejte sílu T přenášenou lanem, na kterém visí systém. Hmotnost kladek a tření v systému zanedbejte.



Obr. 13.36
Úloha 22

23Ú. Systém z obr. 13.37 je v rovnováze, když prostřední vláknko je přesně vodorovné. Najděte (a) sílu T_1 , (b) sílu T_2 , (c) sílu T_3 a úhel θ .

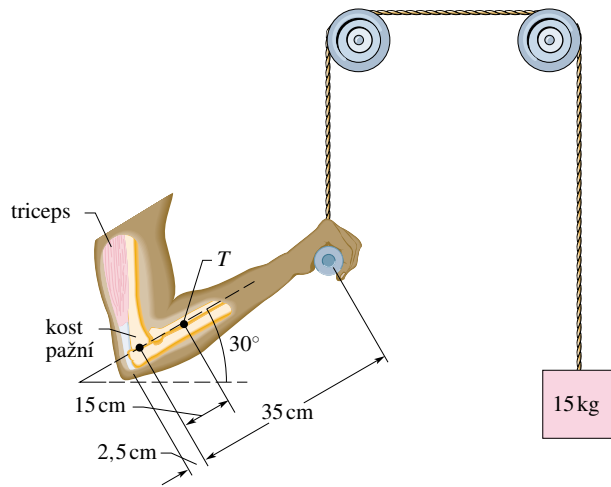


Obr. 13.37
Úloha 23

24Ú. Nerovnoramenné váhy jsou tvořeny pevnou tyčí podepřanou břitem mimo střed tyče a miskami zavěšenými na koncích tyče. Hmotnost tyče a misek budeme v dalších úvahách zanedbávat. Váhy jsou vyrovnány, když závaží hmotnosti m je na

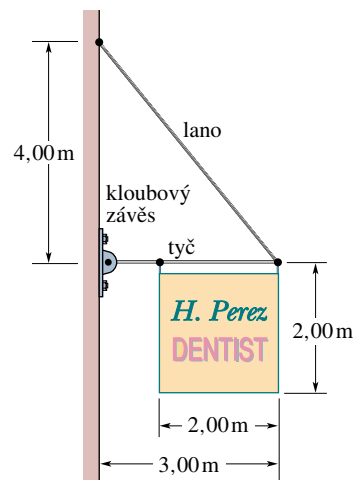
levé misce a závaží hmotnosti m_1 na pravé misce vah. Když umístíme závaží hmotnosti m na pravou misku, musíme dát k vyrovnání vah na levou misku závaží hmotnosti m_2 . Ukažte, že platí $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

25Ú. Závaží o hmotnosti 15 kg je přes dvě kladky taženo rukou, jak je ukázáno na obr. 13.38. Paže je svislá, zatímco předloktí svírá úhel 30° s vodorovnou rovinou. Jakou silou působí na předloktí (a) triceps, (b) pažní kost? Předloktí a ruka mají dohromady hmotnost 2,0 kg. Těžiště systému je 15 cm od loketního kloubu směrem k ruce, místo upnutí tricepsu 2,5 cm na druhou stranu (srovnej s obrázkem).



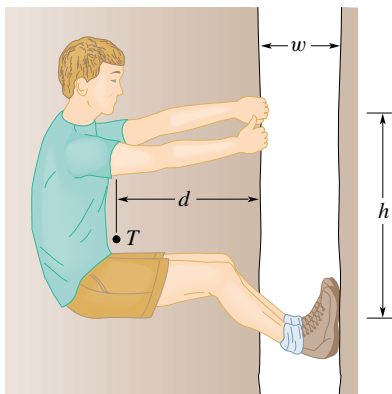
Obr. 13.38 Úloha 25

26Ú. Čtvercový vývěsní štít (hmotnost 50,0 kg, délka strany čtverce 2,0 m) je vysunut do ulice na tyči zanedbatelné hmotnosti a délky 3,00 m. Lano napnuté mezi vzdálenějším koncem tyče a místem upevnění na stěně, které je 4,00 m nad kloubovým závěsem nesoucím tyč, udržuje tyč ve vodorovné poloze (obr. 13.39). (a) Jaká je napěťová síla přenášená lanem? Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou působí stěna přes kloubový závěs na tyč?



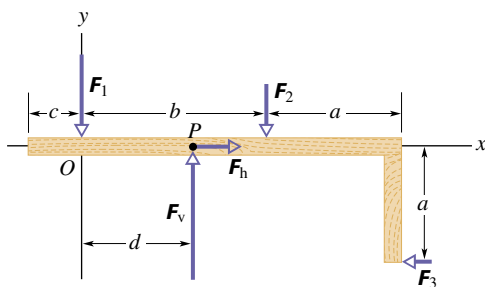
Obr. 13.39
Úloha 26

27Ú. Na obr. 13.40 je schematicky znázorněn horolezec, který leze „na sokolika“ podél štěrbinu, přičemž rukama táhne za jednu stranu štěrbinu a chodidly tlačí na její druhou stranu. Štěrbinu má šířku $w = 0,20$ m. Těžiště horolezce je ve vodorovné vzdálenosti $d = 0,40$ m od bližší stěny štěrbinu. Statický koeficient tření mezi rukama horolezce a skálou je $f_1 = 0,40$ a mezi botami horolezce a skálou $f_2 = 1,2$. (a) Jaký nejmenší tah rukama a tlak nohama ve vodorovném směru udrží horolezce na skále? (b) Jaká musí být při tomto tahu svislá vzdálenost h mezi rukama a nohama, aby horolezec byl v rovnováze? (c) Když se horolezec setká s mokrou skálou, takže hodnoty f_1 a f_2 se zmenší, jak se změní odpovědi na otázky (a) a (b)?



Obr. 13.40 Úloha 27

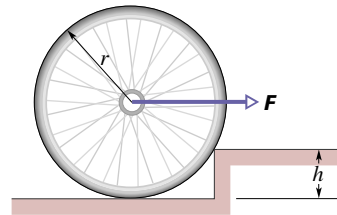
28Ú. Síly F_1 , F_2 a F_3 působí na systém znázorněný na obr. 13.41 při pohledu shora. Chceme dostat systém do rovnováhy tím, že do bodu P s vhodně zvolenou vzdáleností d umístíme sílu s vektorovými složkami F_h a F_v . Zadané jsou hodnoty $a = 2,0$ m, $b = 3,0$ m, $c = 1,0$ m, $F_1 = 20$ N, $F_2 = 10$ N a $F_3 = 5,0$ N. Najděte hodnoty: (a) F_h , (b) F_v a (c) d .



Obr. 13.41 Úloha 28

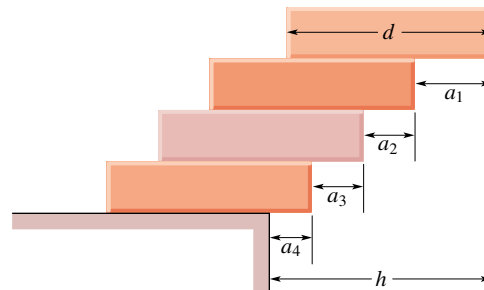
29Ú. Jak velká musí být síla F působící vodorovně na osu kola, aby kolo překonalo schod výšky h (obr. 13.42)? Kolo má poloměr r a váží G .

30Ú. Ve stropě je čtvercový poklop o straně $0,91$ m a hmotnosti 11 kg. Na jedné straně jsou panty, na druhé držadlo. Těžiště poklopu je posunuto o 10 cm směrem k pantům od jeho geometrického středu. Jak velkou sílu musí být schopno přenést (a) držadlo, (b) panty?



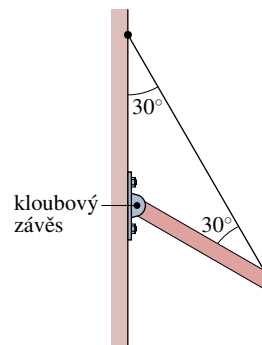
Obr. 13.42 Úloha 29

31Ú. Čtyři stejné cihly délky d jsou naskládány na sebe tak, že každá vyšší o něco přesahuje tu nižší (obr. 13.43). Nalezněte a vyjádřete v násobcích délky d maximální délky přesahů (a) a_1 , (b) a_2 , (c) a_3 , (d) a_4 a (e) h , při kterých ještě stavba zůstane v rovnováze, tedy nepadne.



Obr. 13.43 Úloha 31

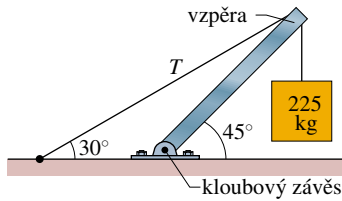
32Ú. Jeden konec tyče hmotnosti 20 kg a délky 1 m je připevněn ke stěně kloubovým závěsem. Druhý konec je zavěšen na vlákně způsobem vyznačeným na obr. 13.44. (a) Najděte napěťovou sílu přenášenou vláknem. Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloubový závěs působí na tyč?



Obr. 13.44 Úloha 32

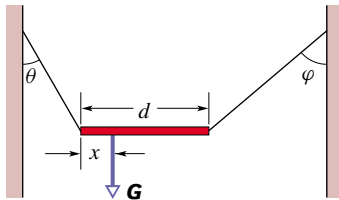
33Ú. Systém na obr. 13.45 je v rovnováze. Závaží o hmotnosti 225 kg je zavěšeno na konci homogenní vzpěry, jejíž hmotnost je 45 kg. Stanovte: (a) sílu přenášenou vláknem T , (b) vodorovnou a (c) svislou složku síly, kterou vzpěra působí na kloubový závěs.

34Ú. Dveře vysoké $2,1$ m a široké $0,91$ m mají hmotnost 27 kg. Jeden pant je umístěn $0,30$ m od vršku dveří, druhý ve stejné vzdálenosti od spodku dveří. Každý z pantů nese polovinu tíhy dveří. Předpokládejte, že těžiště dveří leží v jejich geometrickém

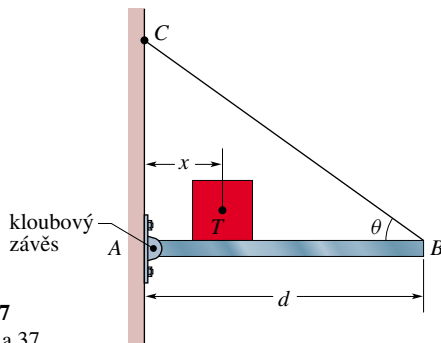
Obr. 13.45
 Úloha 33


středu. Stanovte: (a) svislé a (b) vodorovné složky sil, kterými panty působí na dveře.

35Ú. Nehomogenní tyč tíhy G je zavěšena na dvou lanec tak, že je v rovnováze vodorovná (obr. 13.46). Jedno lano svírá se svislicí úhel $\theta = 36,9^\circ$, druhé úhel $\varphi = 53,1^\circ$. Délka tyče d je 6,1 m. Vypočítejte vzdálenost x těžiště tyče od jejího levého konce.

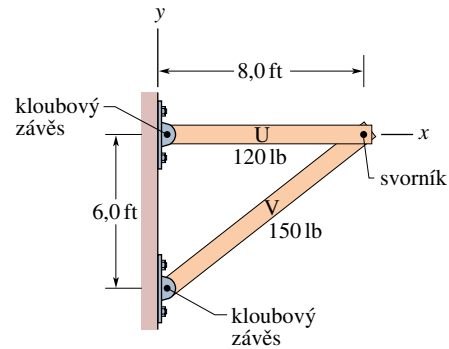

Obr. 13.46
 Úloha 35

36Ú. Na obr. 13.47 je znázorněna vodorovná tyč AB připojená kloubovým závěsem ke svislé stěně a na opačném konci tenkým drátem BC , který se stěnou svírá úhel θ . Závaží se může volně pohybovat podél tyče; jeho polohu určíme udáním vzdálenosti x těžiště závaží od stěny. Zjistěte, jak závisí na x (a) síla přenášená drátem, (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloub působí na tyč. Hmotnost tyče zanedbejte.

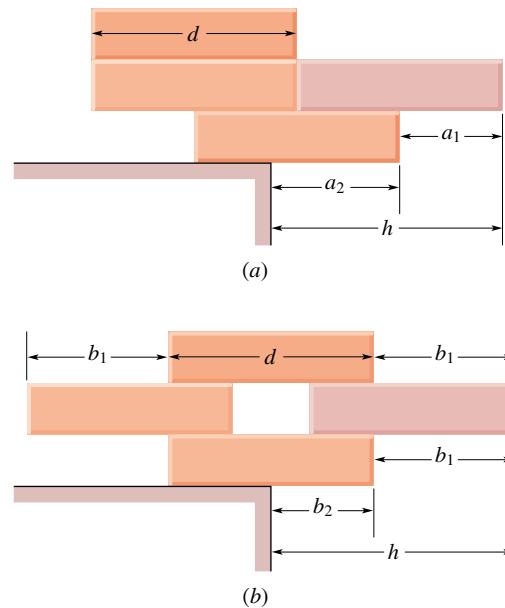

Obr. 13.47
 Úlohy 36 a 37

37Ú. V uspořádání stejném jako v úloze 36 (obr. 13.47) předpokládejte, že délka tyče d je 3,0 m a její váha 200 N. Váha závaží je 300 N a úhel $\theta = 30^\circ$. Drát vydrží maximální zatížení 500 N. (a) Do jaké největší vzdálenosti x můžeme vysunout závaží, než drát praskne? Jaká je přitom velikost (b) vodorovné a (c) svislé složky síly, kterou kloub působí na tyč?

38Ú. Dva homogenní trámy U a V jsou přes kloub připojeni ke stěně a spolu volně spojeni svorníkem (obr. 13.48). Najděte vodorovnou a svislou složku síly působící (a) na trám U od jeho kloubového upevnění, (b) na trám U od svorníku, (c) na trám V od jeho kloubového upevnění a (d) na trám V od svorníku.

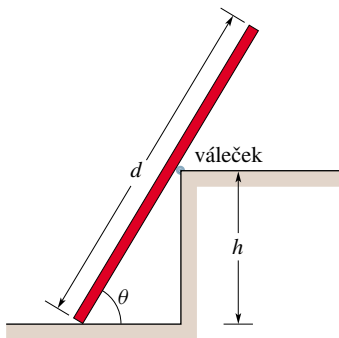
Obr. 13.48
 Úloha 38


39Ú. Čtyři stejné cihly délky d jsou naskládány na stůl dvěma způsoby, jak je ukázáno na obr. 13.49 (srovnejte s úlohou 31). Snažte se v obou případech najít maximální vzdálenost h , o kterou může stavba přesáhnout stůl, aniž by spadla. Vypočítejte (v násobcích d) příslušné vzdálenosti h a nalezněte hodnoty přesahů a_1 , a_2 , b_1 a b_2 , které k dosažení maximálních hodnot h musíte použít. (Podívejte se do *The Amateur Scientist, Scientific American*, June 1985, na podrobnější diskusi příkladu a ještě lepší uspořádání cihel typu (b).)

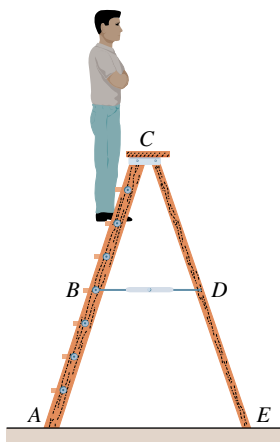

Obr. 13.49 Úloha 39

40Ú. Homogenní fošna délky $d = 14$ m a hmotnosti $m = 50$ kg spočívá na podlaze a kluzném válečku (nulové tření) umístěném na vršku zdi vysoké 3 m (obr. 13.50). Fošna je v rovnováze, když $\theta \geq 70^\circ$, ale podklouzne, když $\theta < 70^\circ$. Určete činitel statického tření mezi fošnou a podlahou.

41Ú. Na obr. 13.51 jsou zobrazeny schůdky spojené osou v místě C s rameny AC a CE dlouhými 2,8 m. Zabezpečovací tyč dlouhá 0,75 m je umístěna v polovině výšky schůdků. Muž hmotnosti 85 kg stojí na schůdku, který je vzdálen 2,1 m od paty schůdků. Najděte: (a) napěťovou sílu v zabezpečovací tyči a síly, kterými podlaha působí na schůdky v místě (b) A a (c) E .

Obr. 13.50
Úloha 40

Zanedbejte hmotnost schůdků a tření mezi schůdky a podlahou. (Tip: Použijte rovnice rovnováhy na jednotlivé části schůdků.)



Obr. 13.51 Úloha 41

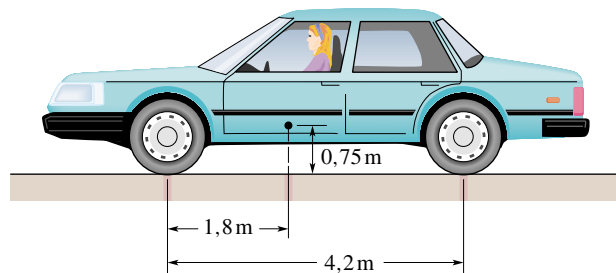
42Ú. Homogenní krychle o straně a spočívá na vodorovné podlaze. Činitel statického tření mezi krychlí a podlahou je f . Vodorovnou silou F tlačíme na jednu stranu krychle v její svislé ose symetrie ve výšce h nad podlahou. Když pomalu zvyšujeme velikost síly F , krychle začne po podlaze buď (a) klouzat, nebo se začne (b) převracet. Pro jaká f nastane případ (a) a pro jaká případ (b)? (Tip: Uvažte, kde je umístěna normálová síla v případě převrácení krychle.)

43Ú. Krychlová krabice naplněná pískem váží 890 N. Chceme krabici uvést do valivého pohybu tím, že začneme ve vodorovném směru tlačit na jednu z jejích vrchních hran. (a) Jakou minimální velikost síly k tomu potřebujeme? (b) Jaký minimální činitel statického tření mezi krabicí a podlahou musí působit? (c) Existuje efektivnější způsob, jak rozkutálet krabici? Jestliže ano, udejte minimální velikost síly, kterou to lze učinit. (Tip: Podívejte se na návod k úloze 42.)

44Ú. Bedna tvaru krychle s délkou hrany 1,2 m obsahuje část stroje, jehož tvar je takový, že se těžiště krychle nachází o 0,3 m výše, než je její geometrický střed. Bedna stojí na rampě, která svírá s vodorovnou rovinou malý úhel θ . Když zvyšujeme úhel θ , dosáhneme hodnoty, při které bedna začne po rampě klouzat, nebo se začne převracet. Jaký případ nastane: (a) když činitel statického tření mezi rampou a bednou je 0,60, (b) když jeho

hodnota je 0,70? Pro oba případy udejte úhel, kdy zjištěný případ nastane. (Tip: Podívejte se na návod k úloze 42.)

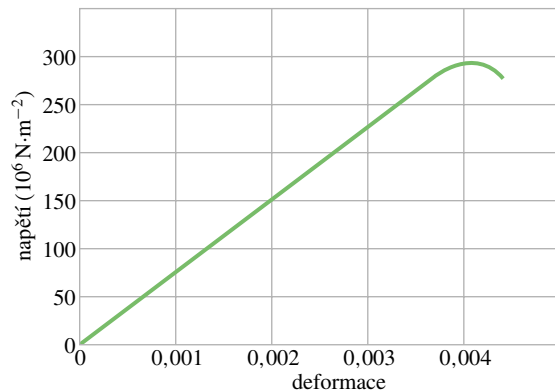
45Ú*. Auto jedoucí po vodorovné silnici prudce zabrzdí, takže všechna čtyři kola se zablokují a smýkají se po silnici. Dynamický činitel tření mezi koly a silnicí je 0,4. Rozvor, tj. vzdálenost mezi osou předních a zadních kol, je 4,2 m a těžiště auta je umístěno 1,8 m za osou předních kol ve výšce 0,75 m nad vozovkou (obr. 13.52). Auto váží 11 kN. Vypočítejte: (a) brzdné zrychlení auta, (b) normálovou sílu působící na každé kolo a (c) brzdou sílu působící na každé kolo. (Tip: Auto při brzdění není sice v rovnováze pro posuvný pohyb, ale dokud se nezačne otáčet, je v rovnováze pro rotační pohyb. Zachování rovnováhy pro rotační pohyb předpokládejte.)



Obr. 13.52 Úloha 45

ODST. 13.6 Pružnost

46C. Na obr. 13.53 je graf závislosti napětí na deformaci (křivka napětí – deformace) pro křemen. Jaký je (a) jeho Youngův modul a jaká je (b) hodnota meze kluzu?



Obr. 13.53 Cvičení 46

47C. Po pádu zjistil horolezec hmotnosti 95 kg, že visí na konci lana. Lano délky 15 m a průměru 9,6 mm se vratně prodloužilo o 2,8 cm. Vypočítejte: (a) relativní prodloužení (deformaci) lana, (b) napětí lana a jeho (c) Youngův modul.

48C. Důlní výtah visí na jediném ocelovém laně o průměru 2,5 cm. Celková hmotnost kabiny výtahu a přepravovaných osob je 670 kg. Jaké bude prodloužení lana, (a) když je výtah na povrchu 12 m pod těžním strojem (motorem výtahu) a (b) když je

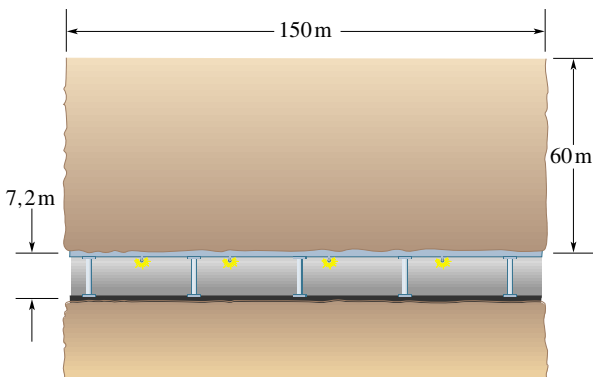
na dně šachty hluboké 350 m? (Při výpočtu zanedbejte hmotnost lana.)

49C. Předpokládejte, že trám na obr. 13.9a je z jedle douglasky a má čtvercový průřez. Jak musí být trám tlustý, aby tlak v něm nepřesáhl $1/6$ jeho meze pevnosti v tlaku? (K řešení použijte výsledku př. 13.5.)

50C. Vodorovná hliníková tyč průměru 4,8 cm vyčnívá 5,3 cm ze zdi. Závaží hmotnosti 1 200 kg je zavěšeno na samý konec tyče. Modul pružnosti ve smyku hliníku je $3,0 \cdot 10^{10}$ Pa. Vypočtete (a) smykové napětí v tyči a (b) svislou odchylku konce tyče, když zanedbáte tíhu tyče.

51C. Jak velký všestranný tlak musí působit na měděnou krychli o hraně 85,5 cm, aby se její hrany zkrátily na 85,0 cm? Objemový modul pružnosti mědi je $1,4 \cdot 10^{11}$ Pa.

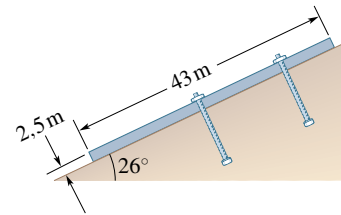
52Ú. Navrhujeme tunel s rovnou střešou dlouhý 150 m, vysoký 7,2 m, široký 5,8 m, který povede 60 m pod zemí (obr. 13.54). Střeša bude držena výlučně ocelovými sloupy, jejichž čtvercový průřez má plochu 960 cm^2 . Zemina v nadloží (nad tunelem) má hustotu $2,8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. (a) Jaká je celková síla, kterou sloupy musí unést? (b) Kolik musí být v tunelu sloupů, aby tlak ve sloupech nepřesáhl hodnotu rovnou polovině meze pevnosti v tlaku?



Obr. 13.54 Úloha 52

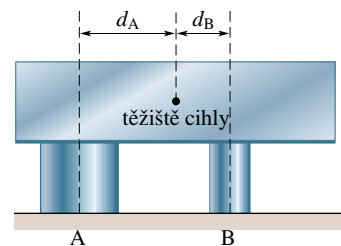
53Ú. Pravoúhlá břidlicová deska spočívá na nakloněné skalní podložce se sklonem 26° (obr. 13.55). Deska je 43 m dlouhá, 2,5 m tlustá a 12 m široká. Hustota desky je $3,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Činitel statického tření mezi deskou a podložní skálou je 0,39. (a) Vypočítejte složku tíhy desky působící podél nakloněné podložky. (b) Vypočítejte celkovou sílu statického tření působící na desku. Porovnáním výsledků (a) a (b) zjistíte, že desce hrozí sklouznutí z podložky a brání jí v tom pouze náhodné výčnělky vytvářející slabé přechodné záchyty. (c) Aby se deska upevnila, je kolmo provrtána i s podložní skálou a do otvorů jsou zasazeny svorníky. Jestliže plocha průřezu každého svorníku je $6,4 \text{ cm}^2$ a mez pevnosti ve smyku materiálu, z kterého je svorník vyroben, je $3,6 \cdot 10^8$ Pa, kolik svorníků musíme užít k upevnění desky? Předpokládejte, že svorníky jsou přitaženy tak mírně, že neovlivní velikost normálové síly (tlak desky na podložku).

54Ú. Olověná deska spočívá vodorovně na válcih A a B, jak



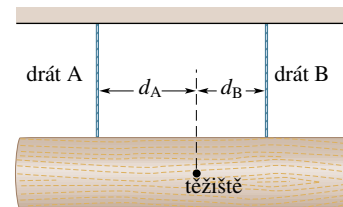
Obr. 13.55
Úloha 53

je ukázáno na obr. 13.56. Válec A má dvakrát větší Youngův modul a dvakrát větší průřez než válec B. Než byly válce deformovány cihlou, měly stejnou délku. Jaká část tíhy cihly je podepřena (a) válcem A a (b) válcem B? Vodorovné vzdálenosti mezi těžištěm cihly a osami válců jsou d_A pro válec A a d_B pro válec B. (c) Jaký je poměr d_A/d_B ?



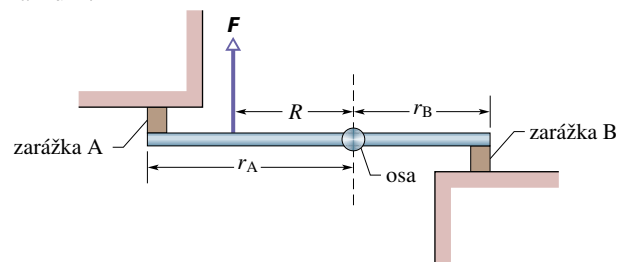
Obr. 13.56
Úloha 54

55Ú. Homogenní kláda hmotnosti 103 kg visí na dvou ocelových drátech A a B, které mají poloměr 1,2 mm. Původně byl drát A 2,50 m dlouhý a byl o 2 mm kratší než drát B. Po zavěšení je kláda vodorovně. Jakou silou ji drží (a) drát A, (b) drát B? Jaký je poměr délek d_A/d_B ?



Obr. 13.57
Úloha 55

56Ú. Na obr. 13.58 je pohled shora na pevnou tyč, která se může otáčet kolem svislé osy, dokud ji nezastaví dvě stejné gumové zarážky A a B umístěné na tyči ve vzdálenosti r_A a r_B od osy. Nejprve zarážky po zastavení tyče zůstanou ve stavu, kdy nejsou stlačeny. Potom začne na tyč působit síla F ve vzdálenosti R od osy otáčení. Najděte síly, které stlačují (a) zarážku A, (b) zarážku B.



Obr. 13.58 Úloha 56