

# 33. Elektromagnetické oscilace a střídavý proud

Témata:

- \* elektromagnetické oscilace v LC obvodu
- \* obvody se střídavým proudem (AC) s kondenzátory
- \* rezonance v RLC obvodech
- \* výkon ve střídavých obvodech
- \* transformátory, přenos elektrické energie střídavým proudem

# 33

## *Elektromagnetické kmity a střídavé proudy*



---

*Vyžadují-li vysokonapěťová výkonová vedení opravu, nemohou je rozvodné společnosti jednoduše odpojit, protože by se propadla do tmy třeba celá města. Opravy se proto musejí provádět na vedeních pod napětím. Muž na obrázku právě vyměnil distanční rozpěrku na 500 kV vedení, což vyžaduje značnou zkušenost. Proč je vlastně napětí výkonových přenosových vedení tak vysoké? Proud tekoucí vedením je přitom vzhledem k přenášenému výkonu relativně malý. Nemohl by být větší?*

---

### 33.1 NOVÁ FYZIKA — STARÁ MATEMATIKA

V této kapitole uvidíme, jak se s časem mění elektrický náboj  $Q$  v obvodu sestaveném z cívky  $L$ , kondenzátoru  $C$  a rezistoru  $R$ . Z jiného pohledu vzato budeme probírat, jak se energie přenáší tam a zpět mezi magnetickým polem cívky a elektrickým polem kondenzátoru, přičemž jí v průběhu těchto oscilací ubývá (a rezistor se zahřívá).

Kmity mechanické jsme již probírali dříve. V kap. 16 jsme viděli, jak se s časem mění výchylka  $x$  v mechanické kmitající soustavě skládající se z tělesa s hmotností  $m$ , pružiny s tuhostí  $k$  a prvku s výraznou viskozitou (např. olej) nebo s třením. Taková soustava je znázorněna na obr. 16.17. Z obrázku také vidíme, jak mechanická energie prochází periodickou změnou kinetické energie kmitajícího tělesa na potenciální energii deformované pružiny, přičemž je během kmitání postupně disipována.

Mezi těmito dvěma (idealizovanými) soustavami je analogie a také diferenciální rovnice popisující tyto procesy jsou stejné. Nemusíme tedy studovat novou matematiku a budeme věnovat plnou pozornost fyzikálnímu ději.

### 33.2 KVALITATIVNÍ ROZBOR KMITŮ $LC$

Ze tří obvodových prvků, rezistoru  $R$ , kondenzátoru  $C$  a cívky  $L$ , jsme dosud probrali sériové zapojení  $RC$  v čl. 28.8 a  $RL$  v čl. 31.9. Poznali jsme, že v těchto dvou typech obvodů náboj, proud a napětí narůstá a klesá s časem exponenciálně. Časový průběh růstu nebo poklesu lze charakterizovat příslušnou časovou konstantou  $\tau_C$  nebo  $\tau_L$ .

Nyní zkoumejme třetí možnost — sériové zapojení  $LC$ . Uvidíme, že v tomto případě náboj, proud a napětí neklesají exponenciálně s časem, ale mění se harmonicky (s dobou kmitu  $T$  a úhlovou frekvencí  $\omega$ ). Říkáme, že obvod *kmitá* neboli *osciluje* a příslušné změny elektrického pole kondenzátoru a magnetického pole cívky se nazývají **elektromagnetické kmity**. Části (a) až (h) na obr. 33.1 ukazují po sobě jdoucí fáze průběhu kmitů v jednoduchém kmitavém obvodu  $LC$ .

Metoda opravování vysokonapěťových vedení, zobrazená na úvodní fotografii, je patentována Scottem H. Yenzerem a vlastníkem licence je výhradně Haverfield Corporation z Miami na Floridě. Jakmile se opravář přiblíží k vedení pod napětím, elektrické pole okolo vedení způsobí, že jeho tělo získá potenciál blízký potenciálu vedení. Aby se oba potenciály vyrovnaly, připojí se opravář vodivou tyčí k vedení. Aby nebyl usmrcen elektrickým proudem, musí být izolován od všeho, co je elektricky spojeno se zemí. A aby jeho tělo bylo na konstantním potenciálu — potenciálu vedení, má oblečen vodivý oblek s kapucí a rukavicemi, které jsou spojeny pomocí vodiče s vedením.

Podle rov. (26.21) je energie uložená v elektrickém poli kondenzátoru v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\text{el}}(t) = \frac{Q^2(t)}{2C}, \quad (33.1)$$

kde  $Q(t)$  je náboj na kondenzátoru v čase  $t$ . Podle rovnice (31.53) je energie uložená v magnetickém poli cívky v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\text{mg}}(t) = \frac{LI^2(t)}{2}, \quad (33.2)$$

kde  $I(t)$  je proud protékající cívkou v čase  $t$ .

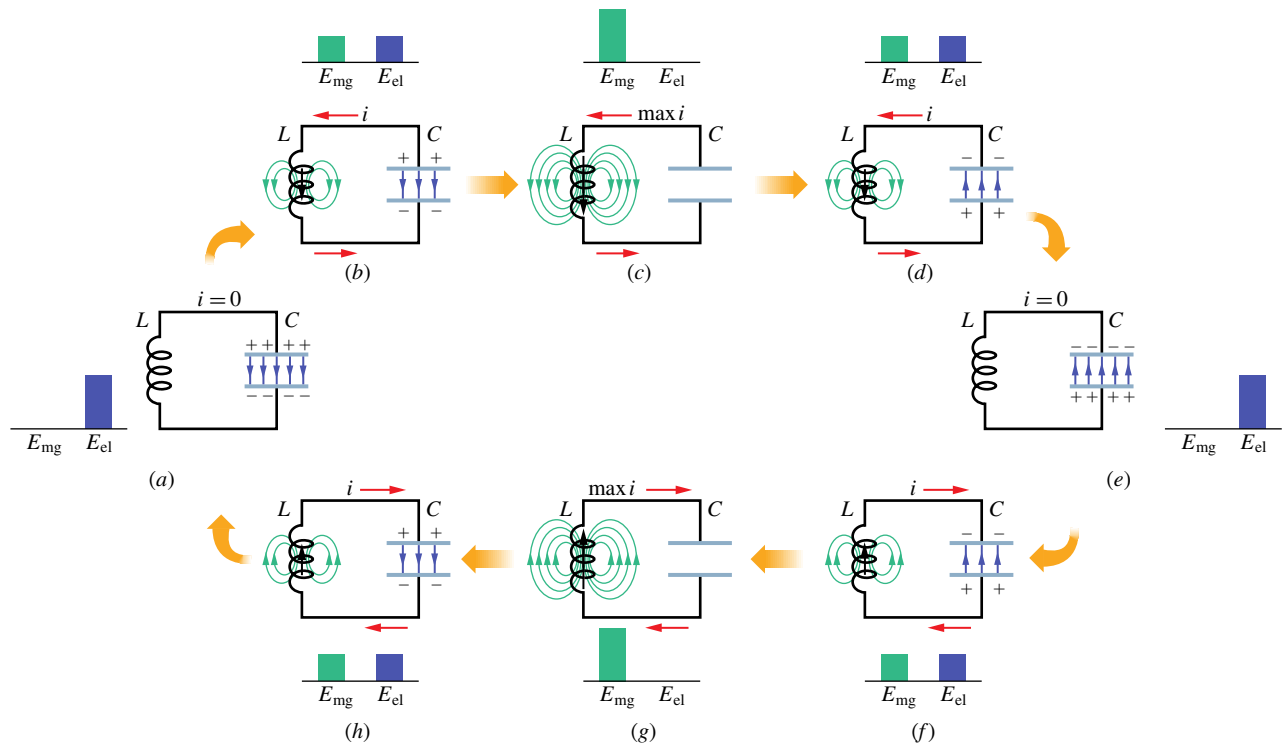
Přijmeme dále dohodu, že k vyjádření *okamžitých hodnot* elektrických veličin, které kmitají *harmonicky*, použijeme malá písmena ( $q, i, u, e$ ) a pro jejich *amplitudy* velká písmena ( $Q, I, U, \mathcal{E}$ ).

Předpokládejme, že počáteční náboj  $q$  na kondenzátoru je roven jeho amplitudě  $Q$  a počáteční proud  $i$  cívkou je nulový. Tento výchozí stav obvodu je na obr. 33.1a. Sloupcové grafy pro energii ukazují, že v tomto okamžiku při nulovém proudu v cívce a maximálním napětí na kondenzátoru je energie  $E_{\text{mg}}$  magnetického pole nulová a energie  $E_{\text{el}}$  elektrického pole je maximální.

Kondenzátor se nyní začne vybíjet přes cívku. Kladný náboj se pohybuje proti směru otáčení hodinových ručiček (obr. 33.1b), což znamená, že vznikne proud  $i = dq/dt$ , který na obrázku směřuje v cívce dolů. Spolu s nábojem na kondenzátoru klesá i jeho energie. Tato energie se přeměňuje na energii magnetického pole cívky tak, jak narůstá proud  $i$ . Energie elektrického pole tedy klesá a mění se v energii pole magnetického.

Kondenzátor nakonec ztratí všechny náboj (obr. 33.1c), a tím také své elektrické pole a energii v tomto poli akumulovanou. Energie je zcela převedena do magnetického pole cívky. Protože magnetické pole má v tomto okamžiku největší hodnotu, má svou maximální hodnotu  $I$  také proud tekoucí cívkou.

Ačkoli náboj na kondenzátoru je nyní nulový, proud dále teče proti směru otáčení hodinových ručiček, neboť v důsledku elektromagnetické indukce cívka nedovolí, aby náhle zanikl. To znamená, že proud pokračuje v přenosu kladného náboje z horní elektrody kondenzátoru na jeho dolní elektrodu obvodem (obr. 33.1d). Energie nyní přechází z cívky zpět do kondenzátoru tak, jak postupně znovu narůstá elektrické pole kondenzátoru. Proud postupně během přenosu energie klesá. Když je nakonec všechna energie přenesena zpět do kondenzátoru (obr. 33.1e), proud klesne na okamžik na nulu. Situace na obr. 33.1e je stejná



**Obr. 33.1** Osm stavů jedné periody kmitů v ideálním obvodu  $LC$  (bez odporu). Sloupcové grafy u každého obrázku ukazují velikost energie uložené v magnetickém a v elektrickém poli. Jsou též naznačeny indukční čáry magnetického pole cívky a elektrické siločáry v kondenzátoru. (a) Kondenzátor má maximální náboj a proud je nulový. (b) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá. (c) Kondenzátor je zcela vybit a proud je maximální. (d) Kondenzátor je nabíjen, ale s opačnou polaritou než v (a). (e) Kondenzátor má maximální náboj opačné polarity než v (a), proud je nulový. (f) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá v opačném směru než v (b). (g) Kondenzátor je zcela vybit, proud je maximální. (h) Kondenzátor je nabíjen, proud klesá.

jako původní (obr. 33.1a), s tím rozdílem, že kondenzátor je nyní nabit opačně.

Kondenzátor se potom začíná znovu vybíjet, avšak nyní proudem ve směru otáčení hodinových ručiček. Z důvodů právě uvedených vidíme, že proud vzrůstá k maximu (obr. 33.1g) a pak klesá (obr. 33.1h), až se obvod nakonec dostane do původního stavu (obr. 33.1a). Celý proces se opakuje s kmitočtem  $f$  a tedy úhlovou frekvencí  $\omega = 2\pi f$ . V ideálním obvodu bez odporu neprobíhá jiná přeměna energie než mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Podle zákona zachování energie by kmity pokračovaly nekonečně dlouho. Kmity nemusejí začínat s veškerou energií v elektrickém poli — počátečním stavem může být kterýkoli jiný stav během kmitu.

Abychom našli časový průběh náboje  $q$  na kondenzátoru, budeme na něm měřit voltmetrem napětí  $u_C$ . Z rov. (26.1) plyne

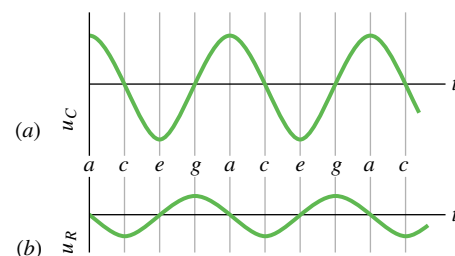
$$u_C = \left(\frac{1}{C}\right)q,$$

odkud můžeme vyjádřit  $q$ . Abychom změřili proud, zapojíme do série s kondenzátorem a cívkou malý rezistor  $R$

a změříme časově proměnné napětí  $u_R$  na rezistoru; to je úměrné  $i$  podle vztahu

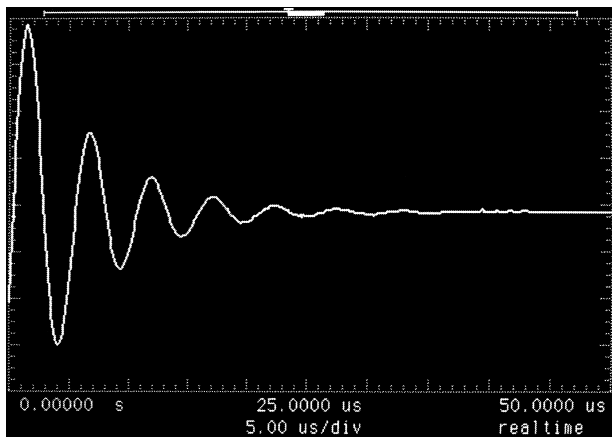
$$u_R = iR.$$

Přitom předpokládáme, že odpor  $R$  je tak malý, že jeho vliv na chování obvodu je zanedbatelný. Časový průběh  $u_C$  a  $u_R$ , a tedy také  $q$  a  $i$  je naznačen v obr. 33.2. Všechny čtyři veličiny se mění s časem harmonicky.



**Obr. 33.2** (a) Napětí  $u_C$  na kondenzátoru v obvodu z obr. 33.1 jako funkce času  $t$ . Napětí  $u_C$  je úměrné náboji  $q$  na kondenzátoru. (b) Napětí  $u_R$  na malém rezistoru je úměrné proudu  $i$  v obvodu z obr. 33.1. Písmena se vztahují ke stejné označeným stavům kmitajícího obvodu z obr. 33.1.

Ve skutečném obvodu  $LC$  nebudou kmity trvat nekonečně dlouho, protože obvod má vždy jistý odpor, který odčerpá energii z elektrického a magnetického pole a rozptýlí ji (obvod se zahřeje). Vybuzené kmity postupně zaniknou, jak je vidět z obr. 33.3. Porovnejte tento obrázek s obr. 16.18, který ukazuje útlum mechanických kmitů, způsobený třením v soustavě pružina + těleso.



**Obr. 33.3** Stopa na stínítku osciloskopu ukazuje útlum oscilací v obvodu  $RLC$  v důsledku disipace energie v rezistoru.

**KONTROLA 1:** Nabitý kondenzátor a cívka jsou spojeny do série v čase  $t = 0$ . Určete v násobcích periody  $T$  kmitů obvodu  $LC$ , kdy poprvé pro  $t > 0$  dosáhne maximální hodnotu (a) náboj na kondenzátoru, (b) napětí na kondenzátoru s původní polaritou, (c) energie akumulovaná v elektrickém poli, (d) proud.

### PŘÍKLAD 33.1

Kondenzátor o kapacitě  $1,5 \mu\text{F}$  je nabit na napětí  $57 \text{ V}$ . Potom je odpojen od zdroje a připojen k cívce s indukčností  $12 \text{ mH}$ . Takto vzniklý obvod  $LC$  bude kmitat. Jaký bude největší proud v cívce? Předpokládejte, že odpor obvodu je zanedbatelný.

**ŘEŠENÍ:** Ze zákona zachování energie plyne, že maximální energie v kondenzátoru je rovna maximální energii v cívce. To podle rov. (33.1) a (33.2) znamená, že

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{LI^2}{2},$$

kde  $I$  je maximální proud a  $Q$  je maximální náboj. (Maximální proud a maximální náboj se nevyskytnou ve stejném okamžiku, ale jsou posunuty v čase o čtvrtinu periody, jak je zřejmé i z obr. 33.1 a 33.2.) Z uvedeného vztahu vypočteme  $I$

(za  $Q$  dosadíme  $CU$ ) a tím dostaneme

$$I = U \sqrt{\frac{C}{L}} = (57 \text{ V}) \sqrt{\frac{(1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F})}{(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})}} = 0,637 \text{ A} \doteq 640 \text{ mA.} \quad (\text{Odpověď})$$

## 33.3 ELEKTRO-MECHANICKÁ ANALOGIE

Podívejme se poněkud blíže na analogii mezi kmitajícím obvodem  $LC$  z obr. 33.1 a kmitající soustavou tvořenou tělesem a pružinou. V mechanické soustavě těleso + pružina se vyskytují dva druhy energie: jednak potenciální energie stlačené nebo napnuté pružiny, jednak kinetická energie pohybujícího se tělesa. Oba druhy energie jsou popsány známými vztahy v tab. 33.1 vlevo.

Tabulka také ukazuje dva druhy energie v kmitajícím obvodu  $LC$ . Můžeme vidět analogii mezi dvojicemi: potenciální + kinetická energie mechanické soustavy a magnetická + elektrická energie obvodu  $LC$ . Rovnice pro  $v$  a  $i$  na konci tabulky pomáhají lépe pochopit tuto analogii. Říkájí nám, že náboj  $q$  odpovídá výchylka  $x$  a proud  $i$  odpovídá rychlost  $v$  (v obou rovnicích se druhá veličina získá derivací veličiny první). Tato obdoba nás vede k tomu, abychom seskupili energie do dvojic v řádcích tak, jak jsou v tabulce. Z tabulky vyplývá, že veličině  $1/C$  odpovídá tuhost  $k$  a indukčnosti  $L$  odpovídá hmotnost  $m$ :

$$\begin{aligned} q &\text{ odpovídá } x, & 1/C &\text{ odpovídá } k, \\ i &\text{ odpovídá } v, & L &\text{ odpovídá } m. \end{aligned}$$

Podle matematického popisu je tedy obvod  $LC$  analogický soustavě těleso + pružina, kondenzátor odpovídá pružině a cívka tělesu.

**Tabulka 33.1** Energie prvků kmitajících soustav

| TĚLESO + PRUŽINA |                           | CÍVKA + KONDENZÁTOR |                                  |
|------------------|---------------------------|---------------------|----------------------------------|
| PRVEK            | ENERGIE                   | PRVEK               | ENERGIE                          |
| pružina          | $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ | kondenzátor         | $E_{el} = \frac{1}{2} (1/C) q^2$ |
| těleso           | $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ | cívka               | $E_{mg} = \frac{1}{2} L i^2$     |
| $v = dx/dt$      |                           | $i = dq/dt$         |                                  |

Z čl. 16.3 víme, že úhlová frekvence kmitů soustavy těleso + pružina při zanedbání tření je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{soustava těleso + pružina}). \quad (33.3)$$

Uvedená analogie nás vede k tomu, abychom pro stanovení úhlové frekvence kmitů v obvodu  $LC$  (bez odporu) nahradili  $k$  veličinou  $1/C$  a  $m$  veličinou  $L$ . Tím dostaneme

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{obvod } LC). \quad (33.4)$$

Tento výsledek odvodíme v následujícím článku.

### 33.4 KMITY LC KVANTITATIVNĚ

Nyní potvrdíme platnost rov. (33.4) pro úhlovou frekvenci kmitů  $LC$ . Současně budeme podrobněji zkoumat analogii mezi kmity obvodu  $LC$  a kmity soustavy těleso + pružina. Začneme tak, že rozšíříme naše dřívější studium kmitající soustavy těleso + pružina.

#### Oscilátor těleso + pružina

Kmity soustavy těleso + pružina jsme studovali v kap. 16 z hlediska přenosu energie. Tehdy jsme si však neodvodili základní rovnici, která mechanické kmity popisuje. To provedeme nyní.

Pro celkovou energii  $E$  oscilátoru těleso + pružina v libovolném okamžiku můžeme psát

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (33.5)$$

kde  $E_k$  je kinetická energie pohybujícího se tělesa a  $E_p$  je potenciální energie napnuté nebo stlačené pružiny. Přitom zanedbáváme tření, takže se celková energie  $E$  s časem nemění, i když se  $v$  a  $x$  mění. Platí tedy  $dE/dt = 0$ . Derivace rov. (33.5) podle času dává

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = \\ &= mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (33.6)$$

Avšak  $v = dx/dt$ , a tedy  $dv/dt = d^2x/dt^2$ . Dosazením do rov. (33.6) pak dostaneme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{kmity tělesa na pružině}). \quad (33.7)$$

Diferenciální rovnice (33.7) je základní diferenciální rovnicí popisující kmity v soustavě těleso + pružina při zanedbání tření. Vystupuje v ní výchylka z rovnovážné polohy  $x$  a její druhá derivace podle času.

Obecné řešení rov. (33.7), tj. funkce  $x(t)$ , která popisuje kmity soustavy těleso + pružina, je, jak víme z rov. (16.3),

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{výchylka}), \quad (33.8)$$

kde  $X$  je amplituda výchylky mechanických kmitů (v kapitole 16 značená  $x_m$ ),  $\omega$  je úhlová frekvence kmitů a  $\varphi$  je počáteční fáze.

#### Oscilátor LC

Studujme nyní kmity v obvodu  $LC$  beze ztrát. Postupujme přitom stejně jako v případě soustavy těleso + pružina. Celková energie  $E$ , kterou má v každém okamžiku kmitající obvod  $LC$ , je

$$E = E_{\text{mg}} + E_{\text{el}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \quad (33.9)$$

kde  $E_{\text{mg}}$  je energie magnetického pole cívky a  $E_{\text{el}}$  je energie elektrického pole kondenzátoru. Protože jsme předpokládali, že odpor obvodu je nulový, energie není disipována, takže  $E$  zůstává v čase konstantní. Jinak řečeno, změna  $dE/dt$  je rovna nule. To vede ke vztahu:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = \\ &= Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (33.10)$$

Avšak  $i = dq/dt$  a  $di/dt = d^2q/dt^2$ . Dosazením do rov. (33.10) dostaneme

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{kmity obvodu } LC), \quad (33.11)$$

což je *diferenciální rovnice*, která popisuje kmity v obvodu  $LC$  beze ztrát. Při porovnání rov. (33.11) a (33.7) vidíme, že mají stejný matematický tvar a liší se pouze jiným pojmenováním proměnných a konstant.

Protože tyto diferenciální rovnice jsou matematicky stejné, jejich řešení musí být také stejná. Protože  $q$  odpovídá  $x$ , můžeme napsat obecné řešení rov. (33.11) pro  $q$  analogicky s rov. (33.8):

$$\begin{aligned} q &= Q \cos(\omega t + \varphi) \\ & \quad (\text{časový průběh náboje}), \end{aligned} \quad (33.12)$$

kde  $Q$  je amplituda proměnného náboje,  $\omega$  je úhlová frekvence elektromagnetických kmitů a  $\varphi$  je počáteční fáze.

První derivace rov. (33.12) podle času dává proud tekoucí v obvodu  $LC$ :

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \varphi) \\ & \quad (\text{časový průběh proudu}). \end{aligned} \quad (33.13)$$

Amplituda  $I$  tohoto harmonicky proměnného proudu je

$$I = \omega Q, \quad (33.14)$$

takže rov. (33.13) můžeme přepsat do tvaru

$$i = -I \sin(\omega t + \varphi). \quad (33.15)$$

Vztah (33.12) je řešením rov. (33.11). Ověříme to tak, že ho dosadíme spolu s jeho druhou derivací podle času do rov. (33.11). První derivací rov. (33.12) je rov. (33.13). Druhou derivací je

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 Q \cos(\omega t + \varphi).$$

Dosazením za  $q$  a za  $d^2 q/dt^2$  do rov. (33.11) dostaneme

$$-L\omega^2 Q \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} Q \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Má-li toto platit v libovolném okamžiku  $t$ , musí být  $-L\omega^2 Q + Q/C = 0$ , odkud

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Za této podmínky je tedy rov. (33.12) opravdu řešením rov. (33.11). Všimněme si, že tento výraz pro  $\omega$  je stejný jako vztah (33.4), získaný na základě elektromechanické analogie.

Amplitudu  $Q$  i počáteční fázi  $\varphi$  určíme z počátečních podmínek. Jestliže v čase  $t = 0$  neteče obvodem proud, tj.  $i(0) = 0$ , musí být  $\varphi = 0$  a okamžitý náboj  $q(0)$  musí nabývat své maximální hodnoty  $Q$ . Těmto počátečním podmínkám odpovídá obr. 33.1a.

Energii uloženou v elektrickém poli obvodu  $LC$  v libovolném čase  $t$  dostaneme z rov. (33.1) a (33.12):

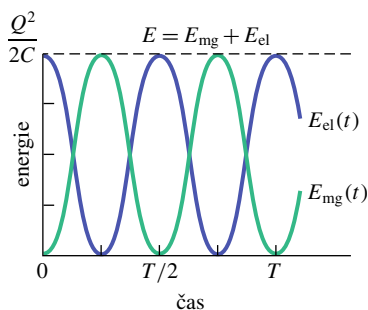
$$E_{\text{el}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (33.16)$$

energii uloženou v magnetickém poli dostaneme z rovnic (33.2) a (33.13):

$$E_{\text{mg}} = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L\omega^2 Q^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Když za  $\omega$  dosadíme z rov. (33.4), dostaneme

$$E_{\text{mg}} = \frac{Q^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (33.17)$$



**Obr. 33.4** Energie elektrického a magnetického pole v kmitavém obvodu  $LC$  (obr. 33.1) vyjádřená jako funkce času. Po všimněme si, že úhrnná energie zůstává konstantní.  $T$  je perioda kmitů.

Obr. 33.4 znázorňuje časové průběhy  $E_{\text{el}}(t)$  a  $E_{\text{mg}}(t)$  pro případ  $\varphi = 0$ . Poznamenejme, že:

1. Maximální hodnota jak  $E_{\text{el}}$ , tak i  $E_{\text{mg}}$  je rovna  $Q^2/(2C)$ .
2. Součet  $E_{\text{el}}$  a  $E_{\text{mg}}$  je roven v každém okamžiku  $Q^2/(2C)$ .
3. V okamžiku, kdy je energie  $E_{\text{el}}$  maximální, je  $E_{\text{mg}}$  minimální (nulová) a naopak.

**KONTROLA 2:** Kondenzátor v obvodu  $LC$  má maximální napětí 17 V a maximální energii 160  $\mu\text{J}$ . Stanovte (a) emn na cívce a (b) energii akumulovanou v magnetickém poli v okamžiku, kdy je na kondenzátoru napětí 5 V a energie 10  $\mu\text{J}$ .

### PŘÍKLAD 33.2

(a) Vyjádřeme pomocí maximálního náboje  $Q$  náboj  $q$  na kondenzátoru kmitavého obvodu  $LC$  v okamžiku, kdy je energie rozdělena stejným dílem mezi elektrické a magnetické pole. Předpokládejme, že  $L = 12 \text{ mH}$  a  $C = 1,7 \text{ }\mu\text{F}$ .

**ŘEŠENÍ:** Podle zadání je  $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} E_{\text{el,max}}$ . Okamžitá a maximální energie akumulovaná v kondenzátoru jsou

$$E_{\text{el}} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{\text{el,max}} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Zadání vyžaduje, aby

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2C},$$

a odtud

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \doteq 0,707 Q. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Kdy je tato podmínka splněna, má-li kondenzátor největší náboj v čase  $t = 0$ ?

**ŘEŠENÍ:** Rov. (33.12) vyjadřuje, jak se  $q$  mění s časem. Protože v čase  $t = 0$  je  $q = Q$ , je počáteční fáze  $\varphi$  rovna nule. Dosazením  $\varphi = 0$  a  $q = 0,707 Q$  do rov. (33.12) dostaneme

$$0,707 Q = Q \cos \omega t,$$

odkud

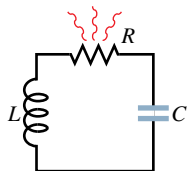
$$\omega t = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

To odpovídá jedné osmině kmitu. Dosadíme-li za  $\omega$  z rovnice (33.4), dostaneme hledaný čas

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(1,7 \cdot 10^{-6} \text{ F})}}{4} = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ s} \doteq 110 \text{ }\mu\text{s}. \quad (\text{Odpověď})$$

### 33.5 TLUMENÉ KMITY V OBVODU $RLC$

Obvod skládající se z rezistoru, cívky a kondenzátoru se nazývá **obvod  $RLC$** . Probereme zde pouze **sériový obvod  $RLC$** , který je na obr. 33.5. Je-li přítomen rezistor  $R$ , potom celková *elektromagnetická energie*  $E$  obvodu (součet energie elektrického a magnetického pole) již nezůstává konstantní, ale klesá s časem tak, jak je energie postupně disipována v rezistoru. Proto také postupně klesá amplituda kmitů náboje, proudu a napětí; říkáme, že kmitů jsou **tlumené**. Jak uvidíme, jsou kmitů v obvodu  $RLC$  tlumeny stejně jako je tomu v tlumené soustavě těleso + pružina (čl. 16.8).



**Obr. 33.5** Sériový obvod  $RLC$ . Protože proud v obvodu prochází (střídavě) rezistorem, dochází k disipaci elektromagnetické energie a kmitů se tlumí (zmenšuje se jejich amplituda).

Abychom tyto kmitů analyzovali, napíšeme rovnici pro celkovou energii  $E$  elektromagnetického pole tohoto obvodu, a to pro libovolný okamžik. Tato energie se ukládá jen v cívce a kondenzátoru podle rov. (33.9):

$$E = E_{\text{mg}} + E_{\text{el}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \quad (33.18)$$

Nyní však již celková energie není konstantní, ale klesá tak, jak je postupně disipována. Rychlost této disipace (tj. ztrátový výkon) je podle rov. (27.22)

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2, \quad (33.19)$$

kde znaménko minus říká, že  $E$  s časem klesá. Derivací rov. (33.18) podle času a dosazením výsledku do rovnice (33.19) dostaneme

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -i^2 R.$$

Dosadíme-li  $dq/dt$  za  $i$  a  $d^2q/dt^2$  za  $di/dt$ , dostaneme po vykrácení  $i$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{obvod } RLC), \quad (33.20)$$

což je diferenciální rovnice popisující tlumené kmitů v sériovém obvodu  $RLC$ .

Tato rovnice má řešení

$$q = Qe^{-Rt/(2L)} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \quad (33.22)$$

a  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  je stejné jako v případě netlumených kmitů. Rov. (33.21) vyjadřuje, jak se v čase mění náboj  $Q$  na kondenzátoru v tlumeném obvodu  $RLC$ . Tato rovnice je elektromagnetickým protějškem rov. (16.40), která určuje časový průběh výchylky tlumeného mechanického oscilátoru těleso + pružina.

Rov. (33.21) popisuje kmitů (kosinový člen) s *exponenciálně klesající amplitudou*  $Qe^{-Rt/(2L)}$ . Úhlová frekvence  $\omega'$  tlumených kmitů je tedy vždy menší než úhlová frekvence  $\omega$  netlumených kmitů; pokud je odpor  $R$  dostatečně malý, lze  $\omega'$  nahradit hodnotou  $\omega$ .

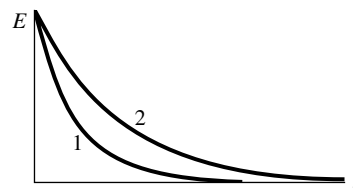
Vyjádříme dále celkovou elektromagnetickou energii  $E$  obvodu jako funkci času. Jeden způsob, jak toho dosáhnout, je sledovat energii elektrického pole v kondenzátoru; ta je dána rov. (33.1)  $E_{\text{el}} = q^2/(2C)$ . Dosadíme-li do ní rov. (33.21), dostaneme

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{q^2}{2C} = \frac{(Qe^{-Rt/(2L)} \cos(\omega' t + \varphi))^2}{2C} = \\ &= \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L} \cos^2(\omega' t + \varphi). \end{aligned} \quad (33.23)$$

Rov. (33.23) ukazuje, že energie elektrického pole se periodicky mění v čase se čtvercem kosinu fáze a že amplituda těchto kmitů klesá exponenciálně s časem. Energie magnetického pole cívky se s časem mění poněkud složitěji. Lze odvodit, že střední hodnota celkové energie v obvodu  $RLC$  klesá s časem exponenciálně podle vztahu

$$E = \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L}. \quad (33.24)$$

**KONTROLA 3:** (a) Obrázek ukazuje časovou závislost střední hodnoty celkové elektromagnetické energie  $E$  ve dvou obvodech  $RLC$  se stejnými kondenzátory a cívkami. Která křivka odpovídá obvodu s větším  $R$ ? (b) Pokud by měly oba obvody stejnou hodnotu  $R$  i  $C$ , která křivka by odpovídala obvodu s větší hodnotou  $L$ ?



**PŘÍKLAD 33.3**

Sériový obvod  $RLC$  má indukčnost  $L = 12 \text{ mH}$ , kapacitu  $C = 1,6 \mu\text{F}$  a odpor  $R = 1,5 \Omega$ .

(a) Za jakou dobu  $t$  poklesne amplituda kmitů náboje v obvodu na 50 % své původní hodnoty?

**ŘEŠENÍ:** Rov. (33.21) vyjadřuje exponenciální útlum při kmitání náboje. Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % původní hodnoty, jestliže

$$Qe^{-Rt/(2L)} = 0,50Q.$$

Zkrátíme  $Q$  a logaritmuje obě strany; tím dostaneme

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0,50.$$

Řešením této rovnice vzhledem k  $t$  a dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$t = -\frac{2L}{R} \ln 0,50 = -\frac{2(12 \cdot 10^{-3} \text{ H}) \ln 0,50}{(1,5 \Omega)} = 0,011 \text{ s} \doteq 11 \text{ ms.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Kolik kmitů proběhne během této doby?

**ŘEŠENÍ:** Protože doba kmitu je  $T = 2\pi/\omega$  a úhlová frekvence je  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , dostaneme  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ . Každý kmit trvá jednu periodu, takže v časovém intervalu  $\Delta t = 0,011 \text{ s}$  je počet kmitů roven

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{T} &= \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}} = \\ &= \frac{(0,011 \text{ s})}{2\pi\sqrt{(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(1,6 \cdot 10^{-6} \text{ F})}} \doteq 13. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % přibližně během 13 kmitů. Toto tlumení je výrazně menší než tlumení z obr. 33.3, kde klesala amplituda o něco více než 50 % během jednoho kmitu.

**33.6 STŘÍDAVÉ PROUDY**

Kmity v obvodu  $RLC$  nebudou tlumeny, jestliže vhodný vnější zdroj elektromotorického napětí dodá dostatek energie k pokrytí tepelných ztrát na rezistoru  $R$ . Elektrické obvody v domácnostech, úřadech a továrnách obsahující bezpočet obvodů  $RLC$ , které odebírají tuto energii od místních rozvodných podniků. Ve většině zemí se energie dodává formou střídavého emn, resp. **střídavého proudu\***. Tyto

\* Proud v čase neproměnný, např. z baterií a akumulátorů, se nazývá **stejnoseměrný**.

kmitající emn a proudy se mění v čase harmonicky s kmitočtem 50 Hz, což znamená, že změní 100krát za sekundu svůj směr. (V některých zemích, např. v USA, se používá kmitočet 60 Hz; směr se za sekundu změní 120krát.)

Všimněme si jedné pozoruhodnosti střídavého proudu. Viděli jsme, že driftová rychlost elektronů (čl. 27.3) ve vodičích obvykle nepřesahuje  $4 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jestliže nyní změníme směr proudu každou setinu sekundy, posune se elektron asi o  $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  za půl periody. Tato vzdálenost představuje posun elektronu asi o 10 atomů, načež je elektron přinucen obrátit směr. Můžeme se tedy ptát, jak se může elektron při střídavém proudu vůbec dostat ke spotřebiči.

Odpověď spočívá v tom, že vodivé elektrony se nemusí „někam dostat“. Řekneme-li, že proud ve vodiči je jeden ampér, míníme tím, že nosiče náboje, které projdou průřezem vodiče, jím přenesou náboj jednoho coulombu za sekundu. Velikost rychlosti, kterou náboje procházejí rovinou průřezu, není přitom podstatná. Tentýž proud může odpovídat mnoha nábojům pohybujícím se pomalu, nebo několika nábojům pohybujícím se velmi rychle. Dále si uvědomme, že fyzikální popud, který mění směr pohybu elektronů a který má původ ve střídavém emn dodávaném z generátoru v elektrárně, se šíří jako elektromagnetická vlna podél tohoto vodiče s rychlostí blízkou rychlosti světla. Všechny elektrony, bez ohledu na jejich polohu, dostávají „pokyny pro změnu směru“ prakticky ve stejném okamžiku. Je také na místě poznamenat, že v mnoha zařízeních (jako jsou žárovky a tepelné spotřebiče) není směr pohybu elektronů důležitý. Elektrony totiž takovým zařízením předávají energii srážkami s jeho atomy, tedy dějem, kde směr pohybu náboje není podstatný.

Základní výhoda střídavých proudů je tato: *s časovou změnou proudů se mění i magnetické pole obklopující vodiče*. To dává možnost využít Faradayův zákon elektromagnetické indukce, což mezi mnoha jinými důsledky znamená, že můžeme libovolně zvýšit nebo snížit velikost střídavého napětí použitím transformátoru, jak uvidíme v této kapitole později. Navíc je střídavý proud vhodnější k použití v rotačních strojích, jako jsou generátory a motory, než (v čase stálý) stejnosměrný proud.

Obr. 33.6 ukazuje jednoduchý model alternátoru — generátoru střídavého napětí. Přinutíme-li vodivou smyčku točit se ve vnějším magnetickém poli o indukci  $\mathbf{B}$ , indukuje se v ní emn s harmonickým průběhem (kap. 31, úloha 25):

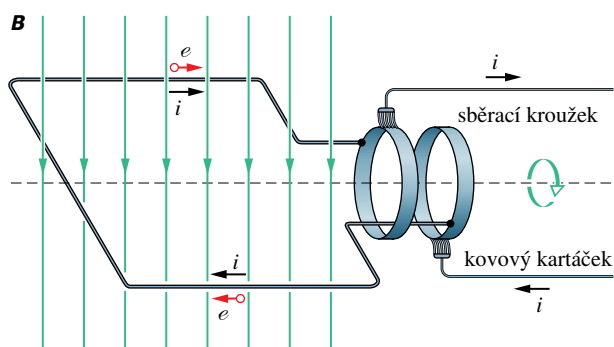
$$e = \mathcal{E} \sin \omega_b t. \quad (33.25)$$

Úhlová frekvence emn, označená  $\omega_b$ , je rovna úhlové rychlosti, se kterou se smyčka otáčí v magnetickém poli. Fáze emn je  $\omega_b t$  a amplituda emn je  $\mathcal{E}$ . Je-li otáčející se smyčka

částí uzavřeného obvodu, budí v něm toto emn **harmonický\*** proud se stejnou úhlovou frekvencí  $\omega_b$ , která se nazývá **budicí úhlová frekvence**. Proud můžeme vyjádřit vztahem

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.26)$$

kde  $I$  je amplituda buzeného proudu. Zvolíme-li znaménko před  $\varphi$  záporné, pak  $\varphi > 0$  přímo udává fázové zpoždění proudu  $i$  vůči  $e$ ; proud  $i$  totiž nemusí být obecně ve fázi s  $e$ . Jak uvidíme, závisí fázový posun  $\varphi$  na vlastnostech obvodu, který je ke generátoru připojen. (Je-li  $\varphi < 0$ , jde ovšem o předbíhání, nikoli zpoždění.)



**Obr. 33.6** Princip generátoru střídavého proudu: vodičová smyčka se otáčí ve vnějším magnetickém poli. Střídavé emn indukované ve smyčce se z ní vyvede pomocí sběracích kroužků připojených ke smyčce. Po nich kloužou vodivé kartáčky spojené s vnějším obvodem. (V praxi se místo smyčky používá cívky s mnoha závitů, aby indukované emn bylo větší.)

### 33.7 NUCENÉ KMITY

Viděli jsme, že náboj, napětí a proud, jakmile vzniknou, kmitají jak v netlumeném obvodu  $LC$ , tak v slabě tlumeném obvodu  $RLC$  (s dostatečně malým  $R$ ) s úhlovou frekvencí  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Takovým kmitům se říká **vlastní kmit** (bez vnějšího emn) a úhlová frekvence  $\omega$  se nazývá **vlastní úhlová frekvence** obvodu.

Je-li k obvodu  $RLC$  připojeno vnější střídavé emn s frekvencí  $\omega_b$ , potom mluvíme o **nucených** nebo též **buzených kmit**ech. Dá se dokázat, že tyto kmit mají po odeznění přechodových jevů rovněž frekvenci  $\omega_b$ , a to bez ohledu na hodnotu  $\omega$ .

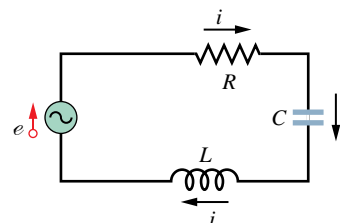
Nucené kmit (náboje, proudu, napětí) vždy převzmou po celkem krátké době budicí úhlovou frekvenci  $\omega_b$ , ať už byla vlastní úhlová frekvence  $\omega$  jakákoli.

\* Je to běžný název pro sinusový a kosinusový průběh s libovolnou počáteční fází.

Jak uvidíme v čl. 33.9, závisí amplitudy kmitů značně na tom, jak jsou navzájem blízké velikosti  $\omega_b$  a  $\omega$ . Jsou-li obě úhlové frekvence stejné, nastane **rezonance**, kdy amplituda proudu  $I$  v obvodu je největší.

### 33.8 TŘI JEDNODUCHÉ OBVODY

V dalších člancích připojíme vnější zdroj střídavého emn k sériovému obvodu  $RLC$  tak jako na obr. 33.7. Potom vyjádříme amplitudu  $I$  a počáteční fázi  $\varphi$  harmonicky kmitajícího proudu pomocí amplitudy emn  $\mathcal{E}$  a úhlové frekvence  $\omega_b$  vnějšího zdroje emn. Nejprve však prostudujeme tři jednodušší obvody, z nichž každý má kromě vnějšího zdroje emn pouze jeden obvodový prvek:  $R$ ,  $L$ , nebo  $C$ . Začneme s rezistorem (čistě **odporová zátěž**).



**Obr. 33.7** Sériový obvod skládající se z generátoru, rezistoru, kondenzátoru a cívky; generátor je znázorněn kroužkem se sinusoidou. Je zdrojem střídavého emn, které v obvodu vyvolá střídavý proud. Na obrázku je naznačen směr emn a proudu v jednom okamžiku.

#### Odporová zátěž

Obr. 33.8a ukazuje obvod s rezistorem o odporu  $R$  připojeným ke generátoru harmonického emn. Pro smyčku (jak víme z čl. 28.3) platí

$$e - u_R = 0.$$

Po dosazení z rov. (33.25) dostaneme

$$u_R = \mathcal{E} \sin \omega_b t.$$

Napětí na rezistoru se tedy mění harmonicky s úhlovou frekvencí rovnou  $\omega_b$  a amplitudou, která se rovná amplitudě přiloženého emn. Můžeme proto psát

$$u_R = U_R \sin \omega_b t. \quad (33.27)$$

Z definice odporu ( $R = u/i$ ) můžeme vyjádřit proud rezistorem vztahem

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_R}{R} \sin \omega_b t. \quad (33.28)$$

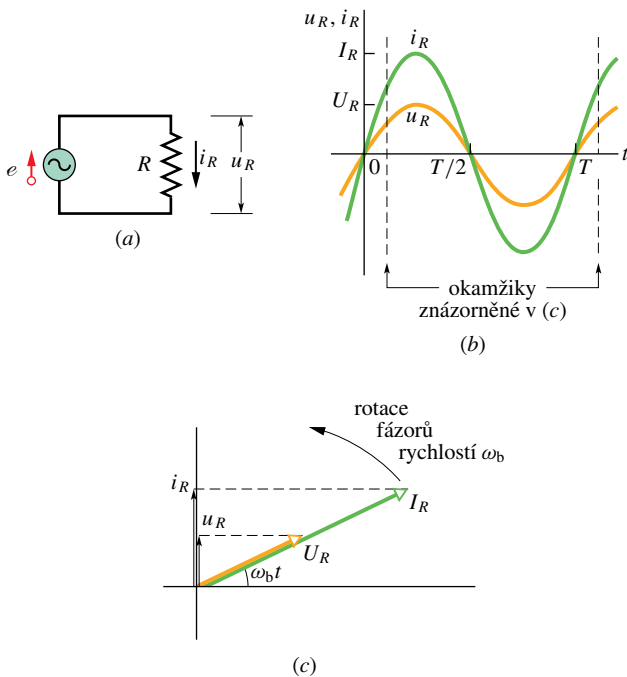
Podle rov. (33.26) můžeme tento proud zapsat ve tvaru

$$i_R = I_R \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.29)$$

kde  $I_R$  je amplituda proudu  $i_R$  v rezistoru. Porovnáním rov. (33.28) a (33.29) vidíme, že pro čistě odporovou zátěž je  $\varphi = 0^\circ$  a že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

$$U_R = I_R R \quad (\text{rezistor}). \quad (33.30)$$

V obvodech střídavého proudu odporovou zátěž  $R$  zpravidla nazýváme **rezistance**. Ačkoli jsme našli tento vztah pro konkrétní obvod odpovídající obr. 33.8a, lze ho použít na libovolný rezistor v obvodu střídavého proudu.



**Obr. 33.8** (a) Rezistor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud a napětí na rezistoru jsou ve fázi a uskuteční jeden kmit za jednu periodu  $T$ . (c) Fázorový diagram ukazuje tutěž situaci jako obr. (b).

Porovnáním rov. (33.27) a (33.28) vidíme, že obě časové závislosti  $u_R(t)$  a  $i_R(t)$  jsou dány tímž výrazem  $\sin \omega_b t$ , a tedy rozdíl jejich fází je  $\varphi = 0^\circ$ . Říkáme, že obě veličiny jsou **ve fázi**, což znamená, že jejich maxima (a minima) nastanou ve stejných okamžicích. Obr. 33.8b se závislostmi  $u_R(t)$  a  $i_R(t)$  tuto skutečnost dokresluje. Poznamenejme, že  $u_R(t)$  a  $i_R(t)$  nejsou tlumené proto, že generátor dodává do obvodu energii a nahrazuje energii disipovanou v rezistoru.

Časově proměnné veličiny  $u_R(t)$  a  $i_R(t)$  můžeme znázornit též geometricky pomocí **fázorů**. Připomeňme si z čl. 17.10, že fázory jsou vektory, které rotují kolem počátku souřadnic. Fázory představující napětí na rezistoru a proud, který jím prochází, jsou nakresleny v jistém okamžiku  $t$  na obr. 33.8c. Fázory mají následující vlastnosti:

**Úhlová rychlost:** Fázory rotují (při popisu střídavých proudů) proti směru otáčení hodinových ručiček okolo počátku s úhlovou rychlostí, která je rovna úhlové frekvenci  $\omega_b$  napětí  $u_R$  i proudu  $i_R$ .

**Délka:** Délka fázoru představuje amplitudu střídavé veličiny, tedy  $U_R$  pro napětí a  $I_R$  pro proud.

**Projekce:** Projekce fázoru do svislé osy udává okamžitou hodnotu střídavé veličiny, tedy napětí  $u_R$  a proud  $i_R$  v čase  $t$ . Když je  $\omega_b t = 90^\circ$ , směřuje fázor svisle vzhůru a jeho projekce je právě rovna jeho délce.

**Úhel pootočení:** S časem proměnný úhel pootočení fázoru měříme od vodorovné osy (obr. 33.8c). Je roven fázi střídavé veličiny v čase  $t$ . Na obr. 33.8c jsou napětí a proud ve fázi. Proto mají i jejich fázory tutěž fázi  $\omega_b t$ , tj. stejný úhel pootočení v obrázku a rotují tedy společně. Na obr. 33.9c jsou fázory navzájem posunuty o  $90^\circ$ .

### Kapacitní zátěž

Obr. 33.9a ukazuje obvod sestavený z kondenzátoru a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, kterým jsme dospěli k rov. (33.27), zjistíme, že napětí na kondenzátoru je

$$u_C = U_C \sin \omega_b t, \quad (33.31)$$

kde  $U_C$  je amplituda napětí na kondenzátoru. Z definice kapacity plyne

$$q_C = C u_C = C U_C \sin \omega_b t. \quad (33.32)$$

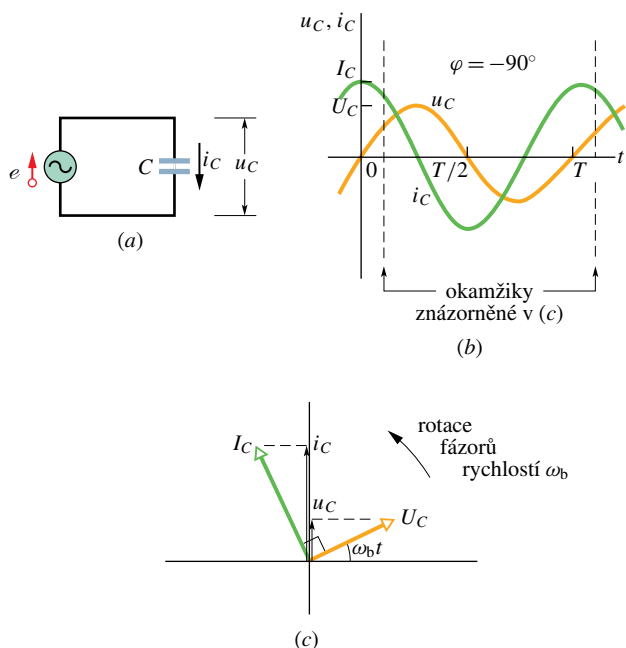
Více než náboj nás však zajímá proud. Derivováním rov. (33.32) dostaneme

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_b C U_C \cos \omega_b t. \quad (33.33)$$

Provedeme dále dvě úpravy rov. (33.33). Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **kapacitní reaktanci**  $X_C$  kondenzátoru, definovanou vztahem

$$X_C = \frac{1}{\omega_b C} \quad (\text{kapacitní reaktance}). \quad (33.34)$$

Její hodnota závisí nejen na kapacitě  $C$ , ale i na úhlové frekvenci  $\omega_b$ . Vidíme, že jednotkou pro  $X_C$  je ohm, stejně



**Obr. 33.9** (a) Kondenzátor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud předbíhá před napětím o  $90^\circ$ . (c) Fázorový diagram ukazuje tutěž situaci.

jako pro odpor  $R$ . Za druhé: v rov. (33.33) nahradíme funkci  $\cos \omega_b t$  funkcí sinus fázově posunutou:

$$\cos \omega_b t = \sin(\omega_b t + 90^\circ).$$

Po těchto dvou úpravách zapíšeme rov. (33.33) ve tvaru

$$i_C = \left( \frac{U_C}{X_C} \right) \sin(\omega_b t + 90^\circ). \quad (33.35)$$

Proud  $i_C$  však můžeme vyjádřit také podle rov. (32.26):

$$i_C = I_C \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.36)$$

kde  $I_C$  je amplituda veličiny  $i_C$ . Porovnáním rov. (33.35) a (33.36) vidíme, že při čistě kapacitní zátěži je  $\varphi = -90^\circ$ . Vidíme též, že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

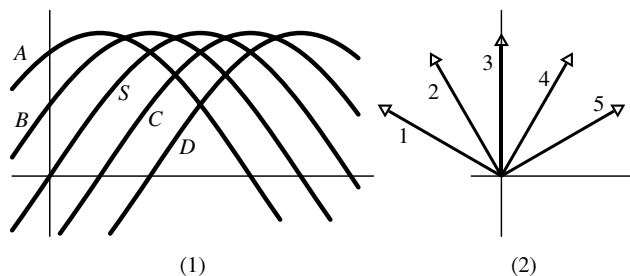
$$U_C = I_C X_C \quad (\text{kondenzátor}). \quad (33.37)$$

Ačkoli jsme našli tento vztah pro konkrétní obvod na obr. 33.9a, lze ho použít na libovolný kondenzátor v jakémkoli obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.31) a (33.35) nebo pohledem na obr. 33.9b zjistíme, že veličiny  $u_C$  a  $i_C$  jsou posunuty o úhel  $90^\circ$ , tedy o čtvrtinu periody. Navíc vidíme, že  $i_C$  předbíhá  $u_C$ , což znamená, že na obr. 33.9a dosahuje  $i_C$  maxima o čtvrtinu periody před  $u_C$ .

Tento vztah mezi  $i_C$  a  $u_C$  je znázorněn na fázorovém diagramu v obr. 33.9c: fázor  $I_C$  předbíhá před fázorem  $U_C$  o úhel  $90^\circ$ .

**KONTROLA 4:** Obrázek (1) ukazuje sinusovou funkci  $S(t) = \sin \omega_b t$  a čtyři další sinusoidy  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$ , každou tvaru  $\sin(\omega_b t - \varphi)$ . (a) Seřadte sešupně uvedené čtyři křivky podle hodnoty  $\varphi$ . (b) Která z křivek odpovídá jednotlivým fázorům z obrázku (2)? (c) Která křivka časově předbíhá před ostatními?



### Induktivní zátěž

Obr. 33.10a ukazuje obvod sestavený z cívky a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, který nás přivedl k rov. (33.27) a (33.31), dostaneme, že napětí na cívce je

$$u_L = U_L \sin \omega_b t, \quad (33.38)$$

kde  $U_L$  je amplituda napětí  $u_L$ . Z rov. (31.40) můžeme vyjádřit napětí na cívce  $L$ , ve které se mění proud s rychlostí  $di_L/dt$ :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (33.39)$$

Z rov. (33.38) a (33.39) dostaneme

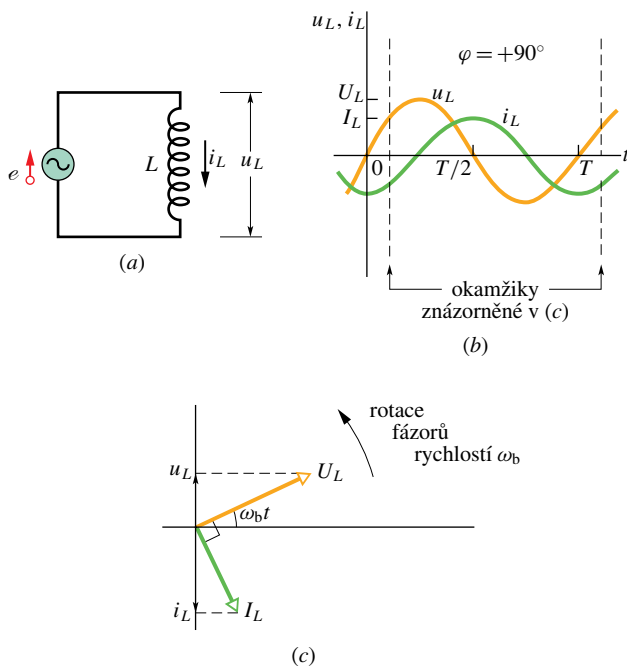
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L} \sin \omega_b t. \quad (33.40)$$

Více než časová derivace proudu nás však zajímá samotný proud. Ten dostaneme integrací rov. (33.40):

$$\begin{aligned} i_L &= \int di_L = \frac{U_L}{L} \int \sin \omega_b t \, dt = \\ &= - \left( \frac{U_L}{\omega_b L} \right) \cos \omega_b t. \end{aligned} \quad (33.41)$$

Provedeme dále dvě úpravy této rovnice. Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **induktivní reaktanci**  $X_L$  cívky vztahem

$$X_L = \omega_b L \quad (\text{induktivní reaktance}). \quad (33.42)$$



**Obr. 33.10** (a) Cívka je připojena ke zdroji harmonického emn. (b) Proud je zpožděn za napětím o  $90^\circ$ . (c) Fázorový diagram ukazuje totéž.

Její hodnota závisí nejen na indukčnosti, ale i na úhlové frekvenci  $\omega_b$ . Opět vidíme, že jednotkou  $X_L$  je ohm, stejně jako pro  $X_C$  a  $R$ .

Za druhé: zaměníme funkci  $-\cos \omega_b t$  v rov. (33.41) funkcí sinus fázově posunutou:

$$-\cos \omega_b t = \sin(\omega_b t - 90^\circ).$$

Po těchto úpravách zapíšeme rov. (33.41) ve tvaru

$$i_L = \frac{U_L}{X_L} \sin(\omega_b t - 90^\circ). \quad (33.43)$$

Proud  $i_L$  však můžeme vyjádřit také podle rov. (33.26):

$$i_L = I_L \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.44)$$

kde  $I_L$  je amplituda proudu  $i_L$  cívky. Porovnáním rovnic (33.43) a (33.44) vidíme, že pro čistě induktivní zátěž je  $\varphi = +90^\circ$ . Také vidíme, že mezi amplitudou napětí a amplitudou proudu platí vztah

$$U_L = I_L X_L \quad (\text{cívka}). \quad (33.45)$$

Ačkoli jsme tento vztah našli pro konkrétní obvod z obr. 33.10a, lze ho použít pro jakoukoli cívku v obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.38) a (33.43) nebo pohledem na obr. 33.10b shledáme, že fáze veličin  $i_L$  a  $u_L$  jsou navzájem posunuty o  $90^\circ$ . V tomto případě je však  $i_L$  zpožděn za  $u_L$ . To znamená, že sledujeme-li průběh proudu  $i_L$  a napětí  $u_L$  v obvodu z obr. 33.10a, zjistíme, že  $i_L$  dosáhne svého maxima o čtvrtinu periody později než  $u_L$ .

Z fázorového diagramu v obr. 33.10c je to také zřejmé. Fázor  $I_L$  má fázové zpoždění oproti fázoru  $U_L$  o úhel  $90^\circ$ . Přesvědčte se, že obr. 33.10c znázorňuje situaci popsanou rov. (33.38) a (33.43).

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 33.1:** Předbíhání a zpoždění v obvodech se střídavými proudy

Tab. 33.2 uvádí přehled vztahů mezi proudem  $i$  a napětím  $u$  pro každý ze tří typů uvažovaných obvodových prvků. Přiloží-li se na ně napětí, je proud ve fázi s napětím na rezistoru, proud předbíhá před napětím na kondenzátoru a je zpožděn za napětím na cívce.

Fázi  $\varphi$  i fázový posun  $\Delta\varphi$  vyjadřujeme obvykle v obloukové míře v radiánech nebo ve stupních. Někdy je však názornější vyjádření pomocí času  $t = \varphi/\omega$ , resp.  $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$ . Říkáme: „Proud i napětí nabývají maxima současně“, „Proud předbíhá před napětím“ apod.

### PŘÍKLAD 33.4

(a) V obr. 33.9a je  $C = 15,0 \mu\text{F}$ ,  $\mathcal{E} = U_C = 36,0 \text{ V}$  a kmitočet budicího napětí je  $f_b = 60,0 \text{ Hz}$ . Jaká je amplituda proudu  $I_C$ ?

**ŘEŠENÍ:** Hledanou amplitudu dostaneme z rov. (33.37) (tj.  $U_C = I_C X_C$ ), vypočteme-li nejprve kapacitní reaktanci  $X_C$ . Z rov. (33.34), kde  $\omega_b = 2\pi f_b$ , plyne

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_b C} = \frac{1}{2\pi(60,0 \text{ Hz})(15,0 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = 177 \Omega.$$

Potom z rov. (33.37)

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = \frac{(36,0 \text{ V})}{(177 \Omega)} = 0,203 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Nechť v obr. 33.10a je  $L = 230 \text{ mH}$ ,  $\mathcal{E} = U_L = 36,0 \text{ V}$  a  $f_b = 60,0 \text{ Hz}$ . Jaká je amplituda proudu  $I_L$ ?

**ŘEŠENÍ:** Amplitudu můžeme získat z rov. (33.45) ( $I_L = U_L/X_L$ ) tak, že nejprve vypočteme induktivní reaktanci  $X_L$ . Z rov. (33.42), kde položíme  $\omega_b = 2\pi f_b$ , dostaneme

$$X_L = 2\pi f_b L = 2\pi(60,0 \text{ Hz})(230 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = 86,7 \Omega.$$

Tabulka 33.2 Vztahy mezi amplitudou a fází pro střídavé proudy a napětí

| OBVODOVÝ PRVEK | SYMBOL | REZISTANCE NEBO REAKTANCE* | FÁZE PROUDU                    | FÁZOVÝ POSUN $\varphi$ | VZTAH MEZI AMPLITUDAMI |
|----------------|--------|----------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| Rezistor       | $R$    | $R$                        | ve fázi s $u_R$                | $0^\circ$              | $U_R = I_R R$          |
| Kondenzátor    | $C$    | $X_C = 1/(\omega_b C)$     | předbíhá $u_C$ o $90^\circ$    | $-90^\circ$            | $U_C = I_C X_C$        |
| Cívka          | $L$    | $X_L = \omega_b L$         | zpožděna za $u_L$ o $90^\circ$ | $+90^\circ$            | $U_L = I_L X_L$        |

\* Někdy se pro kapacitní reaktanci užívá název **kapacitance** a pro induktivní reaktanci název **induktance**.

Potom z rov. (33.45)

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} = \frac{(36,0 \text{ V})}{(86,7 \Omega)} = 0,415 \text{ A. (Odpověď)}$$

(c) Napište výraz pro časově proměnný proud  $i_L$  v obvodu podle (b).

**ŘEŠENÍ:** Rov. (33.44) je obecným řešením pro  $i_L$ . Pro vypočtený proud  $I_L = 0,415 \text{ A}$  a pro

$$\omega_b = 2\pi f_b = 120\pi \text{ s}^{-1}$$

dostaneme při  $\varphi = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$  pro tento čistě induktivní obvod

$$\begin{aligned} i_L &= I_L \sin(\omega_b t - \varphi) = \\ &= (0,415 \text{ A}) \sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

**KONTROLA 5:** Jestliže zvýšíme budící kmitočet  $f_b$  v obvodu (a) podle obr. 33.9a, (b) podle obr. 33.10a, amplituda proudu  $I$  v obvodu vzroste, klesne, nebo zůstane stejná?

### 33.9 SÉRIOVÝ OBVOD $RLC$

Nyní jsme připraveni vyšetřit situaci, kdy připojíme zdroj harmonického emn

$$e = \mathcal{E} \sin \omega_b t \quad (\text{přiložené emn}) \quad (33.46)$$

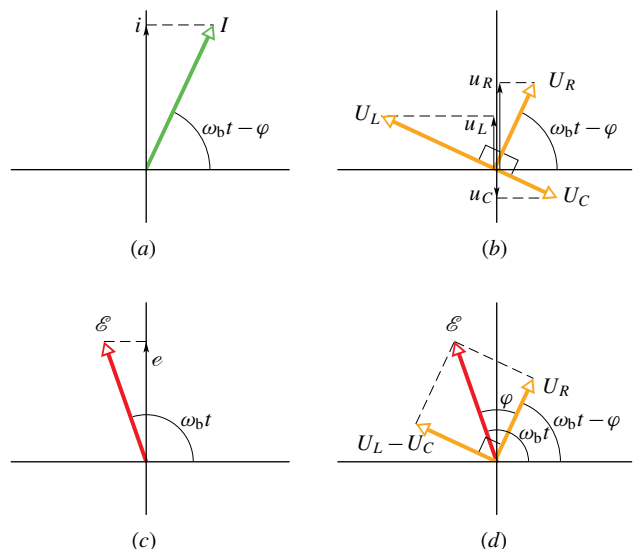
k sériovému obvodu  $RLC$  podle obr. 33.7. Protože  $R$ ,  $L$  a  $C$  jsou zapojeny v sérii, protéká tentýž proud

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi) \quad (33.47)$$

všemi třemi prvky. Chceme nalézt amplitudu  $I$  proudu a fázový posun  $\varphi$  proudu  $i$  vůči  $e$ .

Řešení se zjednoduší použitím fázorových diagramů. Začneme s obr. 33.11a, který ukazuje fázor představující proud z rov. (33.47) v libovolném čase  $t$ . Délka fázoru je

amplituda  $I$ , projekce fázoru na svislou osu je okamžitý proud  $i$  v čase  $t$  a úhel pootočení fázoru je fáze  $(\omega_b t - \varphi)$  proudu v čase  $t$ .



**Obr. 33.11** (a) Fázor harmonického proudu v buzeném obvodu  $RLC$  na obr. 33.7 v čase  $t$ . V obrázku je vyznačena amplituda  $I$ , okamžitá hodnota  $i$  a fáze  $(\omega_b t - \varphi)$ . (b) Fázory napětí na cívce, rezistoru a kondenzátoru, vztažené k fázoru proudu v (a). (c) Fázor harmonického emn, které budí proud podle (a). (d) Fázor emn je roven vektorovému součtu tří fázorů napětí podle (b). Fázory  $U_L$  a  $U_C$  jsou sečteny do výsledného fázoru  $(U_L - U_C)$ .

Obr. 33.11b ukazuje fázory napětí na  $R$ ,  $L$  a  $C$  ve stejném okamžiku  $t$ . Každý fázor je vztažen k fázoru proudu  $I$  z obr. 33.11a podle pravidel uvedených v tab. 33.2:

**Rezistor:** Napětí a proud jsou ve fázi, takže fázor napětí  $U_R$  má stejný směr jako fázor  $I$ .

**Kondenzátor:** Proud předbíhá napětí o  $90^\circ$ , takže fázor napětí  $U_C$  je zpožděn o  $90^\circ$  za fázorem  $I$ .

**Cívka:** Proud je zpožděn za napětím o  $90^\circ$ , takže naopak fázor napětí  $U_L$  předbíhá o  $90^\circ$  před fázorem  $I$ .

Obr. 33.11b také ukazuje okamžité hodnoty napětí  $u_R$ ,  $u_C$  a  $u_L$  na prvcích  $R$ ,  $C$  a  $L$  v čase  $t$ . Tato napětí jsou projekce odpovídajících fázorů na svislou osu.

Obr. 33.11c ukazuje fázor představující přiložené emn z rov. (33.46). Délka fázoru je amplituda  $\mathcal{E}$ , projekce fázoru na svislou osu je okamžitá hodnota emn v čase  $t$  a úhel pootočení fázoru je fáze  $\omega_b t$  emn v čase  $t$ .

Smyčkové pravidlo říká, že v libovolném okamžiku je součet napětí  $u_R$ ,  $u_C$  a  $u_L$  roven přiloženému emn  $e$ :

$$e = u_R + u_C + u_L. \quad (33.48)$$

V libovolném okamžiku  $t$  je projekce emn v obr. 33.11c tedy rovna součtu projekcí  $u_R$ ,  $u_C$  a  $u_L$  v obr. 33.11b. Protože fázory rotují se stejnou úhlovou rychlostí, platí tato rovnice v každém okamžiku. To znamená, že fázor  $\mathcal{E}$  v obr. 33.11c musí být roven vektorovému součtu tří fázorů napětí  $U_R$ ,  $U_C$  a  $U_L$  v obr. 33.11b.

Uvedené vektorové skládání fázorů můžeme zjednodušit nejprve využitím té skutečnosti, že fázory  $U_C$  a  $U_L$  mají opačné směry. Lze je proto nahradit jediným fázorem  $U_L - U_C$ , jak je ukázáno v obr. 33.11d. Vektorový součet všech tří napěťových fázorů z obr. 33.11b nalezneme jako výslednici dvou fázorů  $U_R$  a  $(U_L - U_C)$  v obr. 33.11d. Tento výsledek je roven fázoru  $\mathcal{E}$ , jak je naznačeno.

Oba trojúhelníky v obr. 33.11d jsou pravoúhlé. Použitím Pythagorovy věty dostaneme vztah

$$\mathcal{E}^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2. \quad (33.49)$$

Z tab. 33.2 dosadíme za amplitudy napětí na jednotlivých prvcích, takže

$$\mathcal{E}^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 \quad (33.50)$$

a z toho po úpravě dostaneme

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (33.51)$$

Jmenovatel v rov. (33.51) má význam celkového odporu sériového obvodu  $RLC$  a nazývá se **impedance** obvodu pro budící úhlovou frekvenci  $\omega_b$ :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{definice impedance}). \quad (33.52)$$

Rov. (33.51) potom můžeme psát ve tvaru

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z}. \quad (33.53)$$

Dosadíme-li za  $X_C$  a  $X_L$  z rov. (33.34) a (33.42), můžeme rov. (33.51) zapsat ve tvaru

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}} \quad (\text{amplituda proudu}). \quad (33.54)$$

Tím jsme dosáhli poloviny našeho záměru: odvodili jsme výraz pro amplitudu  $I$  proudu. Hodnota  $I$  závisí na rozdílu  $(\omega_b L - 1/\omega_b C)$  v rov. (33.54) neboli na rozdílu  $X_L - X_C$  v rov. (33.51). Nezáleží však na tom, která z obou veličin je větší, neboť počítáme druhou mocninu jejich rozdílu.

V tomto článku jsme se zabývali **ustáleným harmonickým proudem**. Ten se vyskytuje v obvodu až po určité době od připojení zdroje emn. Ihned po připojení obvodu k emn jím protéká po krátkou dobu **přechodný proud**. Doba jeho trvání (dříve, než nastane ustálený stav) je určena časovými konstantami  $\tau_L = L/R$  a  $\tau_C = RC$ ; ty jsou úměrné době, potřebné pro „plné zapojení“ induktivních a kapacitních prvků. Přechodný proud může být velký a může například zničit elektromotor při rozběhu, nemá-li vinutí přiměřeně navržené.

### Fázový posun

Ještě potřebujeme stanovit hodnotu fázového posunu  $\varphi$ . Z pravoúhlého trojúhelníku fázorů v obr. 33.11d a podle údajů tab. 33.2 můžeme psát

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}, \quad (33.55)$$

což dává

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{fázový posun}). \quad (33.56)$$

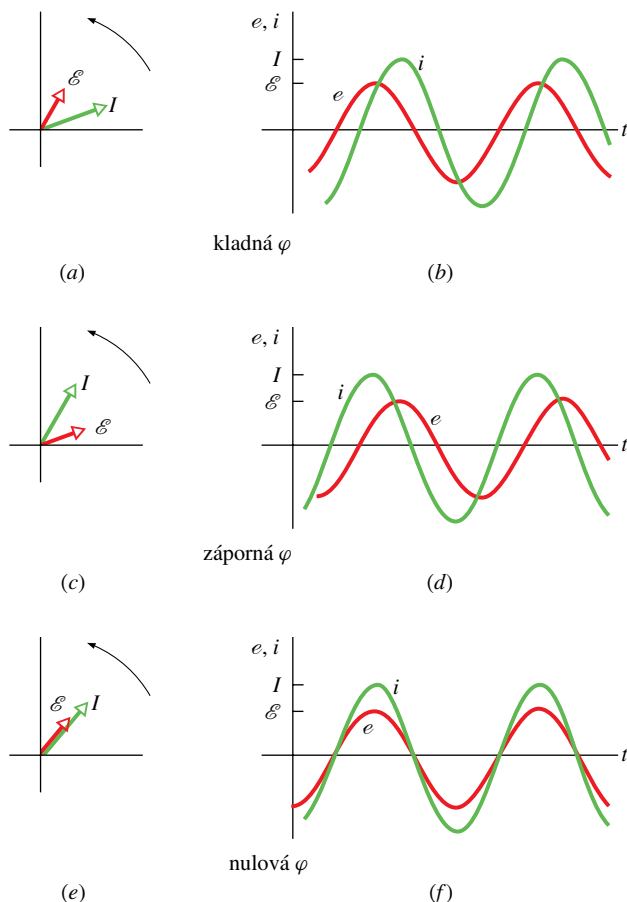
Znaménko rozdílu  $(X_L - X_C)$  nemělo vliv na *amplitudu* proudu  $i$ . Z rov. (33.56) však vidíme, že toto znaménko určuje *fázový posun* proudu vůči napětí. Jsou tři možnosti:

Je-li  $X_L > X_C$ , obvod má **induktivní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun  $\varphi$  pro takový obvod kladný, což znamená, že fázor  $\mathcal{E}$  rotuje *před* fázorem  $I$  (obr. 33.12a). Příklad závislosti  $e$  a  $i$  na čase je na obr. 33.12b.

Je-li  $X_C > X_L$ , obvod má **kapacitní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun pro takový obvod záporný, což znamená, že fázor  $\mathcal{E}$  rotuje *za* fázorem  $I$  (obr. 33.12c). Příklad závislosti  $e$  a  $i$  na čase je na obr. 33.12d.

Je-li  $X_C = X_L$ , obvod je v **rezonanci**; tento termín vysvětlíme dále. Rov. (33.56) říká, že v takovém obvodu je  $\varphi = 0^\circ$ , což znamená, že fázory  $\mathcal{E}$  a  $I$  rotují společně (na téže vektorové přímce) (obr. 33.12e). Příklad závislosti  $e$  a  $i$  na čase je na obr. 33.12f.

Jako ilustraci uvažujme dva krajní případy obvodů: V *čistě induktivním obvodu* podle obr. 33.10a, kde je reaktance  $X_L$  nenulová a  $X_C = R = 0$ , rov. (33.56) dává



**Obr. 33.12** Fázorové diagramy a časový průběh harmonických emn a proudů pro buzený obvod  $RLC$  na obr. 33.7. Pro (a, b) je fázový posun  $\varphi$  kladný, pro (c, d) je záporný a pro (e, f) je nulový.

$\varphi = +90^\circ$  (nejvyšší hodnota  $\varphi$ ) v souladu s obr. 33.10c. V čistě kapacitním obvodu podle obr. 33.9a, kde je reaktance  $X_C$  nenulová a  $X_L = R = 0$ , rov. (33.56) dává  $\varphi = -90^\circ$  (nejnižší hodnota  $\varphi$ ) v souladu s obr. 33.9c.

### Rezonance

Rov. (33.54) udává amplitudu proudu  $I$  v obvodu  $RLC$  jako funkci budící úhlové frekvence  $\omega_b$  vnějšího harmonického zdroje emn. Pro zadaný odpor  $R$  je tato amplituda největší, jestliže je veličina  $(\omega_b L - 1/(\omega_b C))$  ve jmenovateli nulová, tedy jestliže

$$\omega_b L = \frac{1}{\omega_b C},$$

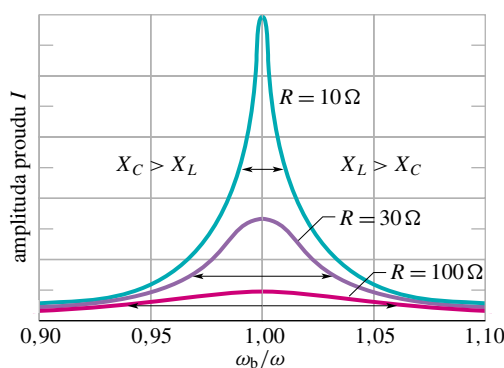
odkud

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{maximum } I). \quad (33.57)$$

Tato frekvence, kterou nazýváme **rezonanční frekvence** kmitavého sériového obvodu  $RLC$ , je tedy rovna vlastní úhlové frekvenci (netlumených) kmitů v obvodu  $LC$ . To znamená, že v obvodu  $RLC$  nastane **rezonance** a amplituda  $I$  proudu dosáhne maxima, je-li

$$\omega_b = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{rezonanční frekvence}). \quad (33.58)$$

Rezonanční frekvence je určena hodnotami  $L$  a  $C$ . Co se stane, když měníme  $R$ ? Obr. 33.13 ukazuje tři **rezonanční křivky** proudu pro harmonicky buzené kmitů ve třech sériových obvodech  $RLC$ , které se liší pouze hodnotou  $R$ . Každá křivka dosahuje maxima amplitudy proudu při rezonanční frekvenci  $\omega_b = \omega$ , avšak toto maximum klesá s rostoucím  $R$ . (Maximum  $I$  je vždy rovno  $\mathcal{E}/R$ ; k důkazu postačí kombinovat rov. (33.52) a (33.53)). Také šířka křivek narůstá s rostoucím  $R$  (šířka je definována jako rozdíl kmitočtů při proudu rovném polovině maximální hodnoty  $I$ , obr. 33.13).



**Obr. 33.13** Rezonanční křivky buzeného obvodu  $RLC$  na obr. 33.7 pro  $L = 100 \mu\text{H}$ ,  $C = 100 \text{ pF}$  a tři hodnoty  $R$ . Amplituda  $I$  harmonického proudu závisí na tom, jak blízko je budící úhlová frekvence  $\omega_b$  k vlastní úhlové frekvenci  $\omega$ . Vodorovná šipka u každé křivky udává její šířku na poloviční hodnotě maxima proudu, což je měřítkem strmosti rezonanční křivky. Nalevo od  $\omega_b/\omega = 1$  je  $X_C > X_L$  a obvod má kapacitní charakter. Napravo od  $\omega_b/\omega = 1$  je  $X_L > X_C$  a obvod má induktivní charakter.

Rezonančním křivkám z obr. 33.13 můžeme dát fyzikální význam tím, že budeme uvažovat, jak se reaktance  $X_L$  a  $X_C$  změní, zvyšujeme-li postupně budící úhlovou frekvenci  $\omega_b$ , přičemž začneme z hodnot mnohem menších, než je vlastní frekvence  $\omega$ . Pro malé hodnoty  $\omega_b$  je reaktance  $X_L = \omega_b L$  malá a reaktance  $X_C = 1/(\omega_b C)$  je velká. Obvod má tedy kapacitní charakter a převládá velká reaktance  $X_C$ , která udržuje v obvodu malý proud.

Zvyšujeme-li  $\omega_b$ , reaktance  $X_C$  stále převažuje, ale klesá, zatímco  $X_L$  se zvyšuje. S poklesem  $X_C$  klesá i impedance, takže proud narůstá, jak vidíme na levé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Když rostoucí  $X_L$  a klesající  $X_C$  dosáhnou stejných hodnot, proud je největší a obvod je v rezonanci při  $\omega_b = \omega$ .

Zvyšujeme-li dále  $\omega_b$ , převládne narůstající reaktance  $X_L$  nad klesající reaktancí  $X_C$ . Impedance tedy narůstá v důsledku zvýšení  $X_L$  a proud klesá, jak je zřejmé v pravé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Stručně shrnuto: pro úhlové frekvence menší než  $\omega$  převažuje kapacitní reaktance, pro úhlové frekvence větší než  $\omega$  převažuje induktivní reaktance a rezonance nastává právě pro frekvenci  $\omega$ , kdy celková reaktance je nulová.

### PŘÍKLAD 33.5

V obr. 33.7 je  $R = 160 \Omega$ ,  $C = 15,0 \mu\text{F}$ ,  $L = 230 \text{ mH}$ ,  $f_b = 60,0 \text{ Hz}$  a  $\mathcal{E} = 36,0 \text{ V}$ . (Až na  $R$  jsou hodnoty stejné jako v př. 33.4.)

(a) Jak velká je amplituda proudu  $I$ ?

**ŘEŠENÍ:** Amplitudu proudu můžeme vypočítat z rovnice (33.53) ( $I = \mathcal{E}/Z$ ), stanovíme-li nejprve impedanci  $Z$  obvodu z rov. (33.52). Z př. 33.4a víme, že kapacitní reaktance  $X_C$  pro kondenzátor (a tedy pro obvod) je  $177 \Omega$ , a z př. 33.4b víme, že induktivní reaktance  $X_L$  cívky je  $86,7 \Omega$ . Z rov. (33.52) dostaneme

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \\ &= \sqrt{(160 \Omega)^2 + (86,7 \Omega - 177 \Omega)^2} = \\ &= 184 \Omega. \end{aligned}$$

Potom vypočteme

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{(36,0 \text{ V})}{(184 \Omega)} = 0,196 \text{ A}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaký je fázový posun  $\varphi$ ?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (33.56) je

$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(86,7 \Omega) - (177 \Omega)}{(160 \Omega)} = -0,564,$$

odtud

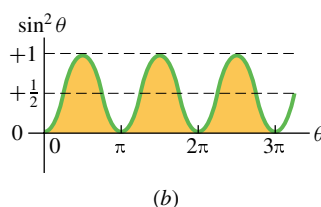
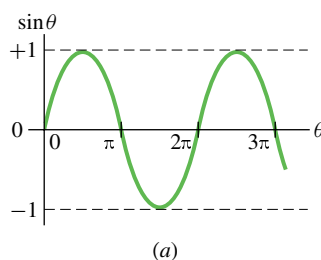
$$\varphi = -29,4^\circ = -0,513 \text{ rad}. \quad (\text{Odpověď})$$

Fázový posun je záporný, protože výsledná zátěž má kapacitní charakter, tj.  $X_C > X_L$ .

(1)  $50 \Omega$ ,  $100 \Omega$ ; (2)  $100 \Omega$ ,  $50 \Omega$ ; (3)  $50 \Omega$ ,  $50 \Omega$ . (a) Pro každý z obvodů rozhodněte, jestli proud předbíhá, nebo je zpožděn vzhledem k připojenému emn, nebo jestli jsou obě veličiny ve fázi. (b) Je některý z obvodů v rezonanci?

## 33.10 VÝKON V OBVODECH SE STŘÍDAVÝM PROUDEM

Do obvodu  $RLC$  (obr. 33.7) dodává energii generátor střídavého napětí. Část energie, kterou dodává, je uložena v elektrickém poli kondenzátoru, část v magnetickém poli cívky a část se disipuje v rezistoru. V ustáleném stavu, který předpokládáme, zůstává časová střední hodnota energie uložené v kondenzátoru a v cívce konstantní. Elektromagnetická energie se přenáší jen od generátoru k rezistoru a v něm se disipuje.



**Obr. 33.14** (a) Závislost  $\sin \theta$  na  $\theta$ . Střední hodnota za dobu jedné periody je nulová. (b) Závislost  $\sin^2 \theta$  na  $\theta$ . Střední hodnota za dobu jedné periody je  $\frac{1}{2}$ .

Rychlost, se kterou je energie disipována v rezistoru, tj. *okamžitý výkon*, lze vyjádřit pomocí rov. (27.22) a (33.26) vztahem

$$P = i^2 R = I^2 R \sin^2(\omega_b t - \varphi). \quad (33.59)$$

*Střední výkon* disipovaný v rezistoru je časovou střední hodnotou výrazu (33.59). Ačkoli střední hodnota za dobu jedné periody je pro funkci  $\sin \theta$  nulová, je střední hodnota  $\sin^2 \theta$  rovna  $\frac{1}{2}$  (obr. 33.14). (Povšimněte si v obr. 33.14b, jak vystínované části křivky, které leží nad vodorovnou

**KONTROLA 6:** Mějme tři dvojice kapacitní a induktivní reaktance pro tři harmonicky buzené obvody  $RLC$ :

přímku označenou  $+\frac{1}{2}$ , přesně vyplňují prázdná místa pod touto čarou.) Z rov. (33.59) plyne výraz pro střední výkon

$$\bar{P} = \frac{I^2 R}{2} = \left( \frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2 R. \quad (33.60)$$

Veličina  $I/\sqrt{2}$  se nazývá **efektivní hodnota** proudu  $i$ , a pokud nebude uvedeno jinak, použijeme pro její označení index „ef“. Tedy

$$I_{\text{ef}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad (\text{efektivní proud}). \quad (33.61)$$

Rov. (33.60) můžeme přepsat do tvaru

$$\bar{P} = I_{\text{ef}}^2 R \quad (\text{střední výkon}). \quad (33.62)$$

(Připomněme, že  $U_{\text{stř}} = 0$  a  $I_{\text{stř}} = 0$ !) Rov. (33.62) se formálně podobá rov. (27.22)  $P = i^2 R$ . Zavedení efektivních hodnot proto umožňuje, abychom střední hodnoty ztrát ve střídavých obvodech (tj. střední výkony) v ustáleném stavu vyjádřili formálně stejným vztahem jako pro stejnosměrné proudy.

Pro střídavé proudy můžeme také definovat efektivní hodnoty napětí i emn:

$$U_{\text{ef}} = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \mathcal{E}_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}} \quad (33.63)$$

(efektivní napětí a emn).

Přístroje na měření střídavých veličin, jako např. ampérmetry a voltmetry, jsou obvykle cejkovány v efektivních hodnotách. Pokud tedy voltmetr na měření střídavých napětí ukazuje v elektrické zásuvce 230 V, je to



V září 1988, po 72 letech hry za denního světla, instaloval klub Chicago Cubs reflektory pro hru při umělém osvětlení. Celkem 540 halogenových svítidel po 1 500 W osvětlilo hrací plochu. Avšak první hra za umělého osvětlení byla pro bouřku přerušena. Fanoušci si to vysvětlili po svém — považovali to za znamení, aby Cubs zůstali při hře za denního světla.

efektivní napětí. Maximální hodnota napětí v zásuvce je pak  $\sqrt{2}(230 \text{ V})$ , tj. 325 voltů.

Protože součinitel úměrnosti  $1/\sqrt{2}$  v rov. (33.61) a (33.63) je stejný pro všechny tři proměnné, můžeme rov. (33.53) a (33.51) psát ve tvaru

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (33.64)$$

Zápisu pomocí efektivních hodnot budeme dávat přednost.

Vztah  $I_{\text{ef}} = \mathcal{E}_{\text{ef}}/Z$  můžeme použít k přepisu rovnice (33.62) do jiného užitečného ekvivalentního vyjádření. Píšeme

$$\bar{P} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{Z} I_{\text{ef}} R = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \frac{R}{Z}. \quad (33.65)$$

Z obr. 33.11d, tab. 33.2 a z rov. (33.53) však plyne, že podíl  $R/Z$  je roven kosinu fázového posunu  $\varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{\mathcal{E}} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}. \quad (33.66)$$

Rov. (33.65) pak zní

$$\bar{P} = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi \quad (\text{střední výkon}) \quad (33.67)$$

a činitel  $\cos \varphi$  v ní se nazývá **účinník**. Protože  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ , nezávisí rov. (33.67) na znaménku fázového posunu  $\varphi$ .

Aby se do odporové zátěže libovolného obvodu  $RLC$  přenášel maximální výkon, musí se účinník co nejvíce blížit jedné:  $\cos \varphi \rightarrow 1$ . To je ekvivalentní požadavku, aby



11. listopadu 1965 v 17:17 h způsobilo vadné relé v energetické soustavě poblíž Niagarských vodopádů odpojení spínače na přenosovém vedení. Proud se samočinně přepojil do ostatních vedení, ta se tím však přetížila a automaticky odpojila ze soustavy. V několika minutách se zhroutila energetická soustava a do tmy se ponořila většina New Yorku, Nové Anglie a Ontaria.

fázový posun  $\varphi$  byl co nejbližší nule. Pokud má například obvod induktivní charakter, lze induktivní reaktanci snížit přidáním kapacity do obvodu a tak zmenšit fázový posun a zvýšit účinník v rov. (33.67). Protože spotřebiče mají mnohem častěji induktivní charakter než kapacitní, umísťují elektrárenské společnosti na místě spotřeby kondenzátory a v rozvodnách, kterými je přenášen velký výkon, různé kompenzátory účinníku.

**KONTROLA 7:** (a) Proud v harmonicky buzeném sériovém obvodu  $RLC$  předbíhá emn. Je nutno zvětšit, nebo zmenšit kapacitu, aby se zvýšil výkon dodávaný do rezistoru? (b) Posune tato změna rezonanční úhlovou frekvenci obvodu blíže k úhlové frekvenci emn, nebo ji naopak oddálí?

### PŘÍKLAD 33.6

Sériový obvod  $RLC$ , buzený zdrojem s  $\mathcal{E}_{\text{ef}} = 120 \text{ V}$  při kmitočtu  $f_b = 60,0 \text{ Hz}$ , sestává z rezistoru s  $R = 200 \Omega$ , cívky s  $X_L = 80,0 \Omega$  a kondenzátoru s  $X_C = 150 \Omega$ .

(a) Jaký je účinník  $\cos \varphi$  a fázový posun  $\varphi$  v tomto obvodu?

**ŘEŠENÍ:** Účinník můžeme vypočítat z rov. (33.66) ( $\cos \varphi = R/Z$ ) tak, že nejprve stanovíme impedanci  $Z$ . Dosazením do rov. (33.52) dostaneme

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{(200 \Omega)^2 + (80,0 \Omega - 150 \Omega)^2} = \\ &= 211,9 \Omega. \end{aligned}$$

Z rov. (33.66) potom vypočteme

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{(200 \Omega)}{(211,90 \Omega)} = 0,944. \quad (\text{Odpověď})$$

Odtud plyne, že

$$\varphi = 19,3^\circ \quad \text{nebo} \quad \varphi = -19,3^\circ.$$

První řešení nevyhovuje úloze, neboť při  $X_C > X_L$  má obvod kapacitní charakter a fázový posun  $\varphi$  proto musí být záporný. Druhé řešení úloze vyhovuje, tedy

$$\varphi = -19,3^\circ. \quad (\text{Odpověď})$$

(Namísto uvedeného postupu jsme mohli dosadit známé údaje do rov. (33.56) a dostali bychom správný výsledek jako jediné řešení.)

(b) S jakým středním výkonem  $\bar{P}$  se elektromagnetická energie disipuje v rezistoru?

**ŘEŠENÍ:**  $\bar{P}$  vypočteme pomocí rov. (33.67), jestliže nejprve určíme  $I_{\text{ef}}$ . Z rov. (33.64) máme

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{Z} = \frac{(120 \text{ V})}{(211,9 \Omega)} = 0,5663 \text{ A}.$$

Dosazením této a dalších hodnot do rov. (33.67) vypočteme

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi = (120 \text{ V})(0,5663 \text{ A})(0,944) = \\ &= 64,2 \text{ W}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jaká změna  $\Delta C$  kapacity je potřeba, aby  $\bar{P}$  byl maximální za předpokladu, že se ostatní parametry obvodu nezmění?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (33.34) ( $X_C = 1/(\omega_b C)$ ) vypočteme původní kapacitu

$$C = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60,0 \text{ Hz})(150 \Omega)} = 17,7 \mu\text{F}.$$

Výkon  $\bar{P}$  je nejvyšší, je-li obvod v rezonanci, tj. když jsou si reaktance rovny:  $X_C = X_L$ . Rov. (33.34) pro  $X_C = X_L = 80 \Omega$  dává kapacitu potřebnou pro rezonanci

$$C' = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60,0 \text{ Hz})(80 \Omega)} = 33,2 \mu\text{F}.$$

Požadovaná změna kapacity tedy bude

$$\begin{aligned} \Delta C &= C' - C = 33,2 \mu\text{F} - 17,7 \mu\text{F} = \\ &= 15,5 \mu\text{F}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Jaký bude střední výkon  $\bar{P}$  při takto změněné kapacitě?

**ŘEŠENÍ:** Po změně je  $X_C = X_L$ . Potom z rov. (33.52) a (33.66) platí  $Z = R$  a  $\cos \varphi = 1$ . Efektivní proud dostaneme z rov. (33.64)

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{Z} = \frac{(120 \text{ V})}{(200 \Omega)} = 0,600 \text{ A}$$

a střední výkon je

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi = (120 \text{ V})(0,600 \text{ A})(1,0) = \\ &= 72,0 \text{ W}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 33.11 TRANSFORMÁTORY

### Požadavky na přenos energie

Je-li střídavý zdroj zatížen pouze rezistorem, je fázový posun  $\varphi$  nulový, a proto účinník v rov. (33.67) je roven jedné

( $\cos 0^\circ = 1$ ). Přiložené efektivní emn  $\mathcal{E}$  je rovno efektivnímu napětí  $U$  na zátěži. To znamená, že při efektivním proudu  $I$  je dodaný výkon, který je ztracený v zátěži, roven

$$\bar{P} = \mathcal{E} I = IU. \quad (33.68)$$

(V tomto článku použijeme v praxi běžný zápis efektivních hodnot, kdy se index  $_{ef}$  vynechává. V elektrotechnice se všechny v čase harmonicky proměnné proudy a napětí běžně popisují svými efektivními hodnotami. Udávají je i měřicí přístroje.) Z rov. (33.68) je vidět, že k dodání předepsaného výkonu máme širokou možnost volby od velkého proudu  $I$  a relativně malého napětí  $U$  k malému proudu a vysokému napětí, ale vždy tak, aby měl součin proudu a napětí požadovanou velikost.

V soustavách, které rozvádějí elektrickou energii, je žádoucí z důvodů bezpečnosti a účinného návrhu zařízení pracovat s relativně nízkými napětími na straně výrobce (v elektrárnách) a u spotřebitelů (v domácnostech a v továrnách). Nechceme samozřejmě, aby televizor nebo dětský vláček byl napájen z rozvodné sítě napětím 22 kV. Na druhé straně uvidíme, že při přenosu elektrické energie z elektrárny ke spotřebitelům jsou výhodné co nejnižší proudy (a proto co nejvyšší napětí), aby se minimalizovaly ztráty  $I^2 R$  Joulovým teplem v přenosových vedeních.

Jako příklad uvažujme 735 kV vedení používané k přenosu elektrické energie z vodní elektrárny La Grande 2 v Quebecu do 1 000 km vzdáleného Montrealu. Předpokládejme, že proud je 500 A a účinník je blízký jedné. Potom podle rov. (33.67) elektrárna dodává energii se středním výkonem

$$\mathcal{E} I = (7,35 \cdot 10^5 \text{ V})(500 \text{ A}) = 368 \text{ MW}.$$

Odpor na kilometr vedení je asi  $0,220 \Omega$ , a tedy celkový odpor při délce 1 000 km je  $220 \Omega$ . Ztrátový výkon v odporu vedení je

$$I^2 R = (500 \text{ A})^2 (220 \Omega) = 55,0 \text{ MW},$$

což je téměř 15 % přenášeného výkonu.

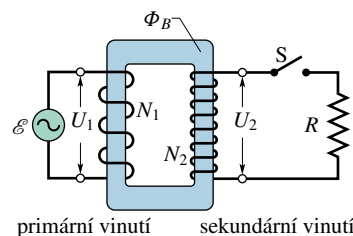
Představme si, co by se stalo, kdyby se zdvojnásobil proud a na polovinu snížilo napětí. Výkon dodávaný elektrárnou by zůstal 368 MW jako v předchozím příkladě, avšak ztrátový výkon by nyní byl

$$I^2 R = (1\,000 \text{ A})^2 (220 \Omega) = 220 \text{ MW},$$

což je téměř 60 % dodávaného výkonu. Odtud můžeme vyvodit obecné pravidlo pro přenos energie: k přenosu je třeba použít co nejmenší proud, a tedy co nejvyšší napětí.

## Transformátor

Požadavek vysoké účinnosti při přenosu energie vede k použití vysokého napětí; to je ale v základním rozporu s bezpečností práce při výrobě i spotřebě elektřiny. Potřebujeme proto zařízení, kterým bychom mohli napětí v obvodech zvýšit (pro přenos) a snížit (pro spotřebu), přičemž by součin proudu a napětí zůstal konstantní. Tímto zařízením je **transformátor**. Transformátor nemá žádné pohyblivé části, využívá jevu elektromagnetické indukce. Žádné jednoduché analogické zařízení, které by totéž umožňovalo se stejnosměrným proudem, neexistuje.



**Obr. 33.15** Transformátor sestává ze dvou cívek navinutých na společném železném jádru. Generátor střídavého proudu dodává proud do levé cívky (primární vinutí). Je-li spínač  $S$  sepnut, je cívka napravo (sekundární vinutí) připojena k odporové zátěži  $R$ .

Transformátor (obr. 33.15) se skládá ze dvou cívek navinutých na železném jádru; nejsou s ním vodičově spojeny. Za provozu je primární vinutí s  $N_1$  závitů připojeno ke generátoru střídavého napětí, jehož emn je dáno rov. (33.25). Sekundární vinutí s  $N_2$  závitů je připojeno k zatěžovacímu rezistoru  $R$  pomocí spínače  $S$ . Předpokládejme nejprve, že rezistor je odpojen. Potom sekundární cívkou neprotéká žádný proud. Dále budeme předpokládat, že odpor primárního i sekundárního vinutí je zanedbatelný, stejně jako ztráty v důsledku magnetické hystereze v železném jádru. Vhodně navržené transformátory velkého výkonu mají ztráty pod 1 %, takže tyto předpoklady jsou oprávněné.

Za těchto předpokladů má primární vinutí pouze indukčnost (obr. 33.10a) a chová se jako cívka. Proto je malý primární proud (tzv. magnetizační proud  $I_{\text{mag}}$ ) zpožděn za primárním napětím o  $90^\circ$ ; účinník primárního vinutí ( $\cos \varphi$  v rov. (33.67)) je nulový, a tedy generátor do transformátoru nedodává žádný výkon.

Malý střídavý primární proud vytváří v železném jádru střídavý magnetický indukční tok  $\Phi_B$ , a protože je na jádru navinuto i sekundární vinutí, zasahuje tento tok i jeho závit. Z Faradayova indukčního zákona (rov. (31.6)) plyne, že emn indukované v jednom závitě  $e_{\text{záv}}$  je stejné jak pro primární, tak pro sekundární vinutí. Dále napětí  $u_1$  je rovno emn indukovanému v primárním vinutí a napětí  $u_2$  je rovno

emn na sekundárním vinutí. Můžeme proto psát

$$e_{zav} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2}, \quad (33.69)$$

odkud pro efektivní hodnoty napětí plyne

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{transformace napětí}). \quad (33.70)$$

Transformátor, u kterého je  $N_2 > N_1$ , nazýváme *zvyšovací*, protože zvyšuje primární napětí  $U_1$  na vyšší napětí  $U_2$ . Transformátor s  $N_2 < N_1$  nazýváme *snižovací*.

Až dosud jsme uvažovali spínač  $S$  rozepnutý; generátor nedodával do obvodu žádnou energii. Nyní sepneme spínač  $S$  a připojíme tím k sekundárnímu vinutí odporovou zátěž  $R$ . (Obecně může zátěž obsahovat také indukční a kapacitní prvky, ale zde budeme uvažovat pouze rezistor  $R$ .) Shledáme, že se nyní energie *přenášá* z generátoru do zátěže. Podívejme se, proč.

Po sepnutí spínače  $S$  dojde k několika jevům.

(1) Sekundárním obvodem začne protékat střídavý proud  $I_2$ , který způsobí v odporové zátěži ztráty  $I_2^2 R = U_2^2/R$ .

(2) Sekundární proud vytvoří střídavý magnetický tok v železném jádru a ten indukuje (podle Faradayova indukčního zákona a Lenzova zákona) v primárním vinutí emn opačně orientované.

(3) Napětí  $U_1$  na primárním vinutí se však v důsledku napětí indukovaného proudem  $I_2$  nemůže změnit, neboť musí být stále rovno emn generátoru. Sepnutí spínače to nemůže ovlivnit.

(4) Aby generátor udržel napětí  $U_1$ , musí (navíc k magnetizačnímu proudu) primárním vinutím procházet takový střídavý proud  $I_1$ , jehož velikost a počáteční fáze jsou právě tak velké, aby emn indukované tímto proudem v primárním vinutí přesně zrušilo emn indukované v něm sekundárním proudem  $I_2$ . Protože primární proud  $I_1$  už není posunut vůči primárnímu napětí  $U_1$  přesně o  $90^\circ$  (jako tomu bylo u magnetizačního proudu), přivádí proud  $I_1$  do primárního vinutí energii.

Nalezneme nyní vzájemný vztah mezi  $I_2$  a  $I_1$ . Namísto analýzy detailů složitého procesu použijme pouze zákon zachování energie. Přitom stále předpokládáme, že zátěž je čistě odporová. Výkon přiváděný z generátoru na primární vinutí je  $I_1 U_1$ . Výkon přenášený z primárního vinutí do sekundárního vinutí (obě cívky jsou spřaženy magnetickým polem) je  $I_2 U_2$ . Protože předpokládáme, že se žádná energie během přenosu neztratí, plyne ze zákona zachování energie

$$I_1 U_1 = I_2 U_2.$$

Dosadíme-li za  $U_2$  z rov. (33.70), dostaneme

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{transformace proudu}). \quad (33.71)$$

Tato rovnice vyjadřuje, že proud  $I_2$  v sekundárním vinutí může být větší, menší, nebo stejný ve srovnání s proudem  $I_1$  v primárním vinutí, a to v závislosti na poměru počtu závitů  $N_1/N_2$ .

### Impedanční přizpůsobení

Proud  $I_1$  se v primární cívce objevil proto, že jsme do sekundárního obvodu zapojili zátěž  $R$ . Abychom vypočetli  $I_1$ , dosadíme  $I_2 = U_2/R$  do rov. (33.71) a pak ještě za  $U_2$  z rov. (33.70). Dostaneme tak

$$I_1 = \frac{1}{R} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 U_1. \quad (33.72)$$

Tuto rovnici můžeme zapsat ve tvaru  $I_1 = U_1/R'$ , kde jsme zavedli „transformovaný odpor“  $R'$  vztahem

$$R' = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R. \quad (33.73)$$

Na primární straně totiž protéká proud  $I_1$  při napětí  $U_1$ , jako by byl generátor připojen k rezistoru s odporem  $R'$ . Ze strany generátoru se tedy zapojení transformátor + zátěž  $R$  jeví tak, jako by byla v primárním obvodu zapojena zátěž  $R'$ .

Rov. (33.73) ukazuje, že transformátor může plnit ještě jinou funkci. Jak již víme (úloha 24 v kap. 28), maximální přenos výkonu ze zdroje emn do odporové zátěže nastává, jsou-li odpory zdroje a zátěže stejně velké. Totéž platí pro střídavé obvody s tím rozdílem, že *impedance* generátoru (namísto pouhého odporu) musí být přizpůsobena zátěži. Často se stává — např. když chceme připojit reproduktor k zesilovači — že tato podmínka není ani zdaleka splněna, protože zesilovač má vysokou impedanci a reproduktor naopak velmi nízkou. Obě impedance můžeme přizpůsobit vzájemným propojením pomocí transformátoru s vhodným převodním poměrem závitů  $N_1/N_2$ .

#### PŘÍKLAD 33.7

Rozvodný transformátor je napájen primárním napětím  $U_1 = 22 \text{ kV}$  a dodává energii do okolních domů při napětí  $U_2 = 230 \text{ V}$  (obě veličiny jsou efektivní hodnoty). Předpokládejme ideální snižovací transformátor, čistě odporovou zátěž a účinník roven jedné.

(a) Jaký je poměr závitů transformátoru  $N_1/N_2$ ?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (33.70) máme

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(22 \cdot 10^3 \text{ V})}{(230 \text{ V})} = 95,65 \doteq 96. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Střední výkon spotřebičů v domech napájených z transformátoru je 78 kW. Jaká je efektivní hodnota proudu na primárním a sekundárním vinutí transformátoru?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (33.67) dostaneme (při  $\cos \varphi = 1$  a  $U_1 = \mathcal{E}$  pro transformátor připojený ke zdroji emn)

$$I_1 = \frac{\bar{P}}{U_1} = \frac{(78 \cdot 10^3 \text{ W})}{(22 \cdot 10^3 \text{ V})} = 3,545 \text{ A} \doteq 3,5 \text{ A} \quad (\text{Odpověď})$$

a

$$I_2 = \frac{\bar{P}}{U_2} = \frac{(78 \cdot 10^3 \text{ W})}{(230 \text{ V})} = 339 \text{ A}. \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jaká je odporová zátěž v sekundárním obvodu?

**ŘEŠENÍ:** V sekundárním obvodu je

$$R = \frac{U_2}{I_2} = \frac{(230 \text{ V})}{(339 \text{ A})} = 0,678 \Omega \doteq 0,68 \Omega. \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Jaký je „transformovaný odpor“ v primárním obvodu? (Tj. jak je primární obvod zatížen?)

**ŘEŠENÍ:** Pro primární obvod vypočteme

$$R' = \frac{U_1}{I_1} = \frac{(22 \cdot 10^3 \text{ V})}{(3,545 \text{ A})} = 6206 \Omega \doteq 6,2 \text{ k}\Omega, \quad (\text{Odpověď})$$

nebo s použitím rov. (33.73)

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R = (95,65)^2 (0,1846 \Omega) = 6203 \Omega = 6,2 \text{ k}\Omega. \quad (\text{Odpověď})$$

**KONTROLA 8:** Zdroj harmonického emn má menší vnitřní odpor, než je odpor připojené zátěže. Abychom zvětšili přenos výkonu z generátoru do zátěže, vložíme mezi obě zařízení transformátor k přizpůsobení impedance. Použijeme zvyšovací, nebo snižovací transformátor?

## PŘEHLED & SHRUTÍ

### Přenos energie v obvodu LC

V kmitavém obvodu LC se energie periodicky přelévá mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Okamžitá hodnota obou forem energie je

$$E_{\text{el}} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{\text{mg}} = \frac{Li^2}{2}, \quad (33.1, 33.2)$$

kde  $q = Q(t)$  je náboj na kondenzátoru a  $i = I(t)$  je proud procházející cívku v čase  $t$ . Celková energie  $E = E_{\text{el}} + E_{\text{mg}}$  zůstává konstantní.

### Kmity v obvodu LC

Zákon zachování energie vede ke vztahu

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{kmity obvodu LC}), \quad (33.11)$$

což je diferenciální rovnice netlumených kmitů LC (bez odporu). Řešením rov. (33.11) je

$$q(t) = Q \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{časový průběh náboje}), \quad (33.12)$$

kde  $Q$  je amplituda náboje (největší náboj na kondenzátoru) a úhlová frekvence  $\omega$  netlumených kmitů je

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{obvod LC}). \quad (33.4)$$

Fázový posun  $\varphi$  v rov. (33.12) je určen počátečními podmínkami obvodu (v čase  $t = 0$ ).

Proud  $i$  v soustavě je

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{časový průběh proudu}), \quad (33.13)$$

kde  $\omega Q$  je amplituda proudu  $I$ .

### Tlumené kmity v obvodu RLC

V reálném obvodu LC dochází vždy k disipaci energie a kmity jsou proto tlumené. K disipaci energie dochází na prvku s odporem  $R$ . Diferenciální rovnice tlumených kmitů má tvar

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{obvod RLC}). \quad (33.20)$$

Její řešení je

$$q = Q e^{-Rt/(2L)} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \quad (33.22)$$

### Střídavé proudy, vynucené kmity

V sériovém obvodu RLC můžeme vybudit vynucené kmity s buďící úhlovou frekvencí  $\omega_b$  prostřednictvím vnějšího zdroje harmonického emn

$$e = \mathcal{E} \sin \omega_b t. \quad (33.25)$$

Proud buzený v obvodu přiloženým emn je

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.26)$$

kde  $\varphi$  je fázový posun proudu  $i$  vůči  $e$ .

### Rezonance

Amplituda proudu  $I$  v sériovém obvodu  $RLC$  buzeného harmonickým emn je největší ( $I = \mathcal{E}/R$ ), jestliže je budící úhlová frekvence  $\omega_b$  rovna vlastní úhlové frekvenci  $\omega$  (netlumeného) obvodu  $LC$ . Pak  $X_C = X_L$ ,  $\varphi = 0$  a proud je ve fázi s emn.

### Jednotlivé prvky obvodu

Harmonické napětí na rezistoru má amplitudu  $U_R = IR$ ; proud je ve fázi s napětím. Pro kondenzátor platí  $U_C = IX_C$ , kde  $X_C = 1/(\omega_b C)$  je kapacitní reaktance; proud předbíhá před napětím o  $90^\circ$ . Pro cívku platí  $U_L = IX_L$ , kde  $X_L = \omega_b L$  je induktivní reaktance; proud je zpožděn za napětím o  $90^\circ$ .

### Sériový obvod $RLC$

Pro sériový obvod  $RLC$  s vnějším emn podle rov. (33.25) a s proudem podle rov. (33.26) platí

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}} \quad (\text{amplituda proudu}) \quad (33.51, 33.54)$$

a

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{fázový posun}). \quad (33.56)$$

Impedance  $Z$  obvodu je

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{impedance}). \quad (33.52)$$

Potom rov. (33.51) můžeme zapsat vztahem  $I = \mathcal{E}/Z$ .

### Výkon v obvodech se střídavým proudem

V sériovém obvodu  $RLC$  je střední výkon generátoru  $\bar{P}$  roven výkonu disipovanému v rezistoru:

$$\bar{P} = I_{\text{ef}}^2 R = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi \quad (\text{střední výkon}). \quad (33.62, 33.67)$$

Index ef znamená *efektivní hodnotu*. Mezi efektivními a maximálními hodnotami platí vztahy  $I_{\text{ef}} = I/\sqrt{2}$ ,  $U_{\text{ef}} = U/\sqrt{2}$ ,  $\mathcal{E}_{\text{ef}} = \mathcal{E}/\sqrt{2}$ . Činitel  $\cos \varphi$  se nazývá *účinnost*.

### Transformátory

Transformátor se skládá ze železného jádra, na kterém je navinuto primární vinutí s  $N_1$  závitů a sekundární vinutí s  $N_2$  závitů. Jestliže primární cívku připojujeme ke zdroji střídavého proudu, pro napětí na primárním a sekundárním vinutí platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{transformace napětí}), \quad (33.70)$$

a mezi proudy platí vztah

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{transformace proudů}). \quad (33.71)$$

Je-li sekundární vinutí zatíženo odporem  $R$ , je situace v obvodu stejná, jako kdyby byl generátor zatížen „transformovaným odporem“  $R'$  o velikosti

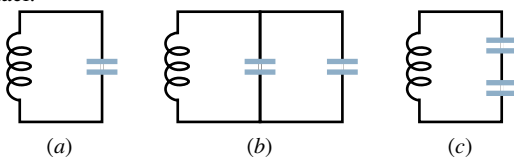
$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R. \quad (33.73)$$

## OTÁZKY

1. Nabitý kondenzátor a cívku vodivě spojíme v čase  $t = 0$ . Vyjádřete v násobcích periody  $T$  vzniklých kmitů nejkratší dobu, za jakou dosáhne maximum (a) energie v magnetickém poli  $E_{\text{mg}}$ , (b) magnetický tok v cívce, (c)  $di/dt$ , (d) emn v cívce.

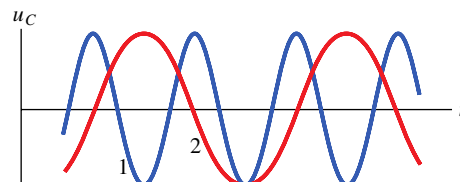
2. Jaká musí být hodnota počáteční fáze  $\varphi$  v rov. (33.12), aby v  $t = 0$  nastal stav podle obr. 33.1 (a), (c), (e) a (g)?

3. Obr. 33.16 ukazuje tři kmitavé obvody  $LC$  se stejnými cívkami a kondenzátory. Uspořádejte obvody v sestupném pořadí podle doby, potřebné k úplnému vybití kondenzátoru během oscilací.



Obr. 33.16 Otázka 3

4. Obr. 33.17 ukazuje závislost napětí  $u_C$  na kondenzátoru pro  $LC$  obvody 1 a 2, které mají stejně velké kapacity a stejný maximální náboj  $Q$ . Stanovte, jsou-li hodnoty (a) indukčnosti  $L$  a (b) maximálního proudu  $I$  v obvodu 1 větší, menší, nebo rovny hodnotám těchto veličin v obvodu 2.



Obr. 33.17 Otázka 4

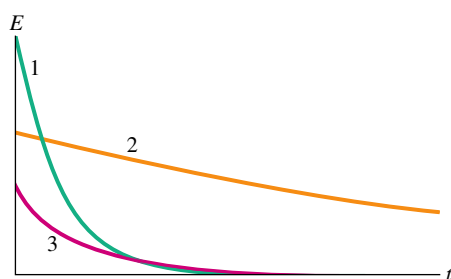
5. Náboje na kondenzátorech tří kmitavých obvodů  $LC$  se mění podle vztahů: (1)  $q = 2 \cos 4t$ ; (2)  $q = 4 \cos t$ ; (3)  $q = 3 \cos 4t$  (kde  $q$  je v coulombech a  $t$  v sekundách). Seřadte obvody v se-

stupném pořadí (a) podle amplitudy proudu a (b) podle periody kmitů.

**6.** Obvod  $LC$  kmitá s maximálním nábojem  $Q$ . Co se stane (a) s amplitudou proudu  $I$ , (b) s největší hodnotou  $E_{\text{mg}}$  energie magnetického pole — zvětší se, zmenší, nebo zůstane stejná?

**7.** Klesá náboj na kondenzátoru v tlumeném obvodu  $RLC$  rychleji, pomaleji, nebo stejně rychle jako energie?

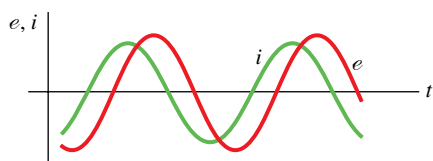
**8.** Obr. 33.18 ukazuje závislost střední hodnoty energie na čase pro tři tlumené kmitavé sériové obvody  $RLC$  se stejným počátečním nábojem  $Q_0$ . Seřaďte obvody sestupně podle jejich (a) kapacity  $C$ , (b) hodnoty  $L/R$ .



Obr. 33.18 Otázka 8

**9.** Hodnoty počátečních fází  $\varphi$  pro čtyři harmonicky buzené sériové obvody  $RLC$  jsou (1)  $-15^\circ$ , (2)  $+35^\circ$ , (3)  $\pi/3$  rad, (4)  $-\pi/6$  rad. (a) Ve kterém obvodu je zátěž kapacitního charakteru? (b) Ve kterém obvodu střídavé emn předbíhá proud?

**10.** Obr. 33.19 ukazuje proud  $i$  a budící emn pro sériový obvod  $RLC$ . (a) Předbíhá proud emn, nebo je za ním zpožděn? (b) Má zátěž obvodu kapacitní, nebo induktivní charakter? (c) Je úhlová frekvence emn větší, nebo menší než vlastní úhlová frekvence obvodu?



Obr. 33.19 Otázky 10 a 15

**11.** Následující tabulka udává pro tři sériové obvody  $RLC$  amplitudu  $\mathcal{E}$  budícího emn a hodnoty  $R$ ,  $L$  a  $C$ . Bez písemných výpočtů stanovte sestupně pořadí obvodů podle (a) amplitudy

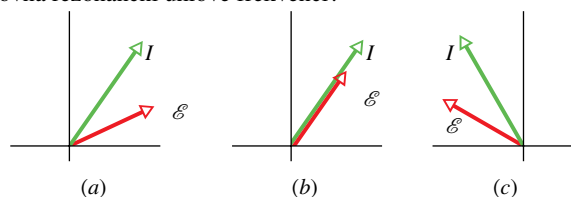
proudu  $I$  při rezonanci a (b) úhlové frekvence při rezonanci.

| OBVOD | $\frac{\mathcal{E}}{\text{V}}$ | $\frac{R}{\Omega}$ | $\frac{L}{\text{mH}}$ | $\frac{C}{\mu\text{F}}$ |
|-------|--------------------------------|--------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1     | 25                             | 5,0                | 200                   | 10                      |
| 2     | 60                             | 12                 | 100                   | 5,0                     |
| 3     | 80                             | 10                 | 300                   | 10                      |

**12.** Předpokládejme, že pro konkrétní budící úhlovou frekvenci předbíhá v sériovém  $RLC$  obvodu emn před proudem. Nyní poněkud snížíte budící úhlovou frekvenci. Jak se změní (a) počáteční fáze a (b) amplituda proudu: vzroste, sníží se, nebo zůstane stejná?

**13.** Budící úhlová frekvence v jistém sériovém obvodu  $RLC$  je menší než vlastní úhlová frekvence obvodu. (a) Je počáteční fáze  $\varphi$  kladná, záporná, nebo nulová? Předbíhá proud, nebo je zpožděn vzhledem k emn?

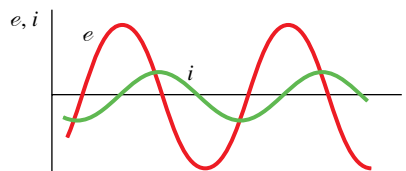
**14.** Obr. 33.20 ukazuje tři situace podobné stavům z obr. 33.12. Pro který stav je budící úhlová frekvence větší, menší, nebo rovna rezonanční úhlové frekvenci?



Obr. 33.20 Otázka 14

**15.** Obr. 33.19 znázorňuje proud  $i$  a budící emn  $e$  v sériovém obvodu  $RLC$ . Pokud poněkud zvýšíme (a)  $L$ , (b)  $C$ , (c) budící úhlovou frekvenci emn, určete, (1) zda se vzhledem ke křivce emn křivka proudu posune vlevo, nebo vpravo a (2) zda se amplituda křivky proudu zvýší, nebo sníží.

**16.** Obr. 33.21 ukazuje časový průběh proudu  $i$  a budícího emn  $e$  pro sériový obvod  $RLC$ . (a) Je počáteční fáze kladná, nebo záporná? (b) Abychom zvýšili výkon přenášený do odporové zátěže, je třeba  $L$  zvětšit, nebo zmenšit? (c) Má se při stejném  $L$  zvětšit, nebo zmenšit hodnota  $C$ ?



Obr. 33.21 Otázka 16

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 33.2 Kvalitativní rozbor kmitů $LC$

**1C.** Jaká je kapacita kmitavého obvodu  $LC$ , má-li kondenzátor maximální náboj  $1,60 \mu\text{C}$  a energii  $140 \mu\text{J}$ ?

**2C.** Cívka s indukčností  $1,50 \text{ mH}$ , zapojená v kmitavém obvodu  $LC$ , akumuluje maximální energii  $10,0 \mu\text{J}$ . Jaký je maximální proud?

**3C.** V kmitavém obvodu  $LC$  je  $L = 1,10 \text{ mH}$  a  $C = 4,00 \mu\text{F}$ . Maximální náboj na kondenzátoru je  $3,00 \mu\text{C}$ . Vypočítejte maximální proud v obvodu.

**4C.** Kmitavý obvod  $LC$  se skládá z cívky  $75,0 \text{ mH}$  a kondenzátoru  $3,60 \mu\text{F}$ . Je-li maximální náboj na kondenzátoru  $2,90 \mu\text{C}$ , (a) jaká je celková energie v obvodu, (b) jaký je maximální proud?

**5C.** V kmitavém obvodu  $LC$  se celková energie elektrického pole v kondenzátoru změní během  $1,50 \mu\text{s}$  na energii magnetického pole. (a) Jaká je perioda kmitů  $T$ ? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Jak dlouho po dosažení maxima energie magnetického pole dosáhne obvod opět tohoto maxima?

**6Ú.** Frekvence kmitů obvodu  $LC$  je  $200 \text{ kHz}$ . V čase  $t = 0$  je na elektrodě A kondenzátoru maximální kladný náboj. V jakých okamžicích  $t > 0$  bude (a) elektroda A mít opět maximální kladný náboj, (b) druhá elektroda mít maximální kladný náboj, (c) cívka mít maximální energii?

### ODST. 33.3 Elektro-mechanická analogie

**7C.** Těleso hmotnosti  $0,50 \text{ kg}$  kmitá na pružině, jejíž síla pružnosti při výchylce  $2,0 \text{ mm}$  z rovnovážné polohy má velikost  $8,0 \text{ N}$ . (a) Jaká je úhlová frekvence kmitů? (b) Jaká je perioda kmitů? (c) Jaká je kapacita odpovídajícího obvodu  $LC$  pro  $L = 5,0 \text{ H}$ ?

**8Ú.** Energie v kmitavém obvodu  $LC$  s  $L = 1,25 \text{ H}$  je  $5,7 \mu\text{J}$ . Maximální náboj na kondenzátoru je  $175 \mu\text{C}$ . Stanovte u odpovídajícího mechanického oscilátoru (a) hmotnost, (b) tuhost pružiny, (c) největší výchylku, (d) největší rychlost.

### ODST. 33.4 Kmity $LC$ kvantitativně

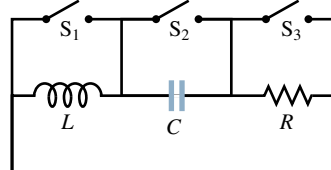
**9C.** V některých generátorech elektronické hudby se používají oscilátory  $LC$ . Jak velká indukčnost musí být použita spolu s kondenzátorem  $6,7 \mu\text{F}$  k získání frekvence komorního  $a$  ( $440 \text{ Hz}$ )?

**10C.** Jakou kapacitu musíte připojit k cívce  $1,30 \text{ mH}$ , abyste vytvořili oscilátor rezonující na  $3,50 \text{ kHz}$ ?

**11C.** V obvodu  $LC$  s  $L = 50 \text{ mH}$  a  $C = 4,0 \mu\text{F}$  je počáteční proud maximální. Jak dlouho potrvá, než se kondenzátor nabije poprvé na maximální napětí?

**12C.** Uvažujte obvod podle obr. 33.22. Se spínačem  $S_1$  sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou

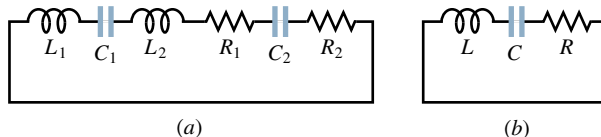
konstantu  $\tau_C$  (viz čl. 28.8). Se spínačem  $S_2$  sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou konstantu  $\tau_L$  (viz čl. 31.9). Se spínačem  $S_3$  sepnutým a zbývajících rozpojenými kmitá obvod s periodou  $T$ . Dokažte, že  $T = 2\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}$ .



Obr. 33.22 Cvičení 12

**13C.** S použitím smyčkového pravidla odvoďte diferenciální rovnici (33.11) pro obvod  $LC$ .

**14C.** Jednoduchá smyčka se skládá z několika cívek ( $L_1, L_2, \dots$ ), několika kondenzátorů ( $C_1, C_2, \dots$ ) a několika rezistorů ( $R_1, R_2, \dots$ ) zapojených v sérii (obr. 33.23a). Dokažte, že bez ohledu na pořadí těchto obvodových prvků ve smyčce je chování obvodu stejné jako chování jednoduchého obvodu  $LC$  v obr. 33.23b. (Tip: Použijte smyčkové pravidlo a cvič. 56 v kap. 31.)



Obr. 33.23 Cvičení 14

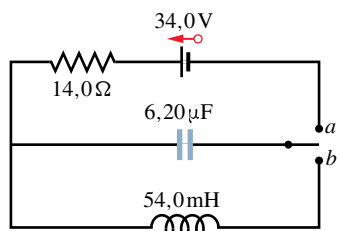
**15Ú.** V kmitavém obvodu  $LC$  složeném z kondenzátoru  $1,0 \text{ nF}$  a cívky  $3,0 \text{ mH}$  je maximální napětí  $3,0 \text{ V}$ . (a) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (b) Jaký je maximální proud v obvodu? (c) Jaká je maximální energie magnetického pole cívky?

**16Ú.** Kmitavý obvod  $LC$  má indukčnost  $3,00 \text{ mH}$  a kapacitu  $10,0 \mu\text{F}$ . Vypočítejte jeho (a) úhlovou frekvenci, (b) periodu kmitů. (c) V čase  $t = 0$  je kondenzátor nabit nábojem  $200 \mu\text{C}$  a proud je nulový. Nakreslete (přibližně) průběh náboje na kondenzátoru jako funkci času.

**17Ú.** V kmitavém obvodu  $LC$  s kapacitou  $C = 4,00 \mu\text{F}$  je maximální napětí na kondenzátoru během oscilací  $1,50 \text{ V}$  a maximální proud je  $50,0 \text{ mA}$ . (a) Jaká je indukčnost  $L$ ? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Za jakou dobu dosáhne náboj na kondenzátoru maximální hodnotu (z nenabitého stavu)?

**18Ú.** V obvodu na obr. 33.24 byl přepínač po dlouhou dobu v poloze  $a$ . Náhle je přepojen do polohy  $b$ . (a) Vypočítejte frekvenci kmitů proudu. (b) Jaká je jejich amplituda?

**19Ú.** Mějme cívku  $10 \text{ mH}$  a dva kondenzátory o kapacitách  $5,0 \mu\text{F}$  a  $2,0 \mu\text{F}$ . Vypište všechny rezonanční kmitočty, které můžeme generovat spojením těchto prvků v různých kombinacích.



Obr. 33.24 Úloha 18

**20Ú.** Obvod  $LC$  rezonuje na frekvenci 10,4 kHz. (a) Jaká je indukčnost v obvodu, je-li kapacita 340  $\mu\text{F}$ ? (b) Jaká je celková energie v obvodu, je-li maximální proud 7,20 mA? (c) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru?

**21Ú.** (a) V kmitavém obvodu  $LC$  vyjádřete pomocí maximálního náboje na kondenzátoru velikost náboje v okamžiku, kdy energie elektrického pole je rovna 50,0 % energie magnetického pole. (b) Jaký zlomek periody musí uplynout od okamžiku, kdy je kondenzátor plně nabit, do splnění podmínky (a)?

**22Ú.** V kmitavém obvodu  $LC$  je v jistém okamžiku 75,0 % celkové energie akumulováno v magnetickém poli cívky. (a) Pomocí maximálního náboje  $Q$  vyjádřete náboj na kondenzátoru v tomto okamžiku. (b) Vyjádřete pomocí maximálního proudu v cívce velikost proudu v tomto okamžiku.

**23Ú.** Cívka je připojena ke kondenzátoru, jehož kapacitu lze plynule měnit otočným knoflíkem. Chceme, aby se frekvence kmitů  $LC$  měnila lineárně s úhlem natočení knoflíku v rozmezí  $2 \cdot 10^5$  Hz až  $4 \cdot 10^5$  Hz při otočení o  $180^\circ$ . Sestrojte graf závislosti požadované kapacity  $C$  na úhlu natočení knoflíku, je-li  $L = 1,0$  mH.

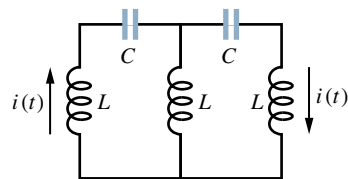
**24Ú.** Proměnný kondenzátor s rozsahem kapacity 10 pF až 365 pF tvoří s cívkou kmitavý obvod  $LC$  s proměnnou frekvencí k ladění radiopřijímače. (a) Jaký je poměr nejvyššího a nejnižšího kmitočtu, které můžeme získat tímto obvodem? (b) Mají-li být takovým obvodem získány kmitočty od 0,54 MHz do 1,60 MHz, je poměr vypočtený v (a) příliš vysoký. Požadovaného poměru kmitočtů lze dosáhnout připojením paralelního kondenzátoru. Jak velkou kapacitu musíme přidat a jakou indukčnost použít, abychom získali požadovaný rozsah kmitočtů?

**25Ú.** V kmitavém obvodu  $LC$  je  $L = 25,0$  mH a  $C = 7,80$   $\mu\text{F}$ . V čase  $t = 0$  je proud 9,20 mA, náboj na kondenzátoru je 3,80  $\mu\text{C}$  a kondenzátor se nabíjí. (a) Jaká je celková energie v obvodu? (b) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (c) Jaký je maximální proud? (d) Jaká je hodnota  $\varphi$ , je-li náboj na kondenzátoru dán vztahem  $q = Q \cos(\omega t + \varphi)$ ? (e) Při stejném zadání předpokládáme, že se kondenzátor vybíjí. Jaká je v takovém případě hodnota  $\varphi$ ?

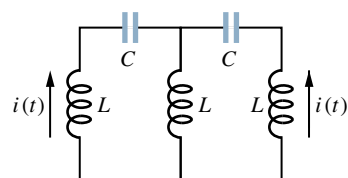
**26Ú.** V kmitavém obvodu  $LC$  je  $L = 3,00$  mH a  $C = 2,70$   $\mu\text{F}$ . V čase  $t = 0$  je náboj na kondenzátoru nulový a proud je 2,00 A. (a) Jaký největší náboj se objeví na kondenzátoru? (b) Ve kterém okamžiku (vyjádřeno pomocí periody  $T$ ) narůstá elektrická energie na kondenzátoru největší rychlostí?

**27Ú.** Tři stejné cívky  $L$  a dva stejné kondenzátory  $C$  tvoří dvě

smyčky podle obr. 33.25. (a) Předpokládejte, že proudy tečou podle obr. 33.25a. Jaký je proud v prostřední cívce? Napište odpovídající rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny tehdy, když proud kmitá s úhlovou frekvencí  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . (b) Předpokládejte, že proudy jsou orientovány podle obr. 33.25b. Jaký proud nyní teče prostřední cívkou? Napište rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny, jestliže proud kmitá s úhlovou frekvencí  $\omega = 1/\sqrt{3LC}$ . (Protože obvody mohou kmitat na dvou různých frekvencích, nemůžeme je nahradit jediným obvodem  $LC$ .)



(a)



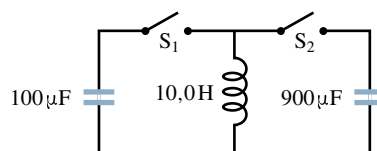
(b)

Obr. 33.25 Úloha 27

**28Ú.** Sériový obvod s indukčností  $L_1$  a kapacitou  $C_1$  kmitá s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Druhý sériový obvod s indukčností  $L_2$  a kapacitou  $C_2$  kmitá se stejnou úhlovou frekvencí. Vyjádřete úhlovou frekvenci kmitů obvodu obsahujícího všechny čtyři prvky v sérii. (Odpor obvodu zanedbejte.)

**29Ú.** V kmitavém obvodu  $LC$  s  $C = 64,0$   $\mu\text{F}$  je proud jako funkce času dán vztahem  $i(t) = 1,60 \sin(2500t + 0,680)$ , kde  $t$  je v sekundách,  $i$  v ampérech a fáze v radiánech. (a) Kdy poprvé (pro  $t > 0$ ) dosáhne proud svého maxima? Jaká je (b) indukčnost, (c) celková energie obvodu?

**30Ú\*.** V obr. 33.26 je ve výchozím stavu kondenzátor 900  $\mu\text{F}$  nabit na 100 V a kondenzátor 100  $\mu\text{F}$  je vybit. Popište detailně, jak lze nabít kondenzátor 100  $\mu\text{F}$  na napětí 300 V manipulací s přepínači  $S_1$  a  $S_2$ .



Obr. 33.26 Úloha 30

### ODST. 33.5 Tlumené kmitý v obvodu $RLC$

**31C.** Jaký odpor  $R$  musíme zapojit do série s indukčností  $L = 220$  mH a kapacitou  $C = 12,0$   $\mu\text{F}$ , aby maximální ná-

boj na kondenzátoru klesl na 99,0 % původní hodnoty během 50,0 period? (Předpokládejte  $\omega' \doteq \omega$ .)

**32C.** Uvažujte tlumený obvod  $RLC$ . (a) Ukažte, že člen vyjadřující tlumení  $e^{-Rt/(2L)}$ , který obsahuje  $L$ , ale ne  $C$ , lze přepsat do více symetrického tvaru, který zahrnuje  $L$  i  $C$ , ve tvaru  $e^{-\pi R \sqrt{C/L}(t/T)}$ , kde  $T$  je perioda kmitů (při zanedbání odporu). (b) S použitím (a) ukažte, že jednotka pro  $\sqrt{L/C}$  v SI je ohm. (c) S použitím (a) ukažte, že podmínka pro to, aby ztráty energie za periodu byly malé, je  $R \ll \sqrt{L/C}$ .

**33Ú.** V kmitavém sériovém obvodu  $RLC$  určete dobu potřebnou k tomu, aby maximální energie kondenzátoru během oscilací poklesla na polovinu počáteční hodnoty. Předpokládejte  $q = Q$  v čase  $t = 0$ .

**34Ú.** Obvod s jednou smyčkou se skládá z rezistoru  $7,20 \Omega$ , cívky  $12,0 \text{ H}$  a kondenzátoru  $3,20 \mu\text{F}$ . Na počátku měl kondenzátor náboj  $6,20 \mu\text{C}$  a proud byl nulový. Vypočítejte náboj na kondenzátoru po  $N$  úplných periodách později pro  $N = 5, 10$  a  $100$ .

**35Ú.** V čase  $t = 0$  není na kondenzátoru obvodu  $RLC$  žádný náboj, avšak cívkou protéká proud  $I$ . (a) Vyjádřete počáteční fázi  $\varphi$  v rov. (33.21) pro tento obvod. (b) Napište výraz pro náboj  $q$  na kondenzátoru jako funkci času  $t$  pomocí amplitudy proudu a úhlové frekvence  $\omega'$ .

**36Ú.** (a) Přímým dosazením rov. (33.21) do rov. (33.20) dokažte, že  $\omega' = \sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}$ . (b) O kolik se změní frekvence kmitů, jestliže se odpor zvýší z  $0$  na  $100 \Omega$  v obvodu, v němž je  $L = 4,40 \text{ H}$  a  $C = 7,30 \mu\text{F}$ ?

**37Ú\*.** Dokažte, že v kmitavém obvodu  $RLC$  je relativní úbytek energie  $\Delta E/E$  za jednu periodu přibližně roven  $2\pi R/(\omega L)$ . Veličina  $\omega L/R$  se nazývá *činitel jakosti*  $Q$  obvodu (nezaměňovat s nábojem). Obvody s velkou hodnotou  $Q$  mají malý odpor a nízké poměrné ztráty energie za periodu  $2\pi/Q$ .

### ODST. 33.8 Tři jednoduché obvody

**38C.** Kondenzátor  $1,50 \mu\text{F}$  je připojen podle obr. 33.9a ke generátoru střídavého napětí s  $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$ . Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a)  $1,00 \text{ kHz}$ , (b)  $8,00 \text{ kHz}$ ?

**39C.** Cívka  $50,0 \text{ mH}$  je připojena podle obr. 33.10a ke generátoru střídavého napětí s  $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$ . Jaká je amplituda výsledného střídavého proudu, je-li frekvence emn (a)  $1,00 \text{ kHz}$ , (b)  $8,00 \text{ kHz}$ ?

**40C.** Rezistor  $50,0 \Omega$  je připojen podle obr. 33.8a ke generátoru střídavého napětí s  $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$ . Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a)  $1,00 \text{ kHz}$ , (b)  $8,00 \text{ kHz}$ ?

**41C.** Cívka s indukčností  $L = 45,0 \text{ mH}$  má induktivní reaktanci  $X_L = 1,30 \text{ k}\Omega$ . (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká je kapacita kondenzátoru se stejnou reaktancí při stejné frekvenci? (c) Jak velké budou reaktance cívky a kondenzátoru, jestliže se frekvence zdvojnásobí?

**42C.** Kondenzátor  $1,50 \mu\text{F}$  má reaktanci  $12,0 \Omega$ . (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká bude jeho reaktance, jestliže frekvenci zdvojnásobíme?

**43C.** (a) Při jaké frekvenci by měly cívka  $6,0 \text{ mH}$  a kondenzátor  $10 \mu\text{F}$  stejnou reaktanci a (b) jak velká by byla? (c) Dokažte, že tato frekvence by byla frekvencí vlastních kmitů obvodu se zadanými hodnotami  $L$  a  $C$ .

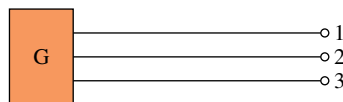
**44Ú.** Generátor emn  $e = \mathcal{E} \sin \omega_b t$ , kde  $\mathcal{E} = 25,0 \text{ V}$  a  $\omega_b = 377 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , je připojen k cívkce o indukčnosti  $12,7 \text{ H}$ . (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru v okamžiku, když je proud právě maximální? (c) Jaký je proud v okamžiku, když je emn generátoru rovno  $-12,5 \text{ V}$  a dále klesá?

**45Ú.** Generátor z úlohy 44 je připojen ke kondenzátoru  $4,15 \mu\text{F}$ . (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru, je-li proud právě maximální? (c) Je-li emn generátoru  $-12,5 \text{ V}$  a roste, jaký je proud?

**46Ú.** Generátor má emn  $e = \mathcal{E} \sin(\omega_b t - \pi/4)$ , kde  $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$  a  $\omega_b = 350 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Proud v připojeném obvodu je  $i(t) = I \sin(\omega_b t - 3\pi/4)$ , kde  $I = 620 \text{ mA}$ . (a) Kdy dosáhne emn generátoru pro  $t > 0$  poprvé maxima? (b) Kdy dosáhne proud generátoru pro  $t > 0$  poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru další prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota kapacity, indukčnosti, nebo odporu z otázky (c)?

**47Ú.** Generátor má emn  $e = \mathcal{E} \sin(\omega_b t - \pi/4)$ , kde  $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$  a  $\omega_b = 350 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Proud je dán vztahem  $i(t) = I \sin(\omega_b t + \pi/4)$ , kde  $I = 620 \text{ mA}$ . (a) V jakém čase po  $t = 0$  nabude emn generátoru poprvé maxima? (b) Kdy pro  $t > 0$  nabude proud poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru ještě jeden prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota příslušné kapacity, indukčnosti, nebo odporu?

**48Ú.** Třífázový generátor  $G$  je zdrojem energie, která je přenášena pomocí tří vodičů podle obr. 33.27. Jejich napětí vůči zemi jsou  $u_1 = U \sin \omega_b t$ ,  $u_2 = U \sin(\omega_b t - 120^\circ)$  a  $u_3 = U \sin(\omega_b t - 240^\circ)$ . Některá zařízení většího výkonu (např. motory) mají tři svorky a jsou navrženy tak, že se připojí přímo ke všem třem vodičům. Ukažte, že napětí mezi dvěma libovolnými vodiči (a) kmitá harmonicky s časem s úhlovou frekvencí  $\omega_b$ , (b) má amplitudu  $U\sqrt{3}$ .



třívodičové přenosové vedení

Obr. 33.27 Úloha 48

### ODST. 33.9 Sériový obvod $RLC$

**49C.** (a) Nalezněte  $Z$ ,  $\varphi$  a  $I$  pro zadání z př. 33.5, jestliže odstraníme kondenzátor z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete ve vhodném měřítku pro tento nový stav fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

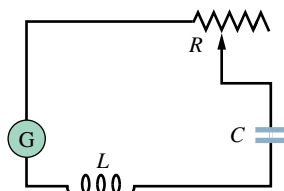
**50C.** (a) Stanovte  $Z$ ,  $\varphi$  a  $I$  pro zadání z př. 33.5, odstraníme-li cívku z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete

pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

**51C.** (a) Nalezněte  $Z$ ,  $\varphi$  a  $I$  pro zadání př. 33.5 s  $C = 70,0 \mu\text{F}$ , jestliže se ostatní parametry nezměnily. (b) Nakreslete pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram, podobný obr. 33.11d, a oba diagramy porovnejte.

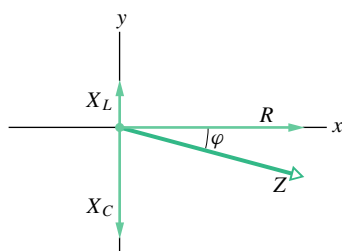
**52C.** Zdroj s proměnným kmitočtem je spojen v sérii s cívkou  $L = 2,50 \text{ mH}$  a s kondenzátorem  $C = 3,00 \mu\text{F}$ . Při jakém kmitočtu zdroje bude v obvodu největší amplituda proudu?

**53Ú.** V obr. 33.28 je generátor s proměnným kmitočtem zapojen v sérii s proměnným odporem  $R$ , kondenzátorem  $C = 5,50 \mu\text{F}$  a cívkou s indukčností  $L$ . Při  $R = 100 \Omega$  je amplituda proudu při kmitočtech  $1,30 \text{ kHz}$  a  $1,50 \text{ kHz}$  poloviční ve srovnání s maximálním proudem v obvodu. (a) Jaká je hodnota  $L$ ? (b) Při jakých kmitočtech je proud roven polovině maximální hodnoty, zvětší-li se  $R$ ?



Obr. 33.28 Úloha 53

**54Ú.** Proveďte konstrukci diagramu podle obr. 33.29. Nakreslete (1) vektor v kladném směru osy  $y$  o velikosti  $X_L$ , (2) vektor v záporném směru osy  $y$  o velikosti  $X_C$ , (3) vektor v kladném směru osy  $x$  o velikosti  $R$  a najděte jejich výslednici. Přesvědčte se výpočtem, že impedance  $Z$  obvodu  $RLC$  je rovna velikosti této výslednice a fázové posunutí  $\varphi$  je rovno úhlu, který svírá tato výslednice s kladným směrem osy  $x$ . Jaký charakter (induktivní, nebo kapacitní) má obvod, kterému odpovídá obr. 33.29?



Obr. 33.29 Úloha 54

**55Ú.** Může být amplituda napětí na cívce větší než amplituda emn generátoru v obvodu  $RLC$ ? Uvažujte obvod  $RLC$  s  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1,0 \text{ H}$  a  $C = 1,0 \mu\text{F}$ . Vypočtete amplitudu napětí na cívce při rezonanci.

**56Ú.** Cívka s indukčností  $88 \text{ mH}$  o neznámé rezistanci a kondenzátor  $0,94 \mu\text{F}$  jsou spojeny v sérii se střídavým emn o kmitočtu  $930 \text{ Hz}$ . Jaká je rezistance cívky, je-li fázový posun mezi přiloženým napětím a proudem  $75^\circ$ ?

**57Ú.** Jaké je napětí na (a) generátoru, (b) rezistoru, (c) kondenzátoru a (d) cívce, je-li okamžitá hodnota emn v př. 33.5

maximální? (e) Součtem těchto okamžitých hodnot vzatých s příslušným znaménkem ověřte, že splňují smyčkové pravidlo.

**58Ú.** Generátor střídavého proudu s  $\mathcal{E} = 220 \text{ V}$ , pracující s kmitočtem  $400 \text{ Hz}$ , vyvolá kmity v sériovém obvodu  $RLC$ , který má  $R = 220 \Omega$ ,  $L = 150 \text{ mH}$  a  $C = 24,0 \mu\text{F}$ . Stanovte (a) kapacitní reaktanci  $X_C$ , (b) impedanci  $Z$ , (c) amplitudu proudu  $I$ . Druhý kondenzátor o stejné kapacitě je pak připojen v sérii s ostatními prvky. Určete, jestli hodnoty (d)  $X_C$ , (e)  $Z$  a (f)  $I$  vzrostou, poklesnou, nebo zůstanou stejné.

**59Ú.** Obvod  $RLC$  podle obr. 33.7 má  $R = 5,00 \Omega$ ,  $C = 20,0 \mu\text{F}$ ,  $L = 1,00 \text{ H}$  a  $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$ . (a) Při jaké úhlové frekvenci  $\omega_b$  bude mít amplituda proudu maximální hodnotu? (b) Jaká hodnota to bude? (c) Při jakých dvou úhlových frekvencích  $\omega_{b1}$  a  $\omega_{b2}$  bude amplituda proudu rovna polovině této maximální hodnoty? (d) Jaká je poměrná pološířka  $(\omega_{b1} - \omega_{b2})/\omega$  rezonanční křivky tohoto obvodu?

**60Ú.** V jistém sériovém obvodu  $RLC$  je maximální emn generátoru  $125 \text{ V}$  a maximální proud je  $3,20 \text{ A}$ . Pokud proud předbíhá emn o  $0,982 \text{ rad}$ , jaká je (a) impedance a (b) odpor obvodu? (c) Je obvod kapacitního, nebo induktivního charakteru?

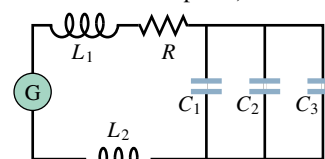
**61Ú.** Sériový obvod  $RLC$  má rezonanční frekvenci  $6,00 \text{ kHz}$ . Je-li napájen při  $8,00 \text{ kHz}$ , má impedanci  $1,00 \text{ k}\Omega$  a počáteční fázi  $45^\circ$ . Jaké jsou hodnoty (a)  $R$ , (b)  $L$ , (c)  $C$  pro tento obvod?

**62Ú.** V sériovém obvodu  $RLC$  je při kmitočtu  $50,0 \text{ Hz}$  maximální napětí na cívce rovno dvojnásobku maximálního napětí na rezistoru a také dvojnásobku maximálního napětí na kondenzátoru. (a) Jaký je fázový posun mezi proudem a emn generátoru? (b) Jaký by musel být odpor obvodu, aby byl maximální proud  $300 \text{ mA}$ , má-li emn generátoru amplitudu  $30,0 \text{ V}$ ?

**63Ú.** Obvod z př. 33.5 není v rezonanci. (a) Podle čeho to poznáte? (b) Jaký kondenzátor je třeba přidat ke stávajícímu, aby se obvod dostal do rezonance? (c) Jaká bude potom amplituda proudu?

**64Ú.** Generátor je zapojen v sérii s cívkou o indukčnosti  $L = 2,00 \text{ mH}$  a kondenzátorem o kapacitě  $C$ . Kapacitu  $C$  máte vytvořit pomocí kondenzátorů s kapacitami  $C_1 = 4,00 \mu\text{F}$  a  $C_2 = 6,00 \mu\text{F}$  použitých buď jednotlivě, nebo v kombinaci. Jaké rezonanční kmitočty může mít obvod v závislosti na hodnotě  $C$ ?

**65Ú.** Na obr. 33.30 je generátor s proměnnou frekvencí kmitů připojen k rezistoru s  $R = 100 \Omega$ , k cívkám s  $L_1 = 1,70 \text{ mH}$  a  $L_2 = 2,30 \text{ mH}$  a ke kondenzátorům s  $C_1 = 4,00 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2,50 \mu\text{F}$  a  $C_3 = 3,50 \mu\text{F}$ . (a) Jaká je rezonanční frekvence obvodu? (Tip: Viz úlohu 56 v kap. 31.) Jak se změní rezonanční



Obr. 33.30 Úloha 65

kmitočet, jestliže se (b) zvětší hodnota  $R$ , (c) zvětší hodnota  $L_1$ , (d) odstraní kondenzátor  $C_3$  z obvodu?

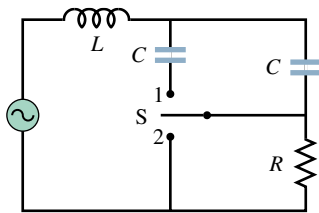
**66Ú.** Sériový obvod  $RLC$  s prvky  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $C_1$  má stejnou rezonanční frekvenci jako druhý obvod s prvky  $R_2$ ,  $L_2$ ,  $C_2$ . Nyní spojte oba obvody do série. Dokažte, že nově vzniklý obvod má opět stejnou rezonanční frekvenci jako každý z obou obvodů samostatně.

**67Ú.** Dokažte, že poměrná pološířka rezonanční křivky (viz úlohu 59d) je dána vztahem

$$\frac{\Delta\omega_b}{\omega} = \sqrt{\frac{3C}{L}} R,$$

kde  $\omega$  je úhlová frekvence při rezonanci a  $\Delta\omega_b$  šířka rezonanční křivky při poloviční amplitudě. Povšimněte si, že  $\Delta\omega_b/\omega$  narůstá s  $R$ , jak ukazuje obr. 33.13. Použijte tento vzorec ke kontrole odpovědi k úloze 59d.

**68Ú\*.** Generátor na obr. 33.31 dodává střídavé napětí 230 V při 50,0 Hz. Při rozpojeném přepínači (jako na obrázku) předbíhá proud emn generátoru o 20,0°. S přepínačem v poloze 1 je proud zpožděn za emn generátoru o 10,0°. Když je přepínač v poloze 2, je proud 2,00 A. Určete hodnoty  $R$ ,  $L$  a  $C$ .



Obr. 33.31 Úloha 68

### ODST. 33.10 Výkon v obvodech se střídavým proudem

**69C.** Jaká je maximální hodnota střídavého napětí, jehož efektivní hodnota je 100 V?

**70C.** Voltmetr s velkou impedancí je postupně připojen k cívce, kondenzátoru a rezistoru sériového obvodu  $RLC$ , který je zapojen k emn 100 V (efektivních). Ve všech případech na voltmetru odečteme stejné napětí. Jaká je tato odečtená hodnota?

**71C.** (a) Rozeberte zadání z úlohy 44c. Dodává, nebo odebrá generátor energii z obvodu? (b) Opakujte výpočet pro podmínky z úlohy 45c.

**72C.** Jak velký stejnosměrný proud musí procházet daným rezistorem, aby měl stejný tepelný výkon jako střídavý proud s maximální hodnotou 2,60 A?

**73C.** Pro obvody ve cvič. 39, 40, 49 a 50 vypočítejte střední ztrátový výkon.

**74C.** Dokažte, že střední výkon dodávaný do obvodu v obr. 33.7 lze vyjádřit také vztahem  $\bar{P} = (\mathcal{E}_{\text{ef}})^2 R / Z^2$ . Ukažte, že tento výraz pro střední výkon dává správné výsledky pro čistě odporový obvod, pro obvod  $RLC$  při rezonanci a pro čistě kapacitní a čistě induktivní obvod.

**75C.** Elektrický motor připojený ke 230 V a 50,0 Hz koná (mechanickou) práci s výstupním výkonem 74,6 W. Jaký je jeho odpor, protéká-li motorem efektivní proud 0,650 A?

**76C.** Klimatizační zařízení, připojené k síti o napětí  $U_{\text{ef}} = 120$  V, je ekvivalentní sériovému zapojení odporu 12,0  $\Omega$  a induktivní reaktance 1,30  $\Omega$ . (a) Vypočítejte impedanci klimatizačního zařízení. (b) Vypočítejte střední výkon do něj dodávaný.

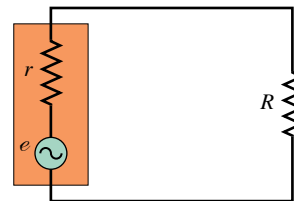
**77C.** Elektrický motor při zatížení má rezistanci 32,0  $\Omega$  a induktivní reaktanci 45,0  $\Omega$ . Efektivní napětí střídavého zdroje je 420 V. Vypočítejte efektivní proud tekoucí motorem.

**78Ú.** Namísto grafického zdůvodnění v obr. 33.14b dokažte výpočtem, že časová střední hodnota výrazu  $\sin^2(\omega t - \varphi)$  přes celistvý počet půlperiod je rovna 1/2.

**79Ú.** Pro harmonicky buzený sériový obvod  $RLC$  dokažte, že po jedné celé periodě  $T$  se energie uložená (a) v kondenzátoru, (b) v cívce nezměnila. Dokažte, že v průběhu periody (c) zdroj emn dodá energii  $(\frac{1}{2}T)\mathcal{E}I \cos \varphi$ , (d) v rezistoru se disipuje energie  $(\frac{1}{2}T)RI^2$ . (e) Ukažte, že energie nalezené v (c) a (d) jsou stejně velké.

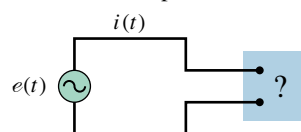
**80Ú.** V sériovém kmitavém obvodu  $RLC$  je  $R = 16,0 \Omega$ ,  $C = 31,2 \mu\text{F}$ ,  $L = 9,20 \text{ mH}$  a  $e = \mathcal{E} \sin \omega_b t$  s  $\mathcal{E} = 45,0$  V a  $\omega_b = 3000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . V čase  $t = 0,442 \text{ ms}$  určete okamžitý výkon (a) dodávaný generátorem, (b) dodávaný do kondenzátoru, (c) dodávaný do cívky, (d) disipovaný v rezistoru. (e) Jaký je význam záporné hodnoty pro kterýkoli z výsledků (a), (b) a (c)? (f) Ukažte, že součet výsledků (b), (c) a (d) je roven výsledku (a).

**81Ú.** Pro obvod z obr. 33.32 ukažte, že střední výkon, s nímž je energie disipována v rezistoru  $R$ , je největší, je-li  $R$  roven vnitřnímu odporu  $r$  generátoru střídavého proudu. (Až doposud jsme mlčky předpokládali ideální generátory, tj.  $r = 0$ .)



Obr. 33.32 Úlohy 81 a 90

**82Ú.** Obr. 33.33 ukazuje střídavý generátor připojený dvojicí svorek k „černé skříňce“. Ve skříňce je obvod  $RLC$  skládající se třeba i z více smyček, jejichž propojení však neznáme. Měření z vnějšku skříňky ukáže, že  $e(t) = (75,0 \text{ V}) \sin \omega_b t$  a  $i(t) = (1,20 \text{ A}) \sin(\omega_b t + 42,0^\circ)$ . (a) Jaký je účinník? (b) Předbíhá proud v obvodu, nebo je zpožděn vzhledem k emn? (c) Má obvod ve skříňce induktivní, nebo kapacitní charakter? (d) Je obvod

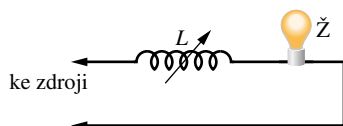


Obr. 33.33 Úloha 82

ve skříňce v rezonanci? (e) Musí být ve skříňce kondenzátor? Cívka? Rezistor? (f) Jaký je střední výkon, dodávaný do skříňky z generátoru? (g) Proč nepotřebujeme znát úhlovou frekvenci obvodu  $\omega_b$  k odpovědi na některé uvedené otázky?

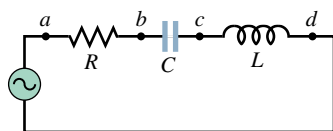
**83Ú.** V obvodu  $RLC$  na obr. 33.7 zvolme  $R = 5,00 \Omega$ ,  $L = 60,0 \text{ mH}$ ,  $f_b = 50,0 \text{ Hz}$  a  $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$ . Pro jakou velikost kapacity bude střední ztrátový výkon v rezistoru (a) největší, (b) nejmenší? (c) Jaké je maximum a minimum ztrátového výkonu? Jaké jsou odpovídající (d) fázové posuny a (e) účinníky?

**84Ú.** Před zavedením tyristorů se jako typický „stmívač“ pro jevištní reflektory používala cívka s proměnnou indukčností od 0 do  $L_{\max}$  zapojená v sérii se žárovkami reflektorů podle obr. 33.34. Napájecí napětí je  $230 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ ; žárovka nese údaj  $230 \text{ V}$ ,  $1000 \text{ W}$ . (a) Jakou hodnotu  $L_{\max}$  musí mít cívka, aby mohla zeslabit reflektor až na jednu pětinu plného výkonu? (Odpor vláknice sice s rostoucí teplotou a tedy i s dodávaným výkonem roste, ale tuto závislost neuvažujte a berte odpor jako konstantní.) (b) Mohli bychom místo cívky použít reostat (proměnný odpor) nastavitelný od 0 do  $R_{\max}$ ? Jestliže ano, jakou hodnotu  $R_{\max}$  bychom potřebovali? Proč se reostat nepoužívá?



Obr. 33.34 Úloha 84

**85Ú.** V obr. 33.35 je  $R = 15,0 \Omega$ ,  $C = 4,70 \mu\text{F}$  a  $L = 25,0 \text{ mH}$ . Generátor dodává napětí  $75,0 \text{ V}$  při kmitočtu  $550 \text{ Hz}$ . (a) Vypočítejte efektivní proud. (b) Stanovte efektivní napětí  $U_{ab}$ ,  $U_{bc}$ ,  $U_{cd}$ ,  $U_{bd}$ ,  $U_{ad}$ . (c) Jaká je střední hodnota ztrátového výkonu v každém ze tří prvků?



Obr. 33.35 Úloha 85

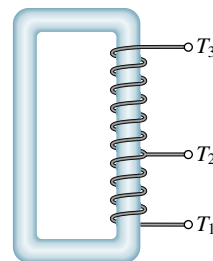
### ODST. 33.11 Transformátory

**86C.** Generátor s výstupním napětím  $100 \text{ V}$  je připojen k primárnímu vinutí transformátoru s 50 závitů. Jaké je napětí na sekundárním vinutí, které má 500 závitů?

**87C.** Primární vinutí transformátoru má 500 závitů a sekundární vinutí 10 závitů. (a) Jaké je napětí  $U_2$ , je-li sekundární obvod rozpojený a je-li primární napětí  $U_1 = 120 \text{ V}$ ? (b) Jaký poteče proud v primárním a v sekundárním vinutí, je-li sekundární vinutí připojeno k odporové zátěži  $15 \Omega$ ?

**88C.** Obr. 33.36 ukazuje tzv. *autotransformátor*. Ten je tvořen jedinou cívkou (navinutou na železném jádře) se třemi vývody  $T_i$ . Mezi vývody  $T_1$  a  $T_2$  je 200 závitů a mezi vývody  $T_2$  a  $T_3$  je 800 závitů. Libovolné dva vývody můžeme považovat za „primární svorky“ a jiné dva vývody za „sekundární svorky“.

Vypište všechny poměry, se kterými můžeme primární napětí transformovat na sekundární.



Obr. 33.36 Cvičení 88

**89Ú.** Generátor střídavého proudu o výkonu  $250 \text{ kW}$  dodává energii do odporové zátěže ve vzdálené továrně prostřednictvím dvou vodičů přenosového vedení. Každý z nich má odpor  $0,30 \Omega$ . V továrně je použit snížovací transformátor poskytující napětí mnohem nižší, bezpečné a pro použití v továrně vhodnější. Vypočítejte pokles napětí na vedení a ztrátový výkon ve vedení, je-li efektivní hodnota emn generátoru (a)  $U = 80 \text{ kV}$ , (b)  $U = 8,0 \text{ kV}$  a (c)  $U = 0,80 \text{ kV}$ . Vyhodnoťte vhodnost každé volby.

**90Ú.** Nechť zvýrazněný obdélník vlevo v obr. 33.32 představuje výstup zesilovače s vysokou impedancí  $1\,000 \Omega$  a místo rezistoru je cívka reproduktoru s nízkou impedancí  $10 \Omega$ . Pro přenos maximálního výkonu do zátěže  $R$  musí být, jak víme z kap. 28, úlohy 24,  $R = r$ , což zde není splněno. Jak však víme, můžeme použít transformátor i k „transformaci“ odporů. Načrtněte mezi zesilovač a reproduktor v obr. 33.32 primární a sekundární vinutí transformátoru tak, abychom přizpůsobili impedance. Jaký musí být poměr počtu jeho závitů?

### PRO POČÍTAČ

**91Ú.** Kondenzátor  $45,0 \mu\text{F}$  a rezistor  $200 \Omega$  jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí  $U_z = 100 \text{ V}$ . Frekvenci  $f$  zdroje lze měnit od 0 do  $100 \text{ Hz}$ . (a) Napište rovnici pro reaktanci kondenzátoru  $X_C$ . (b) Znázorněte v grafu současně rezistanci  $R$ , reaktanci kondenzátoru  $X_C$  a impedanci  $Z$  v závislosti na kmitočtu  $f$  v rozsahu  $0 < f < 100 \text{ Hz}$ . (c) Z grafu určete hodnotu  $f$ , při které  $X_C = R$ .

**92Ú.** Pro zadání z úlohy 91 znázorněte současně napětí  $U_C$  na kondenzátoru, napětí  $U_R$  na rezistoru a (konstantní) napětí  $U_z$  zdroje v závislosti na  $f$  v rozsahu  $0 < f < 100 \text{ Hz}$ . (b) Z grafu určete hodnotu  $f$ , při které  $U_C = U_R$ . (c) Jaká je hodnota  $U_R$  při této frekvenci? (d) Určete hodnotu  $f$ , při které  $U_R = 0,50U_z$ . (e) Jaké je  $U_C$  při této frekvenci? (f) Určete hodnotu  $f$ , při které  $U_C = 0,50U_z$ . (g) Jaká je hodnota  $U_R$  při této frekvenci?

**93Ú.** Cívka  $40,0 \text{ mH}$  a rezistor  $200 \Omega$  jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí  $U_z = 100 \text{ V}$ . Frekvenci zdroje lze měnit od 0 do  $2\,500 \text{ Hz}$ . (a) Napište vztah pro induktivní reaktanci  $X_L$ . (b) Znázorněte současně odpor  $R$ , induktivní reaktanci  $X_L$  a impedanci  $Z$  v závislosti na  $f$  v rozsahu  $0 < f < 2\,500 \text{ Hz}$ . (c) Z grafů určete hodnotu  $f$ , při které  $X_L = R$ .

**94Ú.** Pro zadání z úlohy 93 znázorníte současně napětí  $U_L$  na cívce, napětí  $U_R$  na rezistoru a (konstantní) napětí  $U_z$  zdroje v závislosti na frekvenci  $f$  v rozsahu  $0 < f < 2\,500$  Hz. (b) Z grafu určete frekvenci  $f$ , při které je  $U_L = U_R$ . (c) Jaké je napětí  $U_R$  při této frekvenci? (d) Určete frekvenci  $f$ , při které  $U_R = U_z/3$ . (e) Jaké je napětí  $U_L$  při této frekvenci? (f) Určete frekvenci  $f$ , při které  $U_L = U_z/3$ . (g) Jaké je napětí  $U_R$  při této frekvenci?

**95Ú.** Cívka  $150,0$  mH, kondenzátor  $45,0$   $\mu$ F a rezistor  $90,0$   $\Omega$  jsou zapojeny v sérii ke zdroji střídavého napětí  $U_z = 100$  V. Frekvenci zdroje  $f$  lze měnit od  $0$  do  $1\,000$  Hz. (a) Vyneste do grafu současně kapacitní reaktanci  $X_C$  a induktivní reaktanci  $X_L$  v závislosti na frekvenci  $f$  v rozsahu  $0 < f < 200$  Hz. (b) Z grafu určete hodnotu  $f$ , při které  $X_C = X_L$ . (c) Vyneste impedanci  $Z$  obvodu v závislosti na frekvenci  $f$  v rozsahu  $0 < f < 188$  Hz a z grafu stanovte frekvenci  $f$ , při které je impedance  $Z$  minimální.