



Mechanická práce a kinetická energie

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Mechanická práce a kinetická energie



Mechanická práce a kinetická energie



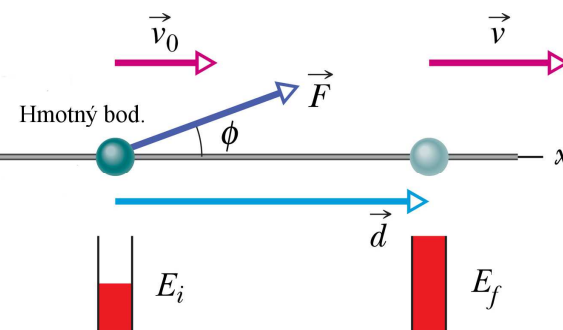
"We all followed with the heavier boat on the composite sledge. It was terrific work to keep it going. We all did our best but were practically exhausted by the time we reached the new camp... barely 3/4 miles away." - Thomas Orde-Lees' Diary, The Imperial Trans-Antarctic Expedition Sir Ernest Shackleton (1914–1917)

Práce konstantní síly působící na těleso pohybující se v přímém směru.

Účinek síly na pohybový stav tělesa, můžeme posuzovat buď podle **dráhy**, na níž síla působí nebo podle **doby** po níž síla působila. Výsledek působení však vždy vyplývá z Newtonova pohybového zákona síly.

Hmotný bod hmotnosti m se pohybuje bez tření po napnutém drátu horizontálně ve směru osy x . Vektor působící síly $\vec{F}$, svírá se směrem pohybu hmotného bodu úhel ϕ . Z Newtonova zákona síla vyplývá:

$$F_x = ma_x$$



Předpokládejme, že se hmotný bod na počátku pohyboval s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$. Od okamžiku kdy na něj začala působit konstantní síla $\mathbf{F}$ urazil dráhu $\mathbf{d}$ a dosáhl rychlosti $\mathbf{v}$.

Dosazením za a_x do druhého Newtonova zákona ze vztahu: $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_0^2 + 2a_x d$

dostaneme vztah:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_f - E_i = F_x d$$

E_i je počáteční kinetická energie, E_f je konečná kinetická energie: $E_f = \frac{1}{2}mv^2$, $E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$

Mechanická práce – zobecnění.

Při hledání obecného vztahu mezi dráhovým účinkem síly změnou kinetickou energie vyjděme z Newtonova zákona síly:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Skalárně vynásobíme obě strany pohybové rovnice $\vec{dr}$: $m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Dosazením za $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{\tau}^0 = v \vec{\tau}^0$ a úpravou členu $\vec{v} \cdot d\vec{v}$ podle identity:

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = v \vec{\tau} \cdot d(v \vec{\tau}) = v \vec{\tau} \cdot (dv \vec{\tau} + v d\vec{\tau}) = v dv \underbrace{(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})}_1 + v^2 \underbrace{(\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau})}_0 = v dv$$

dostaneme rovnici $m v dv = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Integrací obou stran této rovnice získáme vztah mezi změnou kinetické energie a dráhovým působením síly:

$$\int_{v_1}^{v_2} m v dv = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mechanická práce síly po dráze mezi místy vymezenými polohovými vektory $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

kinetická energie, souvisí se změnou pohybového stavu tělesa.

Práce síly na tělese vede ke změně pohybového stavu tělesa a změně jeho kinetické energie:

$$\Delta E_{kin} = E_{kin.1} - E_{kin.2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{12}$$

Vykonanou práci označujeme jako dodanou práci $W > 0$ jestliže kinetická energie vzrostla. Naopak klesne-li kinetická energie tělesa pak říkáme, že těleso práci vykonalo $W < 0$.

Jednotkou **mechanické práce** a **kinetické energie** je 1 joule, 1J). Těleso hmotnosti $m = 1\text{kg}$ pohybující se rychlostí $v = 1\text{ m/s}$ má kinetickou energii 1J.

Z rovnice práce síly $\vec{F}$ na dráze délky $\vec{d}$: $W = Fd \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{d}$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \rightarrow W > 0, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \rightarrow W < 0$$

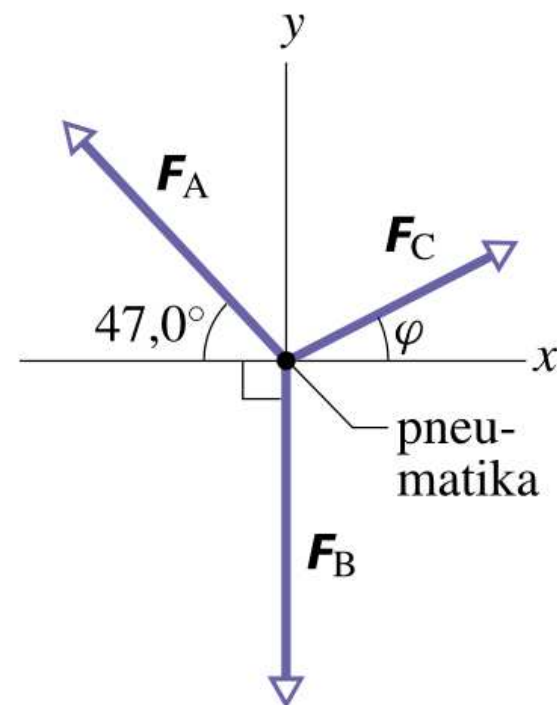
Z platnosti principu aditivity vyplývá pro práci vykonanou více silami:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C \Rightarrow W_{net} = W_A + W_B + W_C$$

Výsledná mechanická práce $\vec{F}_{net}$ ve směru posunutí $\vec{d}$ je:

$$W_{net} = \vec{F}_{net} \cdot \vec{d}$$

Změna mechanické energie: $\Delta E = E_f - E_i = W_{net}$



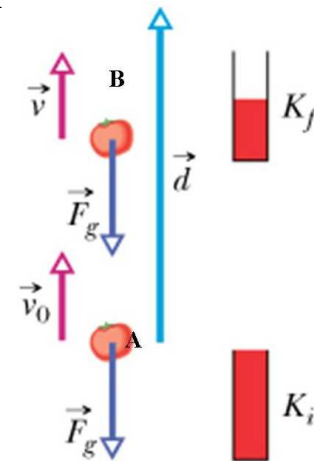
Práce vykonaná gravitační silou.

Uvažujme těleso hmotnosti m vržené kolmo vzhůru z místa A s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$. Se vzrůstající výškou tělesa klesá v důsledku práce konané gravitační silou $\mathbf{F}_g$, jeho tělesa a tedy i jeho kinetická energie. V místě B má pak těleso rychlost $\mathbf{v} < \mathbf{v}_0$. Práce W_g vykonaná gravitační silou při stoupání tělesa $A \rightarrow B$:

$$W_g (A \rightarrow B) = mgd \cos 180^\circ = -mgd$$

Práce W_g vykonaná gravitační silou při klesání tělesa $A \rightarrow B$:

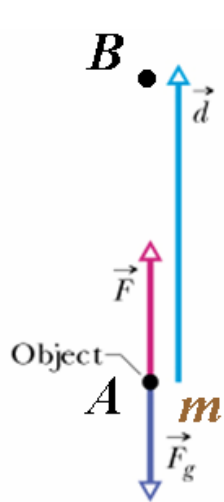
$$W_g (B \rightarrow A) = mgd \cos 0^\circ = mgd.$$



Práce vykonaná silou při zvedání a klesání tělesa.

Zvedání tělesa.

Máme objekt hmotnosti m zvedaný silou $\mathbf{F}$ z místa A do místa B . V místě A , na počátku pohybu je objekt v klidu po dosažení bodu B je rychlost objektu rovna nule. Síla $\mathbf{F}$ se může libovolně měnit. Platí rovnice:



$$\Delta E = E_f - E_i = W_{\text{net}}$$

$$E_i = E_f \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow W_{\text{net}} = 0$$

Na těleso působí gravitační síla $\mathbf{F}_g$ a síla $\mathbf{F}$ zvedající těleso vzhůru.

$$W_{\text{net}} = W_F (A \rightarrow B) + W_g (A \rightarrow B) = 0 \rightarrow$$

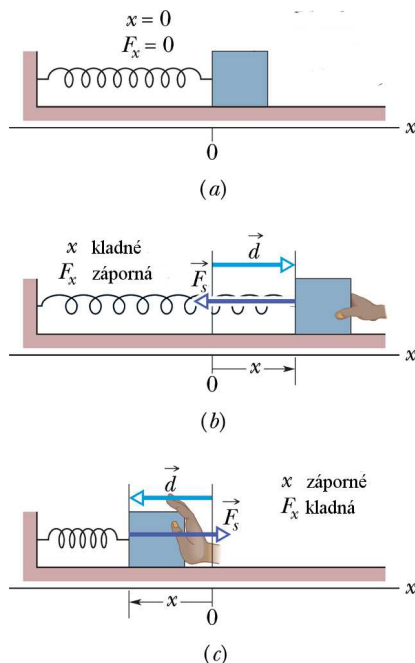
$$W_F (A \rightarrow B) = -W_g (A \rightarrow B)$$

$$W_g (A \rightarrow B) = mgd \cos 180^\circ = -mgd \rightarrow W_F (A \rightarrow B) = mgd$$

Klesání tělesa.

Směr pohybu objektu je $B \rightarrow A$: $W_g (B \rightarrow A) = mgd \cos 0^\circ = mgd$

$$W_F (B \rightarrow A) = -W_g (B \rightarrow A) = -mgd$$



Práce elastické (pružné) síly.

Síla působící na těleso připevněné k pružině při natažení nebo stlačení pružiny je úměrná natažení nebo stlačení pružiny-výchylce x z rovnovážné polohy: $F = -kx$

Konstanta úměrnosti k je charakteristická pro danou pružinu a nazývá se **konstantou pružnosti (silová konstanta)**. Vztah pro sílu pružnosti je známý též jako **Hookův zákon**.

Uvažujme uvolněnou pružinu s konstantou pružnosti k (a). Postupným natahováním pružiny se změní délka pružiny z délky x_i (b) na délku x_f (c). Práce vykonaná vnější silou při natahování pružiny vypočteme:

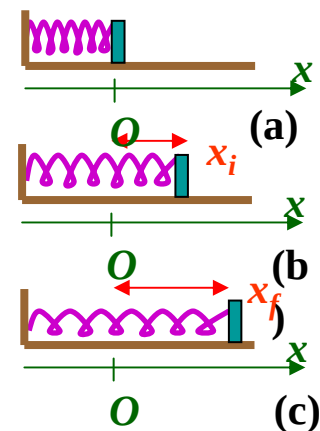
$$W_p = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \left(-\frac{1}{2}k\right) \left[x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

Práce elastické síly při změně délky pružiny o délku $(x_i - x_f)$:

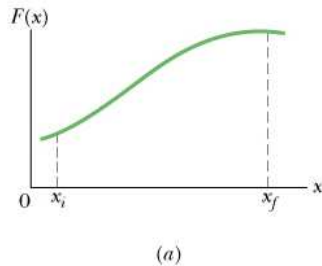
$$W_p = \left(-\frac{1}{2}k\right) (x_f^2 - x_i^2)$$

Obvykle bývá na počátku pružina relaxovaná $x_i=0$, pak buď pružinu stlačíme nebo natáhneme $x_f = \pm x$, v tom případě:

$$W_{elast} = -\frac{1}{2}kx^2$$



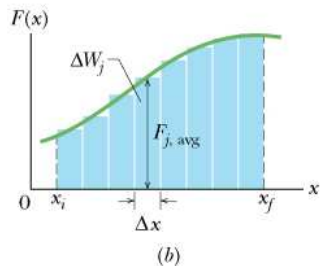
Mechanická práce obecné síly $F(x)$ působící po dráze x .



Síla $\mathbf{F} \neq \text{konst.}$ je funkcí polohy x (obr. a). Jak vypočítáme práci vykonanou silou po dráze x mezi počáteční (x_i) a konečnou polohou (x_f) v tomto případě?

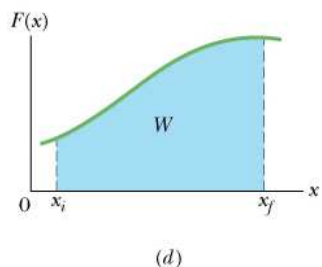
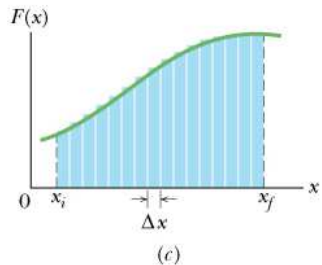
Rozdělíme interval (x_i, x_f), na N stejných částí délky Δx (obr.b). Práce vykonaná silou $\mathbf{F}$ v j -tém intervalu $\Delta W_j = |\mathbf{F}_{j, \text{avg}}| \Delta x_j$, kde $|\mathbf{F}_{j, \text{avg}}|$ je průměrná hodnota velikosti vektoru síly $\mathbf{F}$ v j -tém intervalu. Celková práce vykonaná po dráze mezi body (x_i, x_f) je dána součtem:

$$W = \sum_{j=1}^N F_{j, \text{avg}} \Delta x$$



V limitě pak pro $N \rightarrow \infty$ ($\Delta x \rightarrow 0$) (obr.c) dostaneme pro práci proměnné síly působící na těleso po dráze x vztah:

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \sum_{j=1}^N F_{j, \text{avg}} \Delta x_j = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$



Práce W je tedy rovna ploše po křivkou omezenou osou x v intervalu (x_i, x_f), křivkou $F(x)$ a kolmicemi procházejícími body x_i a x_f .

Mechanická práce obecné síly působící po obecné dráze.

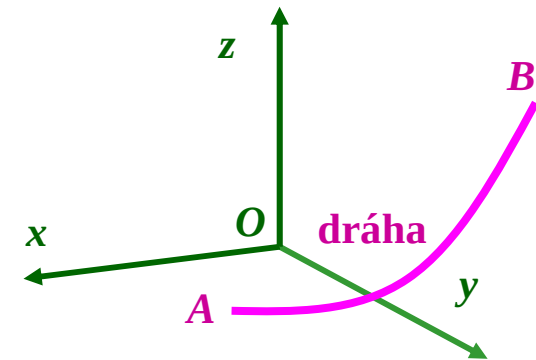
Uvažujme těleso na něž působí obecná síla v prostoru: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

Předpokládáme, že složky síly do směru jednotlivých os nezávisí na zbývajících dvou souřadnicích.

Elementární práce vykonaná silou na elementu dráhy je:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



Celková práce na dráze mezi body o polohových vektorech $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_f$ je:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

Výkon síly.

Práci vykonaná silou za jednotku času označujeme jako **výkon**. Vykoná-li síla za časový interval Δt práci W pak **průměrný výkon** působící síly je dán vztahem :

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$$

Přechodem k limitě $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme hodnotu okamžitého výkonu:

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt}$$

Jednotkou výkonu je **1 Watt = 1Js^{-1}** , 1W; (James Watt). V technické praxi (odběr elektřiny, tepla) se často užívá jednotky **1 kilowatt-hodina**:

$$1 \text{ kilowatt-hodina} = 1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3,60 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,60 \text{ MJ}$$

Vyjádření výkonu prostřednictvím působící síly a okamžité rychlosti tělesa:

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos(\phi) dx}{dt} = F \cos(\phi) \left(\frac{dx}{dt} \right) = Fv \cos(\phi)$$

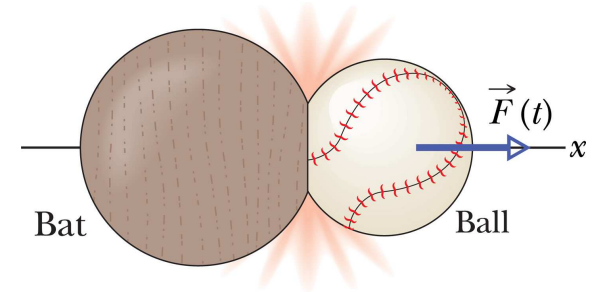
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Impulz síly.

Časový účinek síly- **impulz síly**- charakterizuje působení síly z hlediska délky jejího působení.

Pálka odpalující míček působí po dobu t na míček silou $\mathbf{F}(t)$.

Po odpálení míčku se změní hybnost míčku o $\Delta \mathbf{p}$.



$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$$

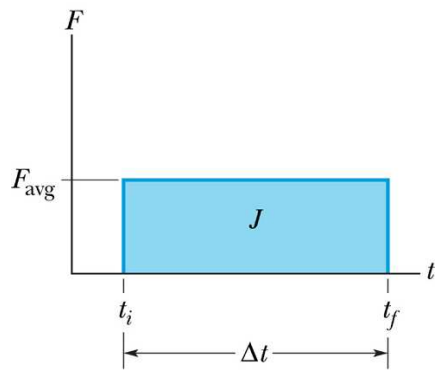
$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p}$$

t_1 Změna hybnosti tělesa.

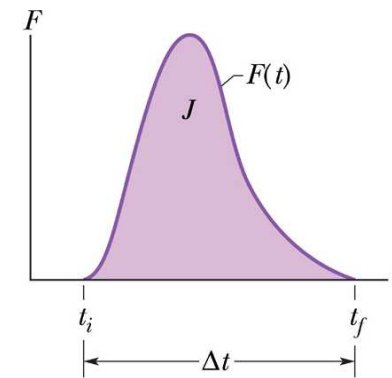
$$\Delta \vec{p} = \vec{J}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{J}$$

Impulz síly.



Impulz síly $\mathbf{F} = \text{konstanta}$.



Impulz síly pro libovolnou sílu $\mathbf{F}(t)$.